目　录

第0章 预备知识

本章的目的是阐述全书常用的某些概念和定理. 这些内容涉及集合论、拓扑空间、测度空间和线性空间.

§1. 集合论

集合 $x\in X$ 表示 x 是集合 X 的一个元或元素; $x\overline{\in}X$ 表示 x 不是集合 X 的元. 我们用 $\{x;P\}$ 表示由所有具有性质 P 的 x 组成的集合. 例如 $\{y;y=x\}$ 是由单独一个元素 x 组成的集合 $\{x\}$. 空集是没有元素的集合, 记为 $\varnothing$. 如果集合 X 的每一个元素都是集合 Y 的元素, 则称 X 是 Y 的一个子集, 记为 $X\subseteq Y$ 或 $Y\supseteq X$. 设 $\mathscr{X}$ 是以某些集合 X 作为元素的集合, 则由所有属于 $\mathscr{X}$ 中的某个 X 的元素 x 组成的集合称为 $\mathscr{X}$ 中的诸集合 X 的并集; 此并集用 $\bigcup\limits_{X\in\mathscr{X}}X$ 来表示. $\mathscr{X}$ 中的诸集合 X 的交集是由所有属于 $\mathscr{X}$ 中的每一个 X 的元素 x 组成的集合; 此交集用 $\bigcap\limits_{X\in\mathscr{X}}X$ 来表示. 如果两个集合的交集是空集, 则称它们是不相交的. 如果某集合族中的每两个不同的集合都是不相交的, 则称此集合族是不相交的. 如果集合序列 $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 是一个不相交的集合族, 则其并集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ 可以写成和的形式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n$.

映射 术语映射、函数和变换将作为同义词来使用. 符号 $f:X\to Y$ 表示 f 是一个单值函数, 它的定义域是 X 而它的值域是含于 Y 内的; 对于每一个 $x\in X$, 函数 f 都确定一个唯一的元素 $f(x)=y\in Y$. 对于两个映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$, 我们可以用 $(gf)(x)=g(f(x))$ 来定义它们的复合映射 $gf:X\to Z$. 符号 $f(M)$ 表示集合 $\{f(x);x\in M\}$, 叫做 M 在映射 f 下的象. 符号 $f^{-1}(N)$ 表示集合 $\{x;f(x)\in N\}$, 叫做 N 在映射 f 下的逆象. 显然

对所有的 $Y_1\subseteq f(X)$ 都有 $Y_1=f(f^{-1}(Y_1))$, 且

对所有的 $X_1\subseteq X$ 都有 $X_1\subseteq f^{-1}(f(X_1))$.

如果 $f:X\to Y$, 并且对于每一个 $y\in f(X)$ 都只有一个 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$, 那么就说 f 有逆(映射), 或者说 f 是一一的. 这时, 该逆映射的定义域为 $f(X)$ 而值域为 X; 它被方程 $x=f^{-1}(y)=f^{-1}(\{y\})$ 所确定.

映射 f 的定义域和值域分别记为 $D(f)$ 和 $R(f)$. 因此, 如果 f 有逆映射, 则

对所有的 $x\in D(f)$ 都有 $f^{-1}(f(x))=x$, 且

对所有的 $y\in R(f)$ 都有 $f(f^{-1}(y))=y$.

如果 $f(X)=Y$, 那么就说函数 f 把 X 映到 Y 上, 而如果 $f(X)\subseteq Y$, 就说 f 把 X 映入 Y 内. 对于函数 f 和 g, 如果 $D(f)$ 包含 $D(g)$ 且对 $D(g)$ 中所有的 x 都有 $f(x)=g(x)$, 则称 f 是 g 的一个扩张(译者注: 也译作延拓), 而称 g 是 f 的一个限制.

Zorn 引理

定义 设 P 是元素 $a, b, \cdots$ 所成的一个集合. 假定在 P 的某些元素对 (a, b) 之间定义了某种二元关系, 记为 $a\prec b$, 具有性质

$$\begin{cases} a\prec a, \\ \text{如果 } a\prec b \text{ 且 } b\prec a, \text{ 则 } a=b, \\ \text{如果 } a\prec b \text{ 且 } b\prec c, \text{ 则 } a\prec c \text{(可传递性)}. \end{cases}$$

则称 P 按关系 $\prec$ 是半序的(或部分有序的).

例 如果 P 是由集合 X 的一切子集所组成的集合, 则集合包含关系 $(A\subseteq B)$ 就给出了 P 的一种半序关系. 由所有复数 $z=x+iy, w=u+iv, \cdots$ 组成的集合, 按 $x\leqq u$ 和 $y\leqq v$ 定义的关系 $z\prec w$, 是半序的.

定义 设 P 是一个半序集, 其元素为 $a, b, \cdots$. 如果 $a\prec c$ 和 $b\prec c$, 则我们把 c 叫做 a 和 b 的一个上界. 此外, 如果对于 a 和 b 的任何一个上界 d 都有 $c\prec d$, 则我们把 c 叫做 a 和 b 的最小上界或上确界, 并记 $c=\sup(a, b)$ 或 $a\vee b$. 如果 P 内存在这种元素 c, 则它必是唯一的. 我们用类似的方法定义 a 和 b 的最大下界或下确界, 并把它记为 $\inf(a, b)$ 或 $a\wedge b$. 如果对于半序集 P 内的每个元素对 (a, b) 都存在 $a\vee b$ 和 $a\wedge b$, 则称 P 为一个格.

例 集合 B 的子集 M 的全体, 对于由集合包含关系 $M_1\subseteq M_2$ 定义的半序关系 $M_1\prec M_2$, 是一个格.

定义 如果对于半序集 P 内的每个元素对 (a, b), 不是 $a\prec b$ 成立就是 $b\prec a$ 成立, 则称 P 是全序的(或线性有序的). 半序集 P 的子集本身, 对于 P 的半序关系而言, 也是半序的; 而在该序关系下, 子集还有可能成为全序集. 设 P 是半序集而 S 是 P 的一个子集, 如果有某个 $m\in P$ 使得对于每一个 $s\in S$ 都有 $s\prec m$, 则称 m 是 S 的一个上界. P 中的某元素 m 称为极大元素, 如果 $p\in P$ 同 $m\prec p$ 一起就意味着 $m=p$.

Zorn 引理 设 P 是一个非空的半序集, 并且 P 的每一个全序子集都有含于 P 的上界. 则 P 至少含有一个极大元素.

我们知道, Zorn 引理等价于集合论中的 Zermelo 选择公理.

§2. 拓扑空间

开集和闭集

定义 设 τ 是集合 X 的一个子集系. 如果 τ 含有空集、集合 X 本身、τ 的每个子系的并集以及 τ 的每个有限子系的交集, 那么就说 τ 在 X 中定义了一种拓扑. τ 内的集合叫做拓扑空间

(M,τ)的开集；通常我们略去 τ，就把 X 叫做拓扑空间．除非作相反的申明，我们总是假定拓扑空间 X 要满足 Hausdorff 的分离公理：

对于 X 中的每两个不同的点 x_1, x_2，总存在着不相交的开集 G_1，G_2 使得 $x_1 \in G_1$，$x_2 \in G_2$．X 中的点 x 的邻域是一个集合，它包含某个含有 x 的开集．X 的子集 M 的邻域也是一个集合，它是 M 的每一点的邻域．X 中的某个点 x 叫做 X 的子集 M 的聚点或极限点，如果 x 的每一个邻域都至少含有一个不同于 x 的点 $m \in M$．

定义 设 M 是拓扑空间 X 的任一子集，而 G 是 X 的开集．如果把 M 的形如 $M \cap G$ 的子集都叫做 M 的"开集"，则 M 就成为一个拓扑空间．M 的这种诱导拓扑称为拓扑空间 X 的子集 M 的相对拓扑．

定义 如果拓扑空间 X 的某集合 M 含有 M 的一切聚点，则 M 称为闭集．容易看出，M 是闭集，当且仅当 M 的补集 $M^C = X - M$ 是开集．这里，$A - B$ 表示属于 A 但不属于 B 的点的全体．如果 $M \subseteq X$，则 X 内所有包含 M 的闭子集的交集称为 M 的闭包，记为 M^a(此上标"a"出自德文abgeschlossene Hülle——闭包的第一个字母)．

显然，M^a 是闭集并且 $M \subseteq M^a$；容易看出，当且仅当 M 是闭集时，$M = M^a$．

度量空间

定义 如果 X 和 Y 都是集合，我们用 $X \times Y$ 表示由一切有序对(x, y)组成的集合，其中，$x \in X$，$y \in Y$；$X \times Y$ 称为 X 与 Y 的笛卡尔乘积．对于集合 X，如果能定义一个函数 d，其定义域为 $X \times X$ 而值域含于实数域 R^1 内，且满足

$$\begin{cases} d(x_1, x_2) \geqq 0, \text{ 并且当且仅当 } x_1 = x_2 \text{ 时}, d(x_1, x_2) = 0, \\ d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1), \\ d(x_1, x_3) \leqq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \text{ (三角不等式)}, \end{cases}$$

则称 X 为度量空间．d 称为 X 的度量函数或距离函数．对于每一个正数 r，我们给度量空间 X 内的每一点 x_0 配上一个集合 $S(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\}$，而把它叫做以 x_0 为心、r 为半径的开球．度量空间 X 的集合 M 叫做"开集"，当且仅当对于每个点 $x_0 \in M$，M 都含有一个以 x_0 为心的开球．于是，这种"开集"的全体满足拓扑空间的定义中的开集公理．

因此，度量空间 X 是一个拓扑空间．容易看出，X 的某个点 x_0 是 M 的一个聚点，当且仅当对于每一个 $\varepsilon > 0$，M 都至少含有一个点 $m \neq x_0$ 使得 $d(m, x_0) < \varepsilon$．n 维欧几里得空间 R^n 关于

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

是一个度量空间，其中，$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 而 $y = (y_1, \cdots, y_n)$．

连续映射

定义 设 $f: X \to Y$ 是一个定义在拓扑空间 X 上并把 X 映入拓扑空间 Y 内的映射．对于点 $x_0 \in X$，如果 $f(x_0)$ 的每个邻域 U 都相应地有 x_0 的某个邻域 V 使得 $f(V) \subseteq U$，则称 f 在点 x_0 连续．

如果映射 f 在它的定义域 $D(f)=X$ 的每一点都是连续的，则称 f 是连续的.

定理 设 X 和 Y 都是拓扑空间，而 f 是定义在 X 上且把 X 映入 Y 内的一个映射. 这时，f 是连续的，当且仅当 Y 的每一个开集在映射 f 下的逆象都是 X 的开集.

证明 如果 f 是连续的而 U 是 Y 的一个开集，于是 $V=f^{-1}(U)$ 是每个使得 $f(x_0)\in U$ 的点 $x_0\in X$ 的邻域，亦即 V 是 V 的每一点 x_0 的邻域. 因此，V 是 X 的一个开集. 反之，假定对于 Y 的每一个开集 $U\ni f(x_0)$，集合 $V=f^{-1}(U)$ 都是 X 的开集，则由定义可知，f 在点 $x_0\in X$ 是连续的.

紧　性

定义 设 $\{G_\alpha\}$ 是一个集合系，其中，$\alpha\in A$. 如果集合 X 作为并集 $\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$ 的一个子集而含于其中，则称该集合系是集合 X 的一个覆盖.

设 M 是拓扑空间 X 的一个子集. 如果 X 的每一个覆盖 M 的开集系都含有一个仍然覆盖 M 的有限子系，则 M 叫做紧集.

由前面的定理可知，紧集的连续映象仍然是紧集.

命题 1 拓扑空间的紧子集必是闭集.

证明 假定拓扑空间 X 的紧集 M 有一个聚点 x_0 使得 $x_0\notin M$. 根据 Hausdorff 的分离公理，对任何点 $m\in M$，总存在 X 的不相交的开集 G_{m,x_0} 和 $G_{x_0,m}$ 使得 $m\in G_{m,x_0}$，$x_0\in G_{x_0,m}$. 于是集合系 $\{G_{m,x_0};\ m\in M\}$ 必覆盖 M. 由于 M 是紧集，所以该集合系含有某个覆盖 M 的有限子集 $\{G_{m_i,x_0};\ i=1,2,\cdots,n\}$. 因此，$\bigcap_{i=1}^{n}G_{x_0,m_i}$ 不与 M 相交. 但是，由于 x_0 是 M 的一个聚点，所以开集 $\bigcap_{i=1}^{n}G_{x_0,m_i}\ni x_0$ 必含有某个不同于 x_0 的点 $m\in M$. 这是一个矛盾，从而 M 必是闭集.

命题 2 拓扑空间 X 的紧集 M 的闭子集 M_1 也是紧集.

证明 设 $\{G_\alpha\}$ 是 X 的任一覆盖 M_1 的开集系. 因为 M_1 是闭集，所以 $M_1^c=X-M_1$ 是 X 的一个开集. 由于 $M_1\subseteq M$，所以开集系 $\{G_\alpha\}$ 添上 M_1^c 后就覆盖了 M，又因为 M 是紧集，所以总可以从 $\{G_\alpha\}$ 中选出某个有限子系 $\{G_{\alpha_i};\ i=1,2,\cdots,n\}$ 使得此子系添上 M_1^c 后能覆盖 M. 因此 $\{G_{\alpha_i};\ i=1,2,\cdots,n\}$ 就覆盖了 M_1.

定义 如果拓扑空间的某子集的闭包是紧集，则该子集叫做相对紧集. 如果某拓扑空间的每一点都有一个紧的邻域，则该空间叫做局部紧空间.

定理 任何一个局部紧空间 X 都可以嵌入到这样一个只比 X 多一个点的紧空间 Y 内，使得作为 Y 的一个子集的 X 的相对拓扑刚好就是 X 原来的拓扑. 空间 Y 称为 X 的一点紧化空间.

证明 设 y 是任何一个不属于 X 的元素. 又设 $\{U\}$ 是 X 中所有使得 $U^c=X-U$ 为紧集的开集族. 我们规定，X 本身 $\in\{U\}$. 设 Y 是由点 y 及 X 的全体点组成的集合. 对于 Y 中的某个集合，如果或者 (i) 它不含 y 而作为 X 的一个子集是开集，或者 (ii) 它含有 y 且它与 X 的交集是 $\{U\}$ 的一个元，则称该集合是 Y 的一个开集. 因此，容易看出，所得到的 Y 是一个拓扑空间且 X 的相对拓扑同它原来的拓扑是一致的.

假定 $\{V\}$ 是一个覆盖 Y 的开集系. 于是 $\{V\}$ 必含有某个形如 $U_0\cup\{y\}$ 的元，这里，$U_0\in\{U\}$. 根

据$\{U\}$的定义,U_0^0作为X的子集是紧集. 由于U_0^0被集合系$\{V\cap X\}$所覆盖, 其中,$V\in\{V\}$. 所以,此集合系必含有某个覆盖U_0^0的有限子集: $V_1\cap X, V_2\cap X, \cdots, V_n\cap X$. 从而$V_1, V_2, \cdots, V_n$以及$U_0\cup\{y\}$就覆盖了$Y$,这就证明了$Y$是紧的.

Tychonov 定理

定义 假设相应于指标集合A的每一个α都给定了一个拓扑空间X_α. 我们把笛卡尔乘积$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$定义为所有这种函数$f$组成的集合:$f$的定义域为$A$且对于每一个$\alpha\in A$都有$f(\alpha)\in X_\alpha$. 我们记$f=\prod_{\alpha\in A} f(\alpha)$,并把$f(\alpha)$叫做$f$的第$\alpha$个坐标. 当$A$是整数集$(1, 2, \cdots, n)$时,$\prod_{k=1}^{n} X_k$通常记为$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$. 我们在乘积空间$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$中引入一种(弱)拓扑, 即把形如$\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$的如下集合都叫做该空间的"开集",其中,$X_\alpha$的开集$G_\alpha$,除去有限个$\alpha$之外都与$X_\alpha$重合.

Tychonov 定理 诸紧拓扑空间X_α的笛卡尔乘积$X=\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$也是紧的.

注 众所周知, 实数轴R^1上的有界闭集对由距离$d(x, y)=|x-y|$所确定的拓扑是紧的(Bolzano-Weierstrass 定理). 顺便指出, 如果度量空间的子集M能被该空间的某个球$S(x_0, r)$所包含,则称M是有界集. 特别地, Tychonov 定理意味着n维欧几里得空间R^n中的平行正多面体:

$$-\infty<a_i\leqq x_i\leqq b_i<\infty \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

是紧的. 由此我们看出,R^n是局部紧的.

Tychonov 定理的证明 如果某集合系的每一个有限子系都有非空的交集, 则称该集合系具有有限交性质. 利用作出一个覆盖的诸开集的补集的办法, 容易看出, 一个拓扑空间X是紧的,当且仅当对于它的每一个具有有限交性质的闭子集系$\{M_\alpha;\alpha\in A\}$,交集$\bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha^a$都是非空的.

现在, 设$\{S\}$是由$X=\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$的子集$S$组成的一个具有有限交性质的集合系. 又设$X$的某些子集$N$组成的集合系$\{N\}$具有以下性质:

(i) $\{S\}$是$\{N\}$的一个子系,

(ii) $\{N\}$具有有限交性质,

(iii) $\{N\}$在下述意义下是极大的, 即它不可能是任何别的具有有限交性质且以$\{S\}$作为其子系的集合系的真子系.

这种极大系$\{N\}$的存在性可以用 Zorn 引理或超限归纳法予以证明.

对于$\{N\}$的任何一个集合N, 我们定义集合$N_\alpha=\{f(\alpha);\ f\in N\}\subseteq X_\alpha$. 用$\{N_\alpha\}$表示集合系$\{N_\alpha; N\in\{N\}\}$. 同$\{N\}$一样, $\{N_\alpha\}$也具有有限交性质. 因此, 根据X_α的紧性, 至少存在一个点

$p_\alpha \in X_\alpha$ 使得 $p_\alpha \in \bigcap_{N\in\{N\}} N_\alpha^a$. 需要证明的是，点 $p=\prod_{\alpha\in A} p_\alpha$ 属于集合 $\bigcap_{N\in\{N\}} N^a$.

由于 p_{α_0} 属于交集 $\bigcap_{N\in\{N\}} N_{\alpha_0}^a$，从而 X_{α_0} 的任何一个含有 p_{α_0} 的开集 G_{α_0} 都要同每一个 $N_{\alpha_0}\in\{N_{\alpha_0}\}$ 相交. 所以 X 的开集

$$G^{(\alpha_0)}=\{x; x=\prod_{\alpha\in A} x_\alpha \text{ 且其中的 } x_{\alpha_0}\in G_{\alpha_0}\}$$

必同 $\{N\}$ 的每一个 N 相交. 根据 $\{N\}$ 的极大性条件 (iii)，$G^{(\alpha_0)}$ 必属于 $\{N\}$. 因此，有限个这种集合 $G^{(\alpha_0)}(\alpha_0\in A)$ 的交集也必属于 $\{N\}$，从而它同每一个集合 $N\in\{N\}$ 相交. 因为 X 的任何一个含有 p 的开集，根据定义，是一个包含这种交集的集合，所以我们看出，$p=\prod_{\alpha\in A} p_\alpha$ 必属于交集 $\bigcap_{N\in\{N\}} N^a$.

Urysohn 定理

命题 紧空间 X 在这种意义下是正规的：对于 X 的任何不相交的闭集 F_1 和 F_2，总存在不相交的开集 G_1 和 G_2 使得 $F_1\subseteq G_1$, $F_2\subseteq G_2$.

证明 对于任何一对点 (x, y)，其中 $x\in F_1$, $y\in F_2$，总存在不相交的开集 $G(x, y)$ 和 $G(y, x)$ 使得 $x\in G(x, y)$, $y\in G(y, x)$. 因为 F_2 是紧空间 X 的一个闭子集，所以它也是紧集，从而，对于固定的 x，我们可以用有限个开集 $G(y_1, x), G(y_2, x), \cdots, G(y_{n(x)}, x)$ 来覆盖 F_2. 令

$$G_x=\bigcup_{j=1}^{n(x)} G(y_j, x) \quad \text{和} \quad G(x)=\bigcap_{j=1}^{n(x)} G(x, y_j).$$

则开集 G_x 和 $G(x)$ 不相交并且有 $F_2\subseteq G_x$, $x\in G(x)$. 因为 F_1 是紧空间 X 的一个闭子集，所以它也是紧集，从而我们可以用有限个开集 $G(x_1), G(x_2), \cdots, G(x_k)$ 来复盖 F_1. 因此

$$G_1=\bigcup_{j=1}^{k} G(x_j) \text{ 和 } G_2=\bigcap_{j=1}^{k} G_{x_j}$$

满足命题的条件.

系 紧空间 X 在这种意义下是正则的：对于 X 的任何一个非空开集 G_1'，总存在非空开集 G_2' 使得 $(G_2')^a\subseteq G_1'$.

证明 令 $F_1=(G_1')^C$ 而 $F_2=\{x\}$，其中 $x\in G_1'$. 于是我们可以把上述命题中所得到的开集 G_2 就取为 G_2'.

Urysohn 定理 设 A, B 是正规空间 X 中的不相交的闭集. 则存在 X 上的实值连续函数 $f(t)$ 使得

$$\text{在 } X \text{ 上 } 0\leqq f(t)\leqq 1, \text{ 在 } A \text{ 上 } f(t)=0 \text{ 而在 } B \text{ 上 } f(t)=1.$$

证明 相应于每一个有理数 $r=k/2^n$ $(k=0, 1, \cdots, 2^n)$ 我们都可以确定一个开集 $G(r)$ 使得

(i)$A\subseteqq G(0)$，$B=G(1)^C$，而(ii)当 $r<r'$ 时总有 $G(r)^a\subseteqq G(r')$．这可用对于 n 的归纳法予以证明．对于 $n=0$，由空间 X 的正规性可知，存在不相交的开集 G_0 和 G_1 使得 $A\subseteqq G_0$, $B\subseteqq G_1$．我们取 $G_0=G(0)$ 就行了．假定对于形如 $k/2^{n-1}$ 的数 r 已经构造出了满足条件(ii)的诸 $G(r)$．下面设 k 是一个 >0 的奇整数．这时，因为 $(k-1)/2^n$ 和 $(k+1)/2^n$ 都是形如 $k'/2^{n-1}$ 的数，其中，$0\leqq k'\leqq 2^{n-1}$，所以我们有 $G((k-1)/2^n)^a\subseteqq G((k+1)/2^n)$．因此，根据空间 X 的正规性，存在某开集 G，它满足 $G((k-1)/2^n)^a\subseteqq G$，$G^a\subseteqq G((k+1)/2^n)$．如果我们令 $G(k/2^n)=G$，则归纳法就实现了．

我们把 $f(t)$ 定义为

$$\text{在 } G(0) \text{ 上 } f(t)=0, \qquad \text{而当 } t\in G(0)^C \text{ 时 } f(t)=\sup_{t\in G(r)} r.$$

于是由(i)可知，在 A 上 $f(t)=0$ 而在 B 上 $f(t)=1$．我们尚须证明 f 的连续性．对于任何 $t_0\in X$ 和正整数 n，我们取这样的 r，它满足 $f(t_0)<r<f(t_0)+2^{-n-1}$．令 $G=G(r)\cap G(r-2^{-n})^{aC}$（我们约定，当 $s<0$ 时，令 $G(s)=\varnothing$ 而当 $s>1$ 时令 $G(s)=X$）．此开集 G 必含有 t_0．这是因为由 $f(t_0)<r$ 可知 $t_0\in G(r)$，而由 $(r-2^{-n-1})<f(t_0)$ 可知 $t_0\in G(r-2^{-n-1})^C\subseteqq G(r-2)^{aC}$．由于 $t\in G$ 意味着 $t\in G(r)$，从而 $f(t)\leqq r$；类似地，$t\in G$ 意味着 $t\in G(r-2^{-n})^{aC}\subseteqq G(r-2^{-n})^C$，从而 $r-2^{-n}\leqq f(t)$．所以，我们就证明了当 $t\in G$ 时，$|f(t)-f(t_0)|\leqq 1/2^n$．

Stone-Weierstrass 定理

Weierstrass 多项式逼近定理　设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的实(或复)值连续函数．则存在多项式 $P_n(x)$ 的序列使得当 $n\to\infty$ 时，它在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$．按照 S. Bernstein 的作法，我们可以取

$$P_n(x)=\sum_{p=0}^{n} {}_nC_p f(p/n)x^p(1-x)^{n-p}. \tag{1}$$

证明　将 $(x+y)^n=\sum_{p=0}^{n} {}_nC_p x^p y^{n-p}$ 对 x 微分，再乘以 x 后，我们就得到

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{p=0}^{n} p\,{}_nC_p x^p y^{n-p}.$$

类似地，将第一个式子对 x 微分两次，再乘以 x^2 后我们就得到

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{p=0}^{n} p(p-1)\,{}_nC_p x^p y^{n-p}.$$

因此，如果我们令

$$r_p(x)={}_nC_p x^p(1-x)^{n-p}, \tag{2}$$

则我们有

$$\sum_{p=0}^{n} r_p(x)=1, \quad \sum_{p=0}^{n} p r_p(x)=nx, \quad \sum_{p=0}^{n} p(p-1)r_p(x)=n(n-1)x^2. \tag{3}$$

因此

$$\sum_{v=0}^{n}(p-nx)^2 r_p(x)=n^2x^2\sum_{p=0}^{n}r_p(x)-2nx\sum_{p=0}^{n}pr_p(x)+\sum_{p=0}^{n}p^2r_p(x)$$

$$=n^2x^2-2nx\cdot nx+(nx+n(n-1)x^2)=nx(1-x). \tag{4}$$

我们可以假定在[0, 1]上$|f(x)|\leqq M<\infty$. 由 $f(x)$的一致连续性可知,对任何一个 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$ 使得

$$\text{当 } |x-x'|<\delta \text{ 时}, |f(x)-f(x')|<\varepsilon. \tag{5}$$

由(3)我们有

$$\left|f(x)-\sum_{p=0}^{n}f(p/n)r_p(x)\right|=\left|\sum_{p=0}^{n}(f(x)-f(p/n))r_p(x)\right|\leqq\left|\sum_{|p-nx|\leq\delta n}\right|+\left|\sum_{|p-nx|>\delta n}\right|.$$

对右端第一项,由 $r_p(x)\geqq0$ 以及(3)和(5)可得

$$\left|\sum_{|p-nx|\leq\delta n}\right|\leqq\varepsilon\sum_{p=0}^{n}r_p(x)=\varepsilon.$$

对右端第二项,由(4)和$|f(x)|\leqq M$ 可得

$$\left|\sum_{|p-nx|>\delta n}\right|\leqq 2M\sum_{|p-nx|>\delta n}r_p(x)\leqq\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2r_p(x)$$

$$=\frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2}\leqq\frac{M}{2\delta^2 n}\to0 \quad (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

Stone-Weierstrass 定理 设X是一个紧空间而$C(X)$是X上的实值连续函数的全体. 设$C(X)$的某子集B满足三个条件: (i)如果f、$g\in B$, 则函数乘积$f\cdot g$以及关于实系数α、β的线性组合$\alpha f+\beta g$都属于B, (ii)常数函数1属于B以及(iii) B的任何函数序列$\{f_n\}$的一致极限f_∞也属于B. 这时, $B=C(X)$, 当且仅当B可分离X的点, 亦即当且仅当对于每一对(s_1, s_2), 其中s_1、s_2是X不同的点, 在B中总存在某函数x, 它满足$x(s_1)\neq x(s_2)$.

证明 必要性是显然的, 因为紧空间是正规的, 从而由 Urysohn 定理可知, 存在实值连续函数x使得$x(s_1)\neq x(s_2)$.

为了证明充分性, 我们引入格的记号:

$$(f\vee g)(s)=\max(f(s), g(s)), (f\wedge g)(s)=\min(f(s), g(s)), |f|(s)=|f(s)|.$$

由前面的定理可知, 存在某个多项式序列$\{P_n\}$使得

$$\text{当} \quad -n\leqq t\leqq n \text{ 时}, \ ||t|-P_n(t)|<1/n.$$

于是当$-n\leqq f(s)\leqq n$时, $||f(s)|-P_n(f(s))|<1/n$. 利用(iii), 于是就证明了当$f\in B$时有$|f|\in B$, 这是因为任何一个函数$f(s)\in B\subseteq C(X)$在紧空间X上都是有界的. 因此, 根据

$$f\vee g=\frac{f+g}{2}+\frac{|f-g|}{2} \text{ 和 } f\wedge g=\frac{f+g}{2}-\frac{|f-g|}{2},$$

我们可以看出, B在格运算$\vee$和$\wedge$之下是封闭的,

设 $h\in C(X)$ 而 $s_1, s_2\in X$ 是任意给定的，且 $s_1\neq s_2$. 于是我们能够找到某个 $f_{s_1s_2}\in B$ 使得 $f_{s_1s_2}(s_1)=h(s_1)$ 而 $f_{s_1s_2}(s_2)=h(s_2)$. 为了看出这一事实，设 $g\in B$ 且 $g(s_1)\neq g(s_2)$，再选取实数 α 和 β 使得 $f_{s_1s_2}=\alpha g+\beta$ 满足条件: $f_{s_1s_2}(s_1)=h(s_1)$ 和 $f_{s_1s_2}(s_2)=h(s_2)$.

给定 $\varepsilon>0$ 以及一个点 $t\in X$. 于是对每个 $s\in X$, 总存在 s 的某个邻域 $U(s)$ 使得，当 $u\in U(s)$ 时有 $f_{st}(u)>h(u)-\varepsilon$. 设 $U(s_1), U(s_2), \cdots, U(s_n)$ 覆盖紧空间 X. 又令

$$f_t=f_{s_1t}\vee\cdots\vee f_{s_nt}.$$

于是 $f_t\in B$ 且对所有的 $u\in X$ 均有 $f_t(u)>h(u)-\varepsilon$. 由于 $f_{s_jt}(t)=h(t)$, 所以我们有 $f_t(t)=h(t)$. 因此，存在 t 的一个邻域 $V(t)$ 使得当 $u\in V(t)$ 时有 $f_t(u)<h(u)+\varepsilon$. 设 $V(t_1), V(t_2), \cdots, V(t_k)$ 覆盖紧空间 X. 又令

$$f=f_{t_1}\wedge\cdots\wedge f_{t_k}.$$

于是 $f\in B$ 且对所有的 $u\in X$ 均有 $f(u)>h(u)-\varepsilon$, 这是因为对所有的 $u\in X$ 均有 $f_{t_j}(u)>h(u)-\varepsilon$. 此外，对任一点 $u\in X$, 譬如说 $u\in V(t_i)$, 均有 $f(u)\leqq f_{t_i}(u)<h(u)+\varepsilon$.

所以我们就证明了在 X 上，$|f(u)-h(u)|<\varepsilon$.

我们也就顺带地证明了以下两个系.

系 1 (Kakutani-Krein) 设 X 是一个紧空间而 $C(X)$ 是 X 上的实值连续函数的全体. 设 $C(X)$ 的某子集 B 满足条件: (i) 如果 $f, g\in B$, 则 $f\vee g, f\wedge g$ 以及关于实系数 α, β 的线性组合 $\alpha f+\beta g$ 均属于 B, (ii) 常数函数 1 属于 B 以及 (iii) B 的任何函数序列 $\{f_n\}$ 的一致极限 f_∞ 也属于 B. 这时，$B=C(X)$, 当且仅当 B 可分离 X 的点.

系 2 设 X 是一个紧空间而 $C(X)$ 是 X 上的复值连续函数的全体. 设 $C(X)$ 的某子集 B 满足条件: (i) 如果 $f, g\in B$, 则函数乘积 $f\cdot g$ 以及关于复系数 α, β 的线性组合 $\alpha f+\beta g$ 均属于 B, (ii) 常数函数 1 属于 B 以及 (iii) B 的任何函数序列 $\{f_n\}$ 的一致极限 f_∞ 也属于 B. 这时，$B=C(X)$, 当且仅当 B 满足条件: (iv) B 可分离 X 的点以及 (v) 如果 $f(s)\in B$, 则它的共轭复函数 $\bar{f}(s)$ 也属于 B.

Weierstrass 三角逼近定理 设 X 是 R^2 内的单位圆的圆周. 它在通常的拓扑下是一个紧空间，而定义在 X 上的复值连续函数可以表示为以 2π 为周期的连续函数 $f(x)$, $-\infty<x<\infty$. 在上面的系 2 中，如果我们把 B 取为一切可以用三角函数

$$e^{inx}\quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

关于复系数的线性组合表示的函数以及一切可以用这种线性组合的一致极限表示的函数所组成的集合，于是我们就得到了 Weierstrass 三角逼近定理: 任何一个以 2π 为周期的复值连续函数 $f(x)$ 都可以用形如 $\sum_n c_n e^{inx}$ 的一个三角多项式序列一致地逼近.

完备性

度量空间 X 中的某元素序列 $\{x_n\}$ 收敛于极限点 $x\in X$, 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x)=0$. 从三角不等式 $d(x_n, x_m)\leqq d(x_n, x)+d(x, x_m)$, 我们看出，$X$ 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 收敛条件:

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0. \tag{1}$$

定义 度量空间X中的任何满足上述条件(1)的序列$\{x_n\}$都叫做Cauchy序列. 如果度量空间X中的每一个Cauchy序列都收敛于一个极限点$\in X$, 则X叫做完备空间.

由三角不等式容易看出, $\{x_n\}$的极限点如果存在, 则必是唯一确定的.

定义 设M是拓扑空间X的一个子集. 如果闭包M^a不含有X的非空开集, 则称M在X内是稀疏的. 如果$M^a=X$, 则称M在X内是稠密的. 如果M可以表示为X中可数个稀疏集的并集, 则称M是第一纲的集合. 否则, 称M是第二纲的集合.

Baire 的纲论

Baire-Hausdorff 定理 一个非空的完备度量空间是第二纲的.

证明 设$\{M_n\}$是闭集所组成的一个序列, 它的并集是一个完备度量空间X. 假若没有M_n含有非空开集, 则我们就会导出矛盾. 这时, M_1^c是开集且$M_1^{ca}=X$, 因此M_1^c含有某个闭球$S_1=\{x; d(x_1, x)\leq r_1\}$, 它的球心$x_1$可以取得任意靠近$X$的任何一点. 我们可以假定$0<r_1<1/2$. 由同样的讨论可知, 开集$M_2^c$含有这样的闭球$S_2=\{x; d(x_2, x)\leq r_2\}$, 它含于$S_1$内且$0<r_2<1/2^2$. 重复同样的推理, 我们就得到一系列闭球$S_n=\{x; d(x_n, x)\leq r_n\}$, 且序列$\{S_n\}$具有性质:

$$0<r_n<1/2^n, \quad S_{n+1}\subseteq S_n, \quad S_n\cap M_n=\varnothing \quad (n=1, 2, \cdots).$$

其球心序列$\{x_n\}$形成一个Cauchy序列, 这是因为对任何$n<m$都有$x_m\in S_n$, 从而$d(x_n, x_m)\leq r_n<1/2^n$. 设$x_\infty\in X$是序列$\{x_n\}$的极限点. X的完备性保证了此极限点x_∞的存在性. 由于当$m\to\infty$时, $d(x_n, x_\infty)\leq d(x_n, x_m)+d(x_m, x_\infty)\leq r_n+d(x_m, x_\infty)\longrightarrow r_n$, 于是我们看出, 对每个$n$均有$x_\infty\in S_n$. 因此, x_∞不在任何一个集合M_n之内, 从而x_∞不在并集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n=X$之内, 这同$x_\infty\in X$矛盾.

Baire 定理 1 设M是紧拓扑空间X中的一个第一纲集. 则补集$M^c=X-M$在X中是稠密的.

证明 我们要证明对于任何一个非空开集G, M^c都要同G相交. 设$M=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, 其中每个$M_n$都是稀疏的闭集. 因为$M_1=M_1^a$是稀疏集, 所以开集$M_1^c$必与$G$相交. 因为$X$是一个紧空间, 从而是正则空间, 因此存在某个非空开集G_1使得$G_1^a\subseteq G\cap M_1^c$. 类似地, 我们可以选取某个非空开集$G_2$使得$G_2^a\subseteq G_1\cap M_2^c$. 重复这一过程, 我们就得到了一个非空开集序列$\{G_n\}$使得

$$G_{n+1}^a\subseteq G_n\cap M_{n+1}^c \quad (n=1, 2, \cdots).$$

由于闭集序列$\{G_n^a\}$对n是单调的, 所以它具有有限交性质. 因为X是紧的, 所以存在某个$x\in X$使得$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n^a$. 由于$x\in G_1^a$意味着$x\in G$, 再由于$x\in G_{n+1}^a\subseteq G_n\cap M_{n+1}^c$ $(n=0, 1, 2, \cdots; G_0=G)$, 因此我们可以得到$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n^c=M^c$. 所以我们就证明了$G\cap M^c$是非空的.

Baire 定理 2 设$\{x_n(t)\}$是一个定义在拓扑空间X上的实值连续函数的序列. 假定在X的每一点 t 都存在有限极限:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x(t).$$

则函数 x 的不连续点所成的集合是一个第一纲集.

证明 对于X的任何集合M, 我们用M^i 表示所有含于M内的开集的并集; M^i 就叫做M的**内部**.

令$P_m(\varepsilon)=\{t\in X; |x(t)-x_m(t)|\leqq\varepsilon, \varepsilon>0\}, G(\varepsilon)=\bigcup_{m=1}^{\infty} P^i_m(\varepsilon)$. 于是我们可以证明$C=\bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$同 $x(t)$的所有连续点组成的集合重合. 假定$x(t)$在 $t=t_0$点是连续的. 我们将要证明 $t_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$. 因为$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$, 所以存在某个 m 使得$|x(t_0)-x_m(t_0)|\leqq\varepsilon/3$. 由$x(t)$和$x_m(t)$在 $t=t_0$ 点的连续性可知, 存在某个开集 $U_{t_0}\ni t_0$ 使得, 当 $t\in U_{t_0}$时, $|x(t)-x(t_0)|\leqq\varepsilon/3$, $|x_m(t)-x_m(t_0)|\leqq\varepsilon/3$. 于是由 $t\in U_{t_0}$可得

$$|x(t)-x_m(t)|\leqq|x(t)-x(t_0)|+|x(t_0)-x_m(t_0)|+|x_m(t_0)-x_m(t)|<\varepsilon,$$

这表明 $t_0\in P^i_m(\varepsilon)$, 从而 $t_0\in G(\varepsilon)$. 因为 $\varepsilon>0$ 是任意的, 所以必定有 $t_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$.

反之, 设 $t_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$. 于是对任意的 $\varepsilon>0$, 有 $t_0\in G(\varepsilon/3)$, 从而存在某个 m 使得 $t_0\in P^i_m(\varepsilon/3)$. 因此存在某个开集$U_{t_0}\ni t_0$ 使得, 当 $t\in U_{t_0}$时, $|x(t)-x_m(t)|\leqq\varepsilon/3$. 于是由$x_m(t)$的连续性和 $\varepsilon>0$ 的任意性可知, $x(t)$必在 $t=t_0$ 点连续.

在作了这些准备工作之后, 我们令

$$F_m(\varepsilon)=\{t\in X; |x_m(t)-x_{m+k}(t)|\leqq\varepsilon\ \ (k=1, 2, \cdots)\}.$$

由$x_n(t)$的连续性可知, 它是一个闭集. 由于$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$, 所以有$X=\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon)$. 由$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$还可得出$F_m(\varepsilon)\subseteqq P_m(\varepsilon)$. 因此, $F^i_m(\varepsilon)\subseteqq P^i_m(\varepsilon)$, 从而$\bigcup_{m=1}^{\infty} F^i_m(\varepsilon)\subseteqq G(\varepsilon)$. 另一方面, 对于任何闭集$F$, $(F-F^i)$是一个稀疏闭集. 于是 $X-\bigcup_{m=1}^{\infty} F^i_m(\varepsilon)=\bigcup_{m=1}^{\infty}(F_m(\varepsilon)-F^i_m(\varepsilon))$ 是一个第一纲集. 因而它的子集 $G(\varepsilon)^C=X-G(\varepsilon)$也是一个第一纲集. 所以函数 $x(t)$的一切不连续点所成的集合是一个第一纲集, 因为它可表为$X-\bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)=\bigcup_{n=1}^{\infty} G(1/n)^C$.

定理 完备度量空间X的某子集M是相对紧的, 当且仅当M在这种意义下是**完全有界的**: 对于每个 $\varepsilon>0$, M中都存在有限个点 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 使得M的每个点m到 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的距离至

少有一个小于 ε. 换句话说, M 是完全有界的, 如果对于每个 $\varepsilon>0$, M 都可以被有限个其球心 $\in M$ 而半径 $<\varepsilon$ 的球所覆盖.

证明 假定 M 不是完全有界的. 于是存在一个正数 ε 以及由 M 的点组成的无限序列 $\{m_n\}$ 使得, 当 $i\neq j$ 时, 有 $d(m_i, m_j)\geqq\varepsilon$. 这时, 如果我们用半径 $<\varepsilon$ 的开球系覆盖紧集 M^a, 则此开球系没有能覆盖 M^a 的有限子系. 这是因为, 这种子系不可能覆盖无限子集 $\{m_n\}\subseteq M\subseteq M^a$. 因此, X 的相对紧子集必定是完全有界的.

反之, 假定 M 是完备度量空间 X 的一个子集且是完全有界的. 于是闭包 M^a 是完备的, 并且它同 M 一样也是完全有界的. 我们需证 M^a 是紧集. 为此目的, 我们先来证明, M^a 的任何一个无限序列 $\{p_n\}$ 总含有收敛于 M^a 的点的子序列 $\{p_{(n)'}\}$. 由 M 的完全有界性可知, 对任何一个 $\varepsilon>0$, 总存在某个点 $q_\varepsilon\in M^a$ 以及 $\{p_n\}$ 的某个子序列 $\{p_{n'}\}$ 使得, 当 $n=1, 2, \cdots$ 时, 有 $d(p_{n'}, q_\varepsilon)<\varepsilon/2$; 因此, 当 $n, m=1, 2, \cdots$ 时, 有 $d(p_{n'}, p_{m'})\leqq d(p_{n'}, q_\varepsilon)+d(q_\varepsilon, p_{m'})<\varepsilon$. 我们令 $\varepsilon=1$ 并作出该序列 $\{p_{n'}\}$, 然后根据同前面一样的考虑, 对于序列 $\{p_{n'}\}$, 令 $\varepsilon=1/2$. 于是我们得到 $\{p_{n'}\}$ 的一个子序列 $\{p_{n''}\}$ 使得有

$$d(p_{n'}, p_{m'})<1, \quad d(p_{n''}, p_{m''})<1/2 \quad (n, m=1, 2, \cdots).$$

重复此过程, 我们就得到序列 $\{p_{n^{(k)}}\}$ 的一个子序列 $\{p_{n^{(k+1)}}\}$ 使得

$$d(p_{n^{(k+1)}}, p_{m^{(k+1)}})<1/2^k \quad (n, m=1, 2, \cdots).$$

因此, 由原序列 $\{p_n\}$ 按对角线方法选出的子序列 $\{p_{(n)'}\}$:

$$p_{(n)'}=p_{n^{(n)}}$$

必定满足 $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(p_{(n)'}, p_{(m)'})=0$. 于是由 M^a 的完备性可知, 必定存在一点 $p\in M^a$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}d(p_{(n)'}, p)=0$.

下面我们要证明集合 M^a 是紧的. 我们指出, 存在 X 的某些开集 F 组成的一个可数族 $\{F\}$ 使得, 当 U 是 X 的任一开集而 $x\in U\cap M^a$ 时, 则存在某个集合 $F\in\{F\}$, 对于它, 有 $x\in F\subseteq U$. 这个事实可以证明如下. 因为 M^a 是完全有界的, 所以对任何一个 $\varepsilon>0$, M^a 都可以被半径为 ε 而球心 $\in M$ 的有限个开球组成的系所覆盖. 令 $\varepsilon=1, 1/2, 1/3, \cdots$ 并把相应的那些有限开球系汇总成一个可数族, 于是我们就得到了所需要的开集族 $\{F\}$.

现在设 $\{U\}$ 是 M^a 的任何一个开覆盖. 令 $\{F^*\}$ 是族 $\{F\}$ 按下述方式确定的子族: $F\in\{F^*\}$, 当且仅当 $F\in\{F\}$ 且存在某个 $U\in\{U\}$ 使得 $F\subseteq U$. 根据 $\{F\}$ 的性质以及 $\{U\}$ 覆盖了 M^a 这一事实, 我们看出, 该可数开集族 $\{F^*\}$ 覆盖了 M^a. 现在设 $\{U^*\}$ 是从 $\{U\}$ 这样得到的一个子族, 即对于每个 $F\in\{F^*\}$, 我们在 $\{U\}$ 中只选取一个使 $F\subseteq U$ 成立的 U. 于是 $\{U^*\}$ 是一个覆盖了 M^a 的可数开集族. 我们需要证明 $\{U^*\}$ 的某个有限子族能覆盖 M^a. 把 $\{U^*\}$ 中的集合赋予足标后, 记为 $U_1, U_2, \cdots$. 假定对于每个 n, 有限并集 $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j$ 都不能覆盖 M^a. 于是存在点 $x_n\in\left(M^a-\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k\right)$. 由前面已证明过的事实可知, 序列 $\{x_n\}$ 含有子序列 $\{x_{(n)'}\}$, 它收敛于 M^a 的某一点, 譬如说 x_∞. 因此, 对于某个足标 N, 有 $x_\infty\in U_N$, 从而对于无穷多个数值 n, 有 $x_n\in U_N$, 特别地, 对于某一个 $n>N$, 有

$x_n \in U_N$. 这与选出的 x_n 要遵从 $x_n \in \left(M^a - \bigcup_{k=1}^{n} U_k\right)$ 这一事实相矛盾。于是我们就证明了 M^a 是紧集.

§3. 测度空间

测　度

定义　设 S 是一个集合. 如果 S 的某子集族 $\mathfrak{B}$ 满足

$$S \in \mathfrak{B} \tag{1}$$

$$B \in \mathfrak{B} \text{ 就有 } B^a = (S - B) \in \mathfrak{B}, \tag{2}$$

$$B_j \in \mathfrak{B} (j = 1, 2, \cdots) \text{就有} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathfrak{B} \quad (\sigma\text{-可加性}) \tag{3}$$

则把 $(S, \mathfrak{B})$ 叫做 S 的那些属于 $\mathfrak{B}$ 的子集所成的 σ-环或 σ-可加族. $(S, \mathfrak{B}, m)$ 叫做一个测度空间, 如果 m 是定义在 $\mathfrak{B}$ 上的一个非负且 σ-可加的测度:

$$\text{对每一个 } B \in \mathfrak{B} \text{ 都有 } m(B) \geqq 0, \tag{4}$$

对 $\mathfrak{B}$ 的集合组成的任何不相交的序列 $\{B_j\}$ 都有

$$m\left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j) \qquad (m\text{的可数可加性或}m\text{的 }\sigma\text{-可加性}), \tag{5}$$

S 可以表示为可数个集合 $B_j \in \mathfrak{B}$ 的并集, 而这里

$$m(B_j) < \infty \quad (j = 1, 2, \cdots) \qquad (\text{测度空间}(S, \mathfrak{B}, m)\text{的 }\sigma\text{-有限性}). \tag{6}$$

此数值 $m(B)$ 叫做集合 B 的 m-测度.

可 测 函 数

定义　设 $x(s)$ 是定义在 S 上的一个实(或复)值函数. 如果它满足下述条件:

$$\text{对于实轴 } R^1 \text{ (或复平面 } C^1\text{) 上的任何开集 } G, \text{ 集合}\{s; x(s) \in G\}\text{都属于 } \mathfrak{B}, \tag{7}$$

则称 $x(s)$ 是 $\mathfrak{B}$-可测的, 或简称为可测的. 这里, 允许 $x(s)$ 取值 ∞.

定义　与 S 的点 s 有关的某性质 P 叫做 m-几乎处处成立或简称为 m-a. e. 成立, 如果除去某些点 s 外, P 在 S 上处处成立, 而那些例外的点 s 所组成的集合 $\in \mathfrak{B}$ 且其 m-测度为 0.

一个 m-a. e. 定义在 S 上且满足条件(7)的实(或复)值函数 $x(s)$ 就叫做 m-a. e. 定义在 S 上的 $\mathfrak{B}$-可测函数或简称为 $\mathfrak{B}$-可测函数.

Egorov 定理　设 B 是一个 $\mathfrak{B}$-可测集且 $m(B) < \infty$. 又如果在 B 上 m-a. e. 有限的 $\mathfrak{B}$-可测函数组成的序列 $\{f_n(s)\}$ 在 B 上 m-a. e. 收敛于某个有限的 $\mathfrak{B}$-可测函数 $f(s)$, 则对于每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 B 的一个子集 E 使得, $m(B - E) \leqq \varepsilon$ 且在 E 上 $f_n(s)$ 一致收敛于 $f(s)$.

证明　如果需要的话, 就从 B 中挖去一个 m-测度为 0 的集合, 于是我们总可以假定在 B 上

函数 $f_n(s)$ 都是处处有限的且它们在 B 上收敛于 $f(s)$.

集合 $B_n=\bigcap_{k=n+1}^{\infty}\{s\in B;\ |f(s)-f_k(s)|<\varepsilon\}$ 是 $\mathfrak{B}$-可测的且当 $n<k$ 时, $B_n\subseteq B_k$. 因为在 B 上 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(s)=f(s)$, 所以我们有 $B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. 因此, 根据测度 m 的 σ-可加性, 我们有

$$\begin{aligned}m(B)&=m\{B_1+(B_2-B_1)+(B_3-B_2)+\cdots\}=m(B_1)+m(B_2-B_1)+m(B_3-B_2)+\cdots\\&=m(B_1)+(m(B_2)-m(B_1))+(m(B_3)-m(B_2))+\cdots=\lim_{n\to\infty}m(B_n).\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}m(B-B_n)=0$, 所以, 从某个充分大的 k_0 起, 就有 $m(B-B_k)<\eta$, 这里的 η 是一个任意给定的正数.

因此, 对任何一个正整数 k, 总存在某个满足 $m(C_k)\leqq\varepsilon/2^k$ 的集合 $C_k\subseteq B$ 以及某个指标 N_k 使得

当 $n>N_k$ 和 $s\in B-C_k$ 时, 有 $|f(s)-f_n(s)|<1/2^k$.

如果我们令 $E=B-\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}C_k$, 那么我们就可以断定

$$m(B-E)\leqq\sum_{k=1}^{\infty}m(C_k)\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon/2^k=\varepsilon$$

以及序列 $\{f_n(s)\}$ 在 E 上是一致收敛的.

积　分

定义　设 $x(s)$ 是定义在 S 上的实(或复)值函数. 如果 $x(s)$ 在有限个, 譬如说 n 个, 不相交的 $\mathfrak{B}$-可测集 B_j 的每一个上都等于非零的有限常数而在 $S-\bigcup\limits_{j=1}^{n}B_j$ 上等于 0, 则称函数 $x(s)$ 是**有限值的**. 我们把 $x(s)$ 在 B_j 上的值记为 x_j. 如果 $\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|m(B_j)<\infty$, 则称 $x(s)$ 在 S 上是 **m-可积的**或简称为**可积的**, 并把数值 $\sum\limits_{j=1}^{n}x_jm(B_j)$ 定义为 $x(s)$ 在 S 上关于测度 m 的**积分**; 此积分记为 $\int_S x(s)m(ds)$, 在预料到不致于发生混淆的情况下, 还可以把它简记为 $\int_S x(s)$ 或更简略地记为 $\int x(s)$. 一个 m-a. e. 定义在 S 上的实(或复)值函数 $x(s)$ 叫做在 S 上是 **m-可积的**或简称为**可积的**, 如果存在一个有限值可积函数的序列 $\{x_n(s)\}$, 它 m-a. e. 收敛于 $x(s)$ 且满足

$$\lim_{n,\,k\to\infty}\int_S|x_n(s)-x_k(s)|m(ds)=0.$$

上式表明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_S x_n(s)m(ds)$ 存在且为有限值, 还说明了此极限值不依赖于近似序列 $\{x_n(s)\}$ 的选

择. 我们把$\lim_{n\to\infty}\int_S x_n(s)m(ds)$定义为$x(s)$在$S$上关于测度$m$的积分$\int_S x(s)m(ds)$的值. 有时,我们也把符号$\int_S x(s)m(ds)$简记为$\int x(s)m(ds)$或$\int x(s)$.

积分的性质

i) 如果$x(s)$和$y(s)$都是可积的,则$\alpha x(s)+\beta y(s)$也是可积的且$\int_S(\alpha x(s)+\beta y(s))m(ds)=\alpha\int_S x(s)m(ds)+\beta\int_S y(s)m(ds)$.

ii) $x(s)$是可积的,当且仅当$|x(s)|$是可积的.

iii) 如果$x(s)$是可积的且 a. e. 有$x(s)\geqq 0$, 则$\int_S x(s)m(ds)\geqq 0$, 而当且仅当 a. e. 有$x(s)=0$时,等号才成立.

iv) 如果$x(s)$是可积的,则函数$X(B)=\int_B x(s)m(ds)$是σ-可加的,亦即对属于$\mathfrak{B}$的集合的任何一个不相交的序列$\{B_j\}$都有$X\left(\sum_{j=1}^{\infty}B_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}X(B_j)$. 这里,$\int_B x(s)m(ds)=\int_S C_B(s)x(s)m(ds)$,而$C_B(s)$是集合$B$的**特征函数**,亦即

当$s\in B$时,$C_B(s)=1$,而当$s\in S-B$时,$C_B(s)=0$.

v) 在iv)中的$X(B)$在这种意义下关于m是**绝对连续的**, 即由$m(B)=0$必导致$X(B)=0$. 这个条件等价于$\lim_{m(B)\to 0}X(B)=0$关于$B\in\mathfrak{B}$是一致成立的.

Lebesgue-Fatou 引理 设$\{x_n(s)\}$是一个实值可积函数序列. 如果存在某个实值可积函数$x(s)$使得对于$n=1, 2, \cdots$, 有$x(s)\geqq x_n(s)$a. e. 成立(或对于$n=1, 2, \cdots$, 有$x(s)\leqq x_n(s)$a. e. 成立), 则

$$\int_S\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n(s)\right)m(ds)\geqq\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_S x_n(s)m(ds)$$

$$\left(\text{或}\int_S\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n(s)\right)m(ds)\leqq\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_S x_n(s)m(ds)\right),$$

我们约定, 如果$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n(s)$(或$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n(s)$)是不可积的, 则理解为$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_S x_n(s)m(ds)=-\infty$ $\left(\text{或}\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_S x_n(s)m(ds)=\infty\right)$.

定义 设$(S, \mathfrak{B}, m)$和$(S', \mathfrak{B}', m')$是两个测度空间. 我们用$\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}'$表示$S\times S'$的子集的最小$\sigma$-环,它包含所有形如$B\times B'$的集合,其中,$B\in\mathfrak{B}, B'\in\mathfrak{B}'$. 可以证明,在$\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}'$上存在唯一确定的$\sigma$-有限且$\sigma$-可加的非负测度$m\times m'$使得

$$(m\times m')(B\times B')=m(B)m'(B').$$

$m\times m'$叫做m和m'的**乘积测度**. 我们可以定义$S\times S'$上的$\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}'$-可测函数$x(s, s')$以及$m\times m'$-可积函数$x(s, s')$. $m\times m'$-可积函数$x(s, s')$在$S\times S'$上的积分值记为

$$\iint_{S\times S'} x(s,s')(m\times m')(dsds')\text{或}\iint_{S\times S'} x(s,s')m(ds)m'(ds').$$

Fubini-Tonelli 定理 一个 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}'$-可测函数 $x(s,s')$ 在 $S\times S'$ 上是 $m\times m'$-可积的，当且仅当二次积分

$$\int_{S'}\left\{\int_S |x(s,s')|m(ds)\right\}m'(ds')\text{和}\int_S\left\{\int_{S'}|x(s,s')|m'(ds')\right\}m(ds)$$

之中，至少有一个是有限的；并且对于这种情形，我们还有

$$\iint_{S\times S'} x(s,s')m(ds)m'(ds')=\int_{S'}\left\{\int_S x(s,s')m(ds)\right\}m'(ds')$$

$$=\int_S\left\{\int_{S'}x(s,s')m'(ds')\right\}m(ds).$$

拓 扑 测 度

定义 设 S 是一个局部紧空间，例如，是一个 n 维欧几里得空间 R^n 或 R^n 的一个闭子集. S 的 Baire 子集是 S 的子集的这种最小 σ-环的一个元，该 σ-环含有每一个紧 G_δ-集，亦即 S 的这样的紧集，它是 S 的可数个开集的交集. S 的 Borel 子集是 S 的子集的这种最小 σ-环的一个元，该 σ-环含有 S 的每一个紧集.

如果 S 是欧几里得空间 R^n 的一个闭子集，则 S 的 Baire 子集和 Borel 子集是一致的，这是因为在 R^n 中的每个紧(有界闭)集都是 G_δ-集. 特别地，如果 S 是实轴 R^1 或 R^1 的一个闭区间，则 S 的 Baire(=Borel) 子集还可以定义为 S 的子集的这种最小 σ-环的元，该 σ-环含有所有半开区间 $(a,b]$.

定义 设 S 是一个局部紧空间. 这时，S 上的一个非负 Baire(Borel) 测度是一个定义在 S 的每个 Baire(Borel) 子集上的 σ-可加测度，且使得每个紧集的测度都是有限的. 设 m 是一个 Borel 测度. 如果对于每个 Borel 集 B 均有

$$m(B)=\inf_{U\supseteq B} m(U),$$

这里，下确界要遍取包含 B 的一切开集 U，则称此 Borel 测度 m 是正则的. 我们也可以用类似的方法来定义 Baire 测度的正则性，结果发现 Baire 测度总是正则的. 还可以证明每个 Baire 测度都可以唯一确定地扩张为一个正则的 Borel 测度. 因此，我们今后只讨论 Baire 测度.

定义 设 $f(s)$ 是定义在局部紧空间 S 上的一个复值函数. 如果对于复平面 C^1 内的每个 Baire 集 B，$f^{-1}(B)$ 都是 S 的一个 Baire 集，则 $f(s)$ 叫做 S 上的一个 Baire 函数. 如果 S 是可数个紧集的并集，则每个连续函数都是 Baire 函数. Baire 函数关于 S 的所有 Baire 集的 σ-环总是可测的.

Lebesgue 测 度

定义 假定 S 是实轴 R^1 或 R^1 的一个闭区间. 设 $F(x)$ 是 S 上的一个单调非减函数且它是

右连续的: $F(x)=\inf\limits_{x<y}F(y)$. 我们用$m((a,b])=F(b)-F(a)$来定义一个在此半闭区间$(a,b]$上的函数$m$. 此$m$可以唯一确定地扩张为$S$上的一个非负 Baire 测度. 当且仅当$F$是有界的, 该扩张后的测度是有限的, 即$m(S)<\infty$. 如果$m$是由函数$F(s)=s$导出的 Baire 测度, 则$m$叫做 Lebesgue 测度. R^n 中的 Lebesgue 测度可以用n个一维 Lebesgue 测度通过构造乘积测度的办法得出来.

关于 Lebesgue 测度和相应的 Lebesgue 积分, 我们有以下两个重要定理:

定理1 设M是R^n中的一个 Baire 集且它的 Lebesgue 测度$|M|$是有限的. 如果我们用$B\ominus C$表示集合B和C的对称差: $B\ominus C=B\cup C-B\cap C$, 则我们有

$$\lim_{|h|\to 0}|(M+h)\ominus M|=0, \text{其中}, M+h=\{x\in R^n; x=m+h, m\in M\}.$$

这里, $m+h=(m_1+h_1,\cdots,m_n+h_n)$, $m=(m_1,\cdots,m_n)$, $h=(h_1,\cdots,h_n)$, 而$|h|=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}h_j^2\right)^{1/2}$.

定理2 设G是R^n的一个开集. 对于G内的任何 Lebesgue 可积函数$f(x)$以及任何$\varepsilon>0$, 总存在一个在G内连续的函数$C_\varepsilon(x)$使得$\{x\in G; C_\varepsilon(x)\neq 0\}^a$是$G$的一个紧子集, 并且有

$$\int_G|f(x)-C_\varepsilon(x)|dx<\varepsilon.$$

注 设m是局部紧空间S上的一个 Baire 测度. S的某子集Z叫做m-测度为0的集合, 如果对于每个$\varepsilon>0$都存在一个包含Z的 Baire 集B, 而$m(B)<\varepsilon$. 我们可以把m扩张到m-可测集的族上去, 而一个m-可测集只与某个 Baire 集相差一个m-测度为0的集合. 只在一个m-测度为0的集合上不成立的任何性质都叫做m-几乎处处(m-a.e.)成立的性质. 我们也可以把可积性推广到与一个 Baire 函数m-a.e. 相等的函数上去.

§4. 线性空间

线性空间

定义 某集合X叫做在域K上的一个线性空间, 如果下列条件成立:

X是一个阿贝尔群(其代数运算记为加法), (1)

定义了一种数乘: 对于每个元素$x\in X$与每个$\alpha\in K$, 总对应着X的一个确定的元素, 记为αx, 使得有

$$\begin{cases}\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y & (\alpha\in K; x,y\in X),\\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x & (\alpha,\beta\in K; x\in X),\\ (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x) & (\alpha,\beta\in K; x\in X),\\ 1\cdot x=x & (1\text{是}K\text{的单位元素}).\end{cases} \tag{2}$$

今后, 我们只考虑在实数域R^1或复数域C^1上的线性空间. 我们根据系数域K是实数域R^1或复数域C^1而把相应的线性空间叫做实的或复的. 因此, 在后面各处我们讲到的线性空间都是

指实的或复的线性空间. 我们用希腊字母表示系数域的元素而用罗马字母表示X的元素. X的零(元素)(=关于加法的阿贝尔群X的单位元素)与实数的零将用同一个字母0来表示，因为这样做并不会引起麻烦，例如$0\cdot x=(\alpha-\alpha)x=\alpha x-\alpha x=0$. 关于加法的阿贝尔群的逆元素记为$-x$；容易看出$-x=(-1)x$.

定义 线性空间X的元素称为(X的)向量. X的向量$x_1, x_2, \cdots, x_n$叫做线性无关的，如果由$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j=0$必可推出$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=0$. 它们叫做线性相关的，如果该方程成立且至少有一个系数不为0. 如果X含有n个线性无关的向量，然而每$(n+1)$个向量都是线性相关的，则称X是n维的. 如果线性无关的向量的个数不是有限的，则X叫做无限维的. 在一个n维线性空间中，任何n个线性无关的向量所成的集合构成X的一个基底，而X的每一个向量x都可以由基底$y_1, y_2, \cdots, y_n$唯一地表示为$x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j$. 设$M$为线性空间$X$的一个子集，如果对任何$x, y\in M$，其线性组合$\alpha x+\beta y$都属于$M$，则$M$叫做线性子空间或简称为子空间. 因此，$M$是一个与$X$有相同的系数域的线性空间.

线性算子与线性泛函

定义 设X，Y是在同一个系数域K上的线性空间. 定义在X的线性子空间D上而取值在Y内的映射T：$x\to y=T(x)=Tx$叫做线性的，如果

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha(Tx_1)+\beta(Tx_2).$$

特别地，此定义能导出

$$T\cdot 0=0, \qquad T(-x)=-(Tx).$$

我们记

$$D=D(T), \{y\in Y; y=Tx, x\in D(T)\}=R(T), \quad \{x\in D(T); Tx=0\}=N(T)$$

并分别把它们叫做T的定义域、值域和零空间. T叫做$D(T)\subseteq X$上到Y内的线性算子或线性变换，或者，稍微笼统一点，就叫做由X到Y内的线性算子. 如果值域$R(T)$含于数域K内，则称T为$D(T)$上的线性泛函. 如果某个线性算子T给出了一个由$D(T)$到$R(T)$上的一一对应的映射，则逆映射T^{-1}给出了一个由$R(T)$到$D(T)$上的线性算子：

当$x\in D(T)$时，$T^{-1}Tx=x$，而当$y\in R(T)$时，$TT^{-1}y=y$.

T^{-1}是T的逆算子或简称为T之逆. 由于$T(x_1-x_2)=Tx_1-Tx_2$，所以我们有下面的

命题 线性算子T有逆算子T^{-1}，当且仅当由$Tx=0$必导致$x=0$.

定义 设T_1和T_2是线性算子，它们的定义域$D(T_1)$和$D(T_2)$都含于线性空间X内而值域$R(T_1)$和$R(T_2)$都含于线性空间Y内. 这时，欲有$T_1=T_2$，当且仅当$D(T_1)=D(T_2)$并且对于所有的$x\in D(T_1)=D(T_2)$都有$T_1x=T_2x$. 如果$D(T_1)\subseteq D(T_2)$且对所有的$x\in D(T_1)$都有$T_1x=T_2x$，则称T_2为T_1的一个扩张而称T_1为T_2的一个限制；这时我们记$T_1\subseteq T_2$.

约定 线性泛函T在点$x\in D(T)$的值$T(x)$，有时用$\langle x, T\rangle$来表示，即

$$T(x)=\langle x, T\rangle.$$

商 空 间

命题 设M是线性空间X中的一个线性子空间. 对于两个向量$x_1, x_2\in X$, 如果$(x_1-x_2)\in M$, 我们就说向量x_1和x_2关于模M是等价的, 并把这个事实记为$x_1\equiv x_2\ (\mathrm{mod}M)$. 这时, 我们有

(i) $x\equiv x(\mathrm{mod}M)$,

(ii) 如果$x_1\equiv x_2(\mathrm{mod}M)$, 则$x_2\equiv x_1(\mathrm{mod}M)$,

(iii) 如果$x_1\equiv x_2(\mathrm{mod}M)$且$x_2\equiv x_3(\mathrm{mod}M)$, 则$x_1\equiv x_3(\mathrm{mod}M)$.

证明 (i)是显然的, 因为$x-x=0\in M$. (ii)如果$(x_1-x_2)\in M$, 则$(x_2-x_1)=-(x_1-x_2)\in M$. (iii)如果$(x_1-x_2)\in M$且$(x_2-x_3)\in M$, 则$(x_1-x_3)=(x_1-x_2)+(x_2-x_3)\in M$. 我们把$X$中与固定向量$x$关于模$M$等价的一切向量所组成的集合记为$\xi_x$. 于是, 由性质(ii)和(iii)可知, ξ_x中所有的向量关于模M彼此都是等价的. ξ_x称为(模为M的)等价向量类, 而ξ_x中的每个向量都叫做类ξ_x的一个代表. 因此, 一个类由它的任何一个代表完全确定, 亦即$y\in\xi_x$意味着$\xi_y=\xi_x$. 所以两个类ξ_x和ξ_y, 或者不相交 (当$y\notin\xi_x$时), 或者重合(当$y\in\xi_x$时). 因此, 整个空间X可以分解为(关于模M)彼此等价的向量的类ξ_x.

定理 我们可以把上面引入的(模为M的)类看成是一个新的线性空间的向量, 这里, 类的加法运算和类同数的乘法定义为

$$\xi_x+\xi_y=\xi_{x+y}, \qquad \alpha\xi_x=\xi_{\alpha x}.$$

证明 上述定义并不依赖于类ξ_x和ξ_y各自的代表的选择. 事实上, 如果$(x_1-x)\in M$, $(y_1-y)\in M$, 则

$$(x_1-y_1)-(x+y)=(x_1-x)+(y_1-y)\in M,\ (\alpha x_1-\alpha x)=\alpha(x_1-x)\in M.$$

这样, 我们就证明了$\xi_{x_1+y_1}=\xi_{x+y}$和$\xi_{\alpha x_1}=\xi_{\alpha x}$, 并且证明了上面定义的关于类的加法和类同数的乘法是合理的.

定义 用这种方式得出来的线性空间称为X关于模M的商空间, 记为X/M.

参 考 文 献

拓扑空间: P. Alexandroff-H. Hopf[1], N. Bourbaki[1], J. L. Kelley[1].

测度空间: P. R. Halmos[1], S. Saks[1].

第一章 半 范 数

线性空间中的一个向量的半范数给出这个向量的一种长度. 为了在一个无限维的线性空间中引进一种拓扑使其适用于经典的和近代的分析，有时必须用到无穷多个半范数组成的一个系. Bourbaki 学派的贡献之一在于他们强调了通过满足分离公理的一个半范数系来定义的局部凸空间在泛函分析中的重要性. 如果半范数系退化成单独一个半范数，则相应的线性空间称为赋范线性空间. 如再设此空间关于这个半范数所定义的拓扑是完备的，则称它是一个 Banach 空间. 完备赋范线性空间的概念是由 S. Banach 和 N. Wiener 在 1922 年左右彼此独立地提出的. 本书中的拟范数作为范数的一种变种是由 M. Fréchet 提出的. 局部凸空间的一类特殊极限——归纳极限对于讨论广义函数或分布是有效的，这分布概念作为 S. L. Sobolev 推广的函数概念的系统发展乃是由 L. Schwartz 提出的.

§1. 半范数与局部凸线性拓扑空间

如上面叙言所述，半范数的概念在线性拓扑空间的讨论中有根本的重要性. 我们从半范数的定义开始.

定义 1 定义在线性空间 X 上的一个实值函数 $p(x)$，如果满足条件:

$$p(x+y)\leqq p(x)+p(y) \qquad (次可加性), \tag{1}$$

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x), \tag{2}$$

则称它是 X 上的一个半范数.

例 1 坐标为 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的点 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所构成的 n 维欧几里得空间 R^n 按运算:

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$

$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

成为一个 n 维线性空间. 在此情况下 $p(x)=\max\limits_{1\leq j\leq n}|x_j|$ 是一个半范数. 以后要证 $p(x)=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^q\right)^{1/q}$, 其中 $q\geqq 1$, 也是 R^n 上的一个半范数.

命题 1 半范数 $p(x)$满足

$$p(0)=0, \tag{3}$$

$$p(x_1-x_2)\geqq|p(x_1)-p(x_2)|, 特别地\ p(x)\geqq 0. \tag{4}$$

证明 $p(0)=p(0\cdot x)=0\cdot p(x)=0$. 由次可加性，得 $p(x_1-x_2)+p(x_2)\geqq p(x_1)$ 因此 $p(x_1-x_2)\geqq p(x_1)-p(x_2)$. 又 $p(x_1-x_2)=|-1|\cdot p(x_2-x_1)\geqq p(x_2)-p(x_1)$, 于是就得到(4)式.

命题 2 设 $p(x)$ 是 X 上的一个半范数，而 c 是任一正数. 则集合 $M=\{x\in X; p(x)\leqq c\}$ 具有下列性质:

$M\ni 0$, (5)

M 是凸的: 如 $x, y\in M$ 且 $0<\alpha<1$, 则必有 $\alpha x+(1-\alpha)y\in M$, (6)

M 是平衡的(在 Bourbaki 的术语中用 équilibré 一词): 如 $x\in M$ 且 $|\alpha|\leqq 1$ 则必有 $\alpha x\in M$, (7)

M 是吸收的: 对任何 $x\in X$, 总存在 $\alpha>0$ 使得 $\alpha^{-1}x\in M$, (8)

$p(x)=\inf\limits_{\alpha>0,\ \alpha^{-1}x\in M}\alpha c$ (inf = infimum = 最大下界). (9)

证明 由(3)显然有(5). 由(2)证出(7)与(8). 由次可加性(1)与(2)证出(6). 注意到如下的三个命题:

$$[\alpha^{-1}x\in M]\Longleftrightarrow[p(\alpha^{-1}x)\leqq c]\Longleftrightarrow[p(x)\leqq\alpha c]$$

的等价性就可证出(9).

定义 2 泛函

$$p_M(x)=\inf_{\alpha>0,\ \alpha^{-1}x\in M}\alpha \tag{9'}$$

称为 X 的平衡与吸收的凸集 M 的 Minkowski 泛函.

命题 3 设线性空间 X 的一族半范数 $\{p_\gamma(x); \gamma\in\Gamma\}$ 满足分离公理:

对任何 $x_0\neq 0$, 在族中总存在 $p_{\gamma_0}(x)$

使 $p_{\gamma_0}(x_0)\neq 0$ 成立. (10)

选取族中任一有限半范数系，譬如说 $p_{\gamma_1}(x)$, $p_{\gamma_2}(x)$, $\cdots$, $p_{\gamma_n}(x)$ 及 n 个任意正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 并设

$$U=\{x\in X; p_{\gamma_j}(x)\leqq\varepsilon_j\quad(j=1, 2, \cdots, n)\}. \tag{11}$$

U 是一个平衡与吸收的凸集. 把这样的集 U 作为 X 中向量 0 的一个邻域, 并用形如

$$x_0+U=\{y\in X; y=x_0+u, u\in U\} \tag{12}$$

的集合来定义任一向量 x_0 的邻域. 今考虑 X 的一个子集 G, 它含有它自身每个点的一个邻域. 那么这样的集合 G 的全体 $\{G\}$ 满足第 0 章, 预备知识, §2 给出的开集公理.

证明 首先指出形如 $G_0=\{x\in X; p_\gamma(x)<c\}$ 的集合 G_0 是开集. 因为如令 $x_0\in G_0$ 及 $p_\gamma(x_0)=\beta<c$. 则 x_0 的邻域 x_0+U 必包含在 G_0 内, 其中 $U=\{x\in X;\ p_\gamma(x)\leqq 2^{-1}(c-\beta)\}$, 这是因为由 $u\in U$ 必导致 $p_\gamma(x_0+u)\leqq p_\gamma(x_0)+p_\gamma(u)<\beta+(c-\beta)=c$.

所以, 对任何一点 $x_0\in X$, 必有一个包含 x_0 的开集 x_0+G_0. 由上述开集的定义, 显然, 任意个开集的并集以及有限个开集的交集都仍为开集.

因此, 我们只须证明 Hausdorff 分离公理:

如 $x_1\neq x_2$, 则存在不相交的开集 G_1 与 G_2 使得

$$x_1\in G_1,\qquad x_2\in G_2. \tag{13}$$

考虑到一般点 x_0 的邻域的定义(12)，只要对 $x_1=0, x_2\neq 0$ 的情况证出(13)就够了. 由(10)，我们能选出 $p_{\nu_2}(x)$ 使得 $p_{\nu_2}(x_2)=\alpha>0$. 这时，如上所证，$G_1=\left\{x\in X; p_{\nu_2}(x)<\frac{\alpha}{2}\right\}$ 是开集. 显然，$G_1\ni 0-x_1$. 我们必须证明 G_1 与 $G_2=x_2+G_1$ 无公共点. 设若不然，有一点 $y\in G_1\cap G_2$. 由 $y\in G_2$ 必导致 $y=x_2+g=x_2-(-g)$ 对某个 $g\in G_1$ 成立，从而由(4)得 $p_{\nu_2}(y)\geqq p_{\nu_2}(x_2)-p_{\nu_2}(-g)\geqq \alpha-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$，这是因为 $-g$ 与 g 一样是属于 G_1 的. 这与由 $y\in G_1$ 导致的不等式 $p_{\nu_2}(y)<\alpha/2$ 相矛盾.

命题 4 按上面开集的定义，X 成为一个线性拓扑空间，即是说，X 是线性空间同时又是一个拓扑空间，它使得两个映射 $X\times X\to X$: $(x,y)\to x+y$ 及 $K\times X\to X$: $(\alpha,x)\to\alpha x$ 都是连续的. 此外，每个半范数 $p_\nu(x)$ 在 X 上也是连续的.

证明 因为半范数是次可加的，故对 0 的任一邻域 U，总存在 0 的某个邻域 V 使得

$$V+V=\{w\in X; w=v_1+v_2, \text{ 其中 } v_1, v_2\in V\}\subseteqq U$$

所以，当记

$$(x+y)-(x_0+y_0)=(x-x_0)+(y-y_0)$$

时，我们看出映射 $(x,y)\to x+y$ 在 $x=x_0, y=y_0$ 是连续的. 对 0 的任一邻域 U 及任一数 $\alpha\neq 0$，集合 $\alpha U=\{x\in X; x=\alpha u, u\in U\}$ 也是 0 的一个邻域. 于是，当记

$$\alpha x-\alpha_0 x_0=\alpha(x-x_0)+(\alpha-\alpha_0)x_0$$

时，由(2)知 $(\alpha,x)\to\alpha x$ 在 $\alpha=\alpha_0, x=x_0$ 处连续.

由 $|p_\nu(x)-p_\nu(x_0)|\leqq p_\nu(x-x_0)$ 就能证明半范数 $p_\nu(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的连续性.

定义 3 如果线性拓扑空间 X 的任一含有 0 的开集都包含一个平衡和吸收的凸开集，则称 X 是一个局部凸线性拓扑空间或简称一个局部凸空间.

命题 5 线性空间 X 的平衡与吸收凸子集 M 的 Minkowski 泛函 $p_M(x)$ 是 X 上的一个半范数.

证明 由于包含关系

$$x/(p_M(x)+\varepsilon)\in M,\ y/(p_M(y)+\varepsilon)\in M$$

对任何 $\varepsilon>0$ 成立，于是由 M 的凸性可知

$$\frac{p_M(x)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon}\cdot\frac{x}{p_M(x)+\varepsilon}+\frac{p_M(x)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon}\cdot\frac{y}{p_M(x)+\varepsilon}\in M,$$

从而有 $p_M(x+y)\leqq p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon$. 因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以我们得到 $p_M(x)$ 的次可加性. 类似地，因为 M 是平衡的，所以我们得到 $p_M(\alpha x)=|\alpha|p_M(x)$.

这样我们就证明了

定理 被一族满足分离公理(10)的半范数如上面那样拓扑化的线性空间 X 必是一个局部凸空间且在此空间中每个半范数 $P_\nu(x)$ 都是连续的. 反之，任何一个局部凸空间也正好是如上面那样通过半范数族拓扑化的一个线性拓扑空间，而该半范数族乃是由 X 的诸平衡与吸收的凸开集的 Minkowski 泛函所组成的.

定义 4 设 $f(x)$ 是定义在 R^n 的一个开集 Ω 内的一个复值函数. 所谓 f 的支集，记作 supp(f)，

是指包含着集合$\{x\in\Omega; f(x)\neq 0\}$的(拓扑空间$\Omega$的)最小闭集. 它可以等价地定义为$\Omega$的最小闭集在其外$f$恒为零.

定义 5 我们用$C^k(\Omega)$, $0\leqq k<\infty$, 表示定义在Ω内且具有直到并包括k阶(如$k=\infty$, 则具有各阶$<\infty$)连续偏导数的全体复值函数所组成的集合. 用$C_0^k(\Omega)$表示属于$C^k(\Omega)$具有紧支集的全体函数所组成的集合, 亦即那些其支集是Ω的紧子集且属于$C^k(\Omega)$的函数所组成的集合. 属于$C_0^k(\Omega)$的函数的一个典型例子是

$$\begin{cases} f(x)=\exp((|x|^2-1)^{-1}) \\ \quad 当 |x|=|(x_1, x_2, \cdots, x_n)|=\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}<1 时, \\ =0 \quad 当 |x|\geqq 1 时. \end{cases} \tag{14}$$

空 间 $\mathfrak{E}^k(\Omega)$

$C^k(\Omega)$在运算

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x), \quad (\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

下成为一个线性空间. 对于Ω的任一紧子集K和任一非负整数$m\leqq k$(当$k=\infty$时, $m<\infty$), 我们定义半范数

$$p_{K,m}(f)=\sup_{|s|\leq m, x\in K}|D^s f(x)|, \qquad f\in C^k(\Omega),$$

其中 sup=supremum=最小上界而

$$D^s f(x)=\frac{\partial^{s_1+s_2+\cdots+s_n}}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\cdots\partial x_n^{s_n}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$|s|=|(s_1, s_2, \cdots, s_n)|=\sum_{j=1}^{n} s_j.$$

于是$C^k(\Omega)$在这族半范数下成为一个局部凸空间. 记这个局部凸空间为$\mathfrak{E}^k(\Omega)$. 在这个空间$\mathfrak{E}^k(\Omega)$中, 收敛$\lim\limits_{h\to\infty} f_h=f$就是在$\Omega$的每一个紧子集$K$上, 对每一个$s$, $|s|\leqq k$(当$k=\infty$时, $|s|<\infty$), 收敛$\lim\limits_{h\to\infty} D^s f_h(x)=D^s f(x)$一致地成立. 我们常把$\mathfrak{E}^\infty(\Omega)$写为$\mathfrak{E}(\Omega)$.

命题 6 $\mathfrak{E}^k(\Omega)$是一个度量空间.

证明 设$K_1\subseteq K_2\subseteq\cdots\subseteq K_n\subseteq\cdots$是使得$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$成立的$\Omega$的紧子集所组成的一个单调增加序列. 对每个正整数$h$, 定义距离

$$d_h(f, g)=\sum_{m=0}^{k} 2^{-m} p_{K_h, m}(f-g)(1+p_{K_h, m}(f-g))^{-1}.$$

则在$\mathfrak{E}^k(\Omega)$中的收敛$\lim\limits_{s\to\infty} f_s=f$由距离

$$d(f, g)=\sum_{h=1}^{\infty} 2^{-h} d_h(f, g)(1+d_h(f, g))^{-1}$$

来定义. 我们必须证明 $d_h(f,g)$ 及 $d(f,g)$ 满足三角不等式. 对于 $d_h(f,g)$ 的三角不等式证明如下: 由半范数 $p_{K_h,m}(f)$ 的次可加性, 容易看出 $d_h(f,g)$ 满足三角不等式 $d_h(f,g)\leqq d_h(f,k)+d_h(k,g)$, 这只要我们能证明不等式

$$|\alpha\cdot\beta|\cdot(1+|\alpha-\beta|)^{-1}\leqq|\alpha-\gamma|(1+|\alpha-\gamma|)^{-1}+|\gamma-\beta|(1+|\gamma-\beta|)^{-1}$$

对复数 α,β 及 γ 成立就行了, 而这个不等式显然可以由对任何一组非负数 α,β 及 γ 均成立的不等式:

$$(\alpha+\beta)(1+\alpha+\beta)^{-1}\leqq\alpha(1+\alpha)^{-1}+\beta(1+\beta)^{-1}$$

来推出. 对于 $d(f,g)$ 的三角不等式可以类似地证明.

定义 6 设 X 是一个线性空间. 又设 $\{X_\alpha\}$ 是 X 的线性子空间 X_α 所组成的一个族且使得 X 是诸 X_α 的并集. 假设每个 X_α 是一个局部凸的拓扑线性空间且使得当 $X_{\alpha_1}\subseteq X_{\alpha_2}$ 时, X_{α_1} 的拓扑与 X_{α_1} 作为 X_{α_2} 的子集的相对拓扑是一致的. 我们把 X 的每个平衡与吸收的凸集 U 称作"开"的, 当且仅当对一切的 X_α 而言, 交集 $U\cap X_\alpha$ 都是包含 X_α 的零向量的 X_α 的某个开集. 如果 X 是一个局部凸拓扑线性空间, 而其拓扑是用上述方法确定的, 则 X 称作诸 X_α 的(严格)**归纳极限**.

注 从每个 X_α 中, 都选取 X_α 中 0 的一个平衡的凸邻域 U_α, 则并集 $V=\bigcup_\alpha U_\alpha$ 的**凸包** U, 即

$$U=\Big\{u\in X;\quad u=\sum_{j=1}^{n}\beta_jv_j,\ \ v_j\in V,\beta_j\geqq 0\ \ (j=1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j=1,\ \text{其中 } n \text{ 是任意有限数}\Big\}$$

必定满足条件: U 是平衡与吸收的凸集, 并且对所有的 X_α 而言, $U\cap X_\alpha$ 均是 X_α 中 0 的一个平衡凸邻域. 由任意选取 U_α 而得出的所有这种 U 构成诸 X_α 的(严格)归纳极限 X 的 0 的一个**基本邻域系**, 即诸 X_α 的(严格)归纳极限 X 的 0 的每一个邻域都含有上述的一个 U. 这个事实表明上述(严格)归纳极限的定义是合理的.

空 间 $\mathfrak{D}(\Omega)$

$C_0^\infty(\Omega)$ 在运算

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

下成为一个线性空间. 对于 Ω 的任意紧子集 K, 设 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 是使得 $\mathrm{supp}(f)\subseteq K$ 内的所有函数 $f\in C_0^\infty(\Omega)$ 组成的集合. 在 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 上用

$$p_{K,m}(f)=\sup_{|s|\leq m,\,x\in K}|D^sf(x)|,\ \text{其中 } m<\infty,$$

定义一半范数族. 于是, $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 成为一个局部凸拓扑线性空间, 且当 $K_1\subseteq K_2$ 时, $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 的拓扑与 $\mathfrak{D}_{K_1}(\Omega)$ 作为 $\mathfrak{D}_{K_2}(\Omega)$ 的一个子集的相对拓扑是恒同的. 于是诸 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ (这里 K 取遍 Ω 的所有紧子集)的(严格)归纳极限是一个局部凸线性拓扑空间. 用这样的方法把 $C_0^\infty(\Omega)$ 拓扑化后便记为 $\mathfrak{D}(\Omega)$. 应该注意:

$$p(f)=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

是确定$\mathfrak{D}(\Omega)$的拓扑的诸半范数之一. 因为, 如果令$U=\{f\in C_0^\infty(\Omega);p(f)\leqq 1\}$, 则交集$U\cap\mathfrak{D}_K(\Omega)$由$U_K=\{f\in\mathfrak{D}_K(\Omega);p_K(f)=\sup_{x\in K}|f(x)|\leqq 1\}$给出.

命题 7 在$\mathfrak{D}(\Omega)$内的收敛$\lim_{h\to\infty}f_h=0$意味着满足如下两个条件: (i)存在Ω的某个紧子集K使得$\mathrm{supp}(f_h)\subseteqq K\ (h=1,2,\cdots)$, 以及(ii)对任意的微分算子$D^s$, 序列$\{D^sf_h(x)\}$在$K$上都一致收敛于0.

证明 我们只须证明(i). 假若相反, 则存在属于Ω的一个点序列$\{x^{(k)}\}$, 它在Ω内没有聚点以及$\{f_h(x)\}$的一个子序列$\{f_{h_j}(x)\}$使得$f_{h_j}(x^{(j)})\neq 0$. 这时半范数

$$\begin{cases}p(f)=\sum_{k=1}^{\infty}2\sup_{x\in K_k-K_{k-1}}|f(x)/f_{h_k}x^{(k)}|,\text{其中}\ \Omega\\ \text{的诸紧子集}\ K_j\ \text{所组成的单调增序列满足}\\ \text{条件}\ \bigcup_{j=1}^{\infty}K_j=\Omega\ \text{以及}\ x^{(k)}\in K_k-K_{k-1}(k=\\ 1,2,\cdots),K_0=\varnothing\end{cases}$$

确定了$\mathfrak{D}(\Omega)$的0的一个邻域$U=\{f\in C_0^\infty(\Omega);p(f)\leqq 1\}$. 然而诸$f_{h_k}$中没有一个含于$U$内.

系 在$\mathfrak{D}(\Omega)$内的收敛$\lim_{h\to\infty}f_h=f$意味着满足如下两个条件: (i)存在Ω的某个紧子集K使得$\mathrm{supp}(f_h)\subseteqq K\ (h=1,2,\cdots)$, 以及(ii)对任意的微分算子$D^s$, 序列$D^sf_h(x)$在$K$上都一致收敛于$D^sf(x)$.

命题 8 (一个逼近定理) 任意一个连续函数$f\in C_0^0(R^n)$在R^n上都可用$C_0^\infty(\Omega)$中的函数来一致逼近.

证明 设$\theta_1(x)$是(14)中引入的函数, 且令$\theta_a(x)=h_a^{-1}\theta_1(x/a)$, 这里$a>0$及$h_0>0$是使得

$$\int_{R^n}\theta_a(x)dx=1 \tag{15}$$

满足的常数.

于是我们定义f的正则化f_a:

$$f_a(x)=\int_{R^n}f(x-y)\theta_a(y)dy=\int_{R^n}f(y)\theta_a(x-y)dy, \tag{16}$$

其中

$$x-y=(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n).$$

因为f和θ_a都具有紧支集, 所以积分是收敛的. 此外, 因为

$$f_a(x)=\int_{\mathrm{supp}(f)}f(y)\theta_a(x-y)dy,$$

所以, 当取$a>0$充分小时, f_a的支集能取在$\mathrm{supp}(f)$的任一邻域内. 其次, 在积分号下求导数有

$$D^sf_a(x)=D_x^sf_a(x)=\int_{R^n}f(y)D_x^s\theta_a(x-y)dy, \tag{17}$$

从而 f_a 在 $C_0^\infty(R^n)$ 内. 最后由 $\int_{R^n}\theta_a(x-y)dy=1$, 有

$$|f_a(x)-f(x)|\leqq\int_{R^n}|f(y)-f(x)|\theta_a(x-y)dy\leqq\int_{|f(y)-f(x)|\leq\varepsilon}|f(y)-f(x)|\theta_a(x-y)dy$$
$$+\int_{|f(y)-f(x)|>\varepsilon}|f(y)-f(x)|\theta_a(x-y)dy.$$

右边第一项是 $\leq\varepsilon$ 的; 而右边第二项, 对于充分小的 $a>0$, 等于 0, 这是因为, 由具紧支集的函数 f 的一致连续性, 存在某个 $a>0$ 使得从 $|f(y)-f(x)|>\varepsilon$ 必导致 $|y-x|>a$. 这样我们就证明了命题.

§2. 范数和拟范数

定义 1 一个局部凸空间称作赋范线性空间, 如果其拓扑只由一个半范数所确定.

因此一个线性空间称作赋范线性空间, 如果对每个 $x\in X$, 总能赋予一个实数 $\|x\|$, 称为向量 x 的范数, 它满足

$$\|x\|\geqq 0 \text{ 并且当且仅当 } x=0 \text{ 时 } \|x\|=0, \tag{1}$$

$$\|x+y\|\leqq\|x\|+\|y\| \text{(三角不等式)}, \tag{2}$$

$$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|. \tag{3}$$

因此赋范线性空间 X 的拓扑可用距离

$$d(x, y)=\|x-y\| \tag{4}$$

来定义. 事实上, $d(x, y)$ 满足距离公理:

$d(x, y)\geqq 0$ 并且当且仅当 $x=y$ 时 $d(x, y)=0$,

$d(x, y)\leqq d(x, z)+d(z, y)$ (三角不等式),

$d(x, y)=d(y, x)$.

这是因为由 (1), (2), (3) 及 (4) 有 $d(x, y)=\|x-y\|=\|y-x\|=d(y, x)$ 及 $d(x, y)=\|x-y\|=\|x-z+z-y\|\leqq\|x-z\|+\|z-y\|=d(x, z)+d(z, y)$.

在一个赋范线性空间 X 中的收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n, x)=0$ 记作 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 或简单地记作 $x_n\to x$, 并且说序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x. 引进形容词"强"字是为了与后面要引进的"弱"收敛相区别.

命题 1 在赋范线性空间 X 中, 我们有

$$\text{如果 } s\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x \text{ 则 } \lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|, \tag{5}$$

$$\text{如果 } \lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha \text{ 且 } s\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x \text{ 则 } s\text{-}\lim_{n\to\infty}\alpha_n x_n=\alpha x, \tag{6}$$

$$\text{如果 } s\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x \text{ 且 } s\text{-}\lim_{n\to\infty}y_n=y \text{ 则 } s\text{-}\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+y. \tag{7}$$

证明 X 既是只由一个半范数 $p(x)=\|x\|$ 来拓扑化的局部凸空间, (5), (6)及(7)就都已经证明了. 然而, 我们将给出如下的一个直接证明. 作为一个半范数, 我们有

$$\|x-y\|\geqq|\|x\|-\|y\||\tag{8}$$

于是 (5) 显然成立. 由 $\|(x+y)-(x_n+y_n)\|=\|(x-x_n)+(y-y_n)\|\leqq\|x-x_n\|+\|y-y_n\|$ 可证出

(7). 从$\|\alpha x-\alpha_n x_n\| \leqq \|\alpha x-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha_n x_n\| \leqq |\alpha-\alpha_n|\cdot\|x\|+|\alpha_n|\cdot\|x-x_n\|$及序列$\{\alpha_n\}$的有界性, 我们得出(6).

定义 2 一个线性空间X称作拟赋范线性空间，如果对于每个$x\in X$，都能赋予一个实数$\|x\|$——向量x的拟范数, 它满足(1), (2)以及

$$\|-x\|=\|x\|,\ \lim_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0 \text{ 及 } \lim_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0. \tag{3'}$$

命题 2 在拟赋范线性空间X中, 有(5), (6)及(7)成立.

证明 我们仅需证明(6). 从上述命题的证明看出我们必须证明

$$\text{由}\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=0\text{ 必导致 }\lim_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=0\text{ 在 }\alpha\text{ 的任一有界集上对 }\alpha\text{ 一致成立.} \tag{9}$$

(9)的下述证明是 S. Kakutani 给出的 (未发表). 考虑定义在用绝对值作其范数的实线性空间R^1上的泛函$p_n(\alpha)=\|\alpha x_n\|$. 据$p_n(\alpha)$的三角不等式以及(3′)，得$p_n(\alpha)$在$R^1$上是连续的. 于是由(3′)所导致的$\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)=0$以及 Egorov 定理(第 0 章预备知识, § 3. 测度空间)，我们得到在实轴R^1上必有一个 Baire 可测集A具有以下性质:

$$A\text{ 的 Lebesgue 测度 }|A|>0\text{ 且 }\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)=0\text{ 在 }A\text{ 上一致成立.} \tag{10}$$

因为在实轴上集合的 Lebesgue 测度对于集合的平移是连续的，所以当把对称差$B\cup C-B\cap C$记为$B\ominus C$时，我们有

$$\text{当 }\sigma\to 0\text{ 时, }|(A+\sigma)\ominus A|\to 0\text{ 成立.}$$

因此必定存在一个正数σ_0使得

$$|\sigma|\leqq\sigma_0\text{ 必导致 }|(A+\sigma)\ominus A|<|A|/2\text{ 成立,}$$

$$\text{特别地有 }|(A+\sigma)\cap A|>0.$$

于是, 对于满足$|\sigma|\leqq\sigma_0$的任意实数σ, 有表示式

$$\sigma=\alpha-\alpha' \qquad \text{其中 }\alpha\in A, \alpha'\in A.$$

所以, 根据$p_n(\sigma)=p_n(\alpha-\alpha')\leqq p_n(\alpha)+p_n(\alpha')$得出

$$\text{当 }|\sigma|\leqq\sigma_0\text{ 时, }\lim_{n\to\infty}p_n(\sigma)=0\text{ 在 }\sigma\text{ 内一致成立.}$$

令M是任一正数, 今取正整数$k\geqq M/\sigma_0$并记住$p_n(k\sigma)\leqq kp_n(\sigma)$, 则知对于$|\alpha|\leqq M$, (9)为真.

注 上面的证明可以很自然地加以修改, 使其对复的拟赋范线性空间X同样适用.

同在赋范线性空间的情况一样，在一个拟赋范线性空间中，收敛$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|=0$记为$s\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x$, 或简记为$x_n\to x$; 并称序列$\{x_n\}$强收敛于$x$.

例 设局部凸空间X的拓扑是用可数个半范数$p_n(x)(n=1, 2, \cdots)$确定的, 则X按拟范数

$$\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}p_n(x)(1+p_n(x))^{-1}$$

成为一个拟赋范线性空间. 这是因为收敛$\lim_{k\to\infty}p_n(x_k)=0(n=1, 2, \cdots)$与按上述拟范数$\|x\|$的收敛

$s\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} x_h=0$ 等价.

§3. 赋范线性空间的例

例 1 $C(S)$. 令 S 是一个拓扑空间. 今考虑定义在 S 上的全体实值（或复值）有界连续函数的集合 $C(S)$. $C(S)$ 在运算

$$(x+y)(s)=x(s)+y(s),\quad (\alpha x)(s)=\alpha x(s),\quad \|x\|=\sup_{s\in S}|x(s)|$$

下成为一个赋范线性空间. 在 $C(S)$ 中, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ 指的是函数 $x_n(s)$ 一致收敛于 $x(s)$.

例 2 $L^p(S,\mathfrak{B},m)$, 或简记为 $L^p(S)$ $(1\leqq p<\infty)$. 设 $L^p(S)$ 是全体实值(或复值) $\mathfrak{B}$-可测函数 $x(s)$ 的集合, 其中 $x(s)$ 是在 S 上 m-a. e. 定义的, 且 $|x(s)|^p$ 在 S 上是 m-可积的. $L^p(S)$ 在运算

$$(x+y)(s)=x(s)+y(s),\quad (\alpha x)(s)=\alpha x(s)$$

下成为一个线性空间. 这是因为由不等式 $|x(s)+y(s)|^p\leqq 2^p(|x(s)|^p+|y(s)|^p)$ 可知只要 $x(s)$ 及 $y(s)$ 均属于 $L^p(S)$, 则 $(x(s)+y(s))$ 就属于 $L^p(S)$. 在 $L^p(S)$ 中, 我们用

$$\|x\|=\left(\int_S |x(s)|^p m(ds)\right)^{1/p} \tag{1}$$

定义范数. 这范数的次可加性, 即所谓 Minkowski 不等式.

$$\left(\int_S |x(s)+y(s)|^p m(ds)\right)^{1/p}\leqq\left(\int_S |x(s)|^p m(ds)\right)^{1/p} +\left(\int_S |y(s)|^p m(ds)\right)^{1/p}, \tag{2}$$

对 $p=1$ 的情形显然成立. 为了证明一般情形 $1<p<\infty$, 需要

引理 1 设 $1<p<\infty$, 再设 p 的共轭指数 p' 是由

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \tag{3}$$

确定的. 则对任何一对非负数 a 及 b, 均有

$$ab\leqq\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}, \tag{4}$$

上式中当且仅当 $a=b^{1/(p-1)}$ 时, 等号成立.

证明 对 $c\geqq 0$, 函数 $f(c)=\dfrac{c^p}{p}+\dfrac{1}{p'}-c$ 的极小值只在 $c=1$ 时取得, 且其极小值为 0. 取 $c=ab^{1/(1-p)}$, 知引理为真.

(2)的证明 我们首先证明 Hölder 不等式

$$\int|x(s)y(s)|\leqq\left(\int|x(s)|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\int|y(s)|^{p'}\right)^{1/p'} \tag{5}$$

(为方便计, 我们把 $\int_S z(s)m(ds)$ 写成 $\int z(s)$).

为此目的, 我们假设 $A=\left(\int|x(s)|^p\right)^{1/p}$ 与 $B=\left(\int|y(s)|^{p'}\right)^{1/p'}$ 都 $\neq 0$, 因为不然的话 $x(s)y(s)$

$=0$ a.e. 成立，从而(5)就能成立．今在(4)中取 $a=|x(s)|/A$，$b=|y(s)|/B$ 并两边积分，我们得到

$$\frac{\int|x(s)y(s)|}{AB}\leqq\frac{1}{p}\frac{A^p}{A^p}+\frac{1}{p'}\frac{B^{p'}}{B^{p'}}=1,\text{ 它导致(5)成立.}$$

其次由(5)式，有

$$\begin{aligned}\int|x(s)+y(s)|^p&\leqq\int|x(s)+y(s)|^{p-1}\cdot|x(s)|+\int|x(s)+y(s)|^{p-1}\cdot|y(s)|\\&\leqq\left(\int|x(s)+y(s)|^{p'(p-1)}\right)^{1/p'}\left(\int|x(s)|^p\right)^{1/p}\\&\quad+\left(\int(|x(s)+y(s)|^{p'(p-1)}\right)^{1/p'}\left(\int|y(s)|^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

根据 $p'(p-1)=p$，就证明了(2)．

注 1　在(2)中等号成立当且仅当存在一个非负常数 c 使得 $x(s)=cy(s)\,m$-a.e. 成立(或 $y(s)=cx(s)\,m$-a.e. 成立)．这是由下面的事实导致的，即根据引理 1，Hölder 不等式中的等号成立当且仅当 $x(s)y(s)\geqq0$ 以及 $|x(s)|=c|y(s)|^{1/(p-1)}$(或 $|y(s)|=c\cdot|x(s)|^{1/(p-1)}$)都 m-a.e. 成立．

注 2　条件 $\|x\|=\left(\int|x(s)|^p\right)^{1/p}=0$ 与条件 $x(s)=0\,m$-a.e. 是等价的．因此如果 $L^p(S)$ 中的两个函数 m-a.e. 相等，我们就把它们当作相等的函数．按照这种约定，$L^p(S)$ 成为一个赋范线性空间，$L^p(S)$ 中的极限关系 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 有时称作函数 $x_n(s)$ 的序列**p 阶平均收敛**于函数 $x(s)$．

例 3　$L^\infty(S)$．一个定义在 S 上的 $\mathfrak{B}$-可测函数 $x(s)$ 称作**本质有界的**，如果存在常数 α 使得 $|x(s)|\leqq\alpha\ m$-a.e. 成立．这样的 α 的下确界记作

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|\quad\text{或}\quad\text{essential}\sup_{s\in S}|x(s)|.$$

$L^\infty(S,\mathfrak{B},m)$，或简记为 $L^\infty(S)$，是全体 m-a.e. 定义在 S 上的 $\mathfrak{B}$-可测的，本质有界函数所成的集合．$L^\infty(S)$ 中的两个函数只要 m-a.e. 相等，就当作相等的函数，在此约定下，$L^\infty(S)$ 按

$$(x+y)(s)=x(s)+y(s),\quad(\alpha x)(s)=\alpha x(s),\quad\|x\|=\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|$$

成为一个赋范线性空间．

定理 1　设 S 的总测度 $m(S)$ 是有限的，则有

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_S|x(s)|^pm(ds)\right)^{1/p}=\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|\text{ 对 }x(s)\in L^\infty(S)\text{ 成立.}\tag{6}$$

证明　$\left(\int_S|x(s)|^pm(ds)\right)^{1/p}\leqq m(S)^{1/p}\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|$ 是显然的，于是 $\overline{\lim_{p\to\infty}}\left(\int_S|x(s)|^p\right)^{1/p}\leqq\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|$．由 vrai max 的定义，对任意 $\varepsilon>0$，都存在一个 m-测度 >0 的集合 B 在其每点处 $|x(s)|\geqq\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|-\varepsilon$ 成立．于是 $\left(\int_S|x(s)|^pm(ds)\right)^{1/p}\geqq m(B)^{1/p}(\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|-\varepsilon)$．

所以 $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\int_S |x(s)|^p m(ds)\right)^{1/p} \geqq \underset{s\in S}{\text{vrai max}}|x(s)|-\varepsilon$，因此(6)是正确的.

例 4 特别地，设 S 是由记为 $1, 2, \cdots$ 的可数个点组成的一个离散拓扑空间. 离散一词指的是 $S=\{1, 2, \cdots\}$ 的每个点都是 S 中的开集. 然后我们定义 (c_0)，(c) 以及 (l^p)，$1\leqq p<\infty$ 作为 $C(\{1, 2, \cdots\})$ 的线性子空间.

(c_0)：考虑实数或复数的一个有界序列 $\{\xi_n\}$. 这样的序列确定了一个定义在离散空间 $S=\{1, 2, \cdots\}$ 上的连续函数 $x(n)=\xi_n$；我们称 $x=\{\xi_n\}$ 为一个具有分量 ξ_n 的向量. 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$ 的全体向量 $x=\{\xi_n\}$ 组成的集合，按范数

$$\|x\|=\sup_n|x(n)|=\sup_n|\xi_n|$$

构成一个赋范线性空间 (c_0).

(c)：使得有限 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$ 存在的全体向量 $x=\{\xi_n\}$ 所成的集合，按范数 $\|x\|=\sup\limits_n|x(n)|=\sup\limits_n|\xi_n|$ 构成一个赋范线性空间 (c).

(l^p)，$1\leqq p<\infty$：满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<\infty$ 的全体向量 $x=\{\xi_n\}$ 所成的集合，按范数 $\|x\|=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}$ 构成一个赋范线性空间 (l^p). 作为一个抽象的线性空间，它是 $C(\{1, 2, \cdots\})$ 的一个线性子空间. 它也是 $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ 在 $m(\{1\})=m(\{2\})=\cdots=1$ 时的一个特殊情形.

$(l^\infty)-(m)$：同在 $L^\infty(S)$ 的情况一样，我们把赋以范数 $\|x\|=\sup\limits_n|x(n)|=\sup\limits_n|\xi_n|$ 的线性空间 $C(\{1, 2, \cdots\})$ 记为 (l^∞). 也可记作 (m).

测度的空间 设 $\mathfrak{B}$ 是 S 的子集所成的一个 σ-环，考虑全体实值(或复值)函数 $\varphi(B)$ 所成的集合 $A(S, \mathfrak{B})$，其中诸 $\varphi(B)$ 定义在 $\mathfrak{B}$ 上且满足

$$\text{对每个 } B\in\mathfrak{B} \text{ 有 } |\varphi(B)|\neq\infty, \tag{7}$$

$$\text{对 } \mathfrak{B} \text{ 中的任意不相交集合序列 } \{B_j\} \text{ 有 } \varphi\left(\sum_{j=1}^{\infty}B_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(B_j). \tag{8}$$

我们把 $A(S, \mathfrak{B})$ 叫做定义在 $(S, \mathfrak{B})$ 上的广义(或复的)测度的空间.

引理 2 设 $\varphi\in A(S, \mathfrak{B})$ 是实值的. 则用

$$V(\varphi; S)=\overline{V}(\varphi; S)+|\underline{V}(\varphi; S)| \tag{9}$$

定义的 φ 在 S 上的全变差是有限的；此处 φ 在 $B\in\mathfrak{B}$ 上的正变差和负变差分别由

$$\overline{V}(\varphi; B)=\sup_{B_1\subseteq B}\varphi(B_1) \quad \text{及} \quad \underline{V}(\varphi; B)=\inf_{B_1\subseteq B}\varphi(B_1) \tag{10}$$

给出.

证明 因 $\varphi(\varnothing)=0$，所以我们有 $\overline{V}(\varphi; B)\geqq 0\geqq\underline{V}(\varphi; B)$. 假定 $\overline{V}(\varphi; S)=\infty$. 则存在一个递减序列 $\{B_n\}$，其中 $B_n\in\mathfrak{B}$，使得

$$\overline{V}(\varphi; B_n)=\infty, \quad |\varphi(B_n)|\geqq n-1 \text{ 成立,}$$

其证明可由归纳法得到. 若取 $B_1=S$ 并设集合 $B_2, B_3, \cdots, B_k$ 已确定且满足归纳条件, 根据 $n=k$ 的第一个条件, 必存在一个集合 $B\in\mathfrak{B}$ 使得 $B\subseteq B_k$, $|\varphi(B)|\geqq|\varphi(B_k)|+k$. 我们只需在 $V(\varphi;B)=\infty$ 的情况下, 令 $B_{k+1}=B$ 而在 $V(\varphi;B)<\infty$ 的情况下, 令 $B_{k+1}=B_k-B$. 因为, 在后一种情况, 我们必有 $V(\varphi;B_k-B)=\infty$ 以及 $|\varphi(B_k-B)|\geqq|\varphi(B)|-|\varphi(B_k)|\geqq k$, 这就完成了归纳证明.

由序列 $\{B_n\}$ 的递减性质, 我们有

$$S-\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\sum_{n=1}^{\infty}(S-B_n)=(S-B_1)+(B_1-B_2)+(B_2-B_3)+\cdots+(B_n-B_{n+1})+\cdots$$

于是, 由 φ 的可数可加性, 得

$$\varphi\left(S-\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\varphi(S-B_1)+\varphi(B_1-B_2)+\varphi(B_2-B_3)+\cdots=[\varphi(S)-\varphi(B_1)]$$
$$+[\varphi(B_1)-\varphi(B_2)]+[\varphi(B_2)-\varphi(B_3)]+\cdots=\varphi(S)-\lim_{n\to\infty}\varphi(B_n)$$
$$=\infty \text{ 或 } -\infty,$$

这与(7)矛盾.

定理 2 (Jordan 分解) 设 $\varphi\in A(S,\mathfrak{B})$ 是实值的. 则正变差 $\overline{V}(\varphi;B)$, 负变差 $\underline{V}(\varphi;B)$ 以及全变差 $V(\varphi;B)$ 在 B 上均为可数可加的. 此外, 我们有 Jordan 分解

$$\varphi(B)=\overline{V}(\varphi;B)+\underline{V}(\varphi;B) \text{ 对任何 } B\in\mathfrak{B} \text{ 成立.} \tag{11}$$

证明 设 $\{B_n\}$ 是一序列属于 $\mathfrak{B}$ 的不相交集合. 则对任何满足 $B\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}B_n$ 的集合 $B\in\mathfrak{B}$, 我们有 $\varphi(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(B\cap B_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\overline{V}(\varphi;B_n)$, 因而有 $\overline{V}\left(\varphi;\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\overline{V}(\varphi;B_n)$. 另一方面, 如果 $C_n\in\mathfrak{B}$ 是 B_n $(n=1,2,\cdots)$ 的子集, 则有 $\overline{V}\left(\varphi;\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\geqq\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty}C_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(C_n)$, 从而 $\overline{V}\left(\varphi;\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\geqq\sum_{n=1}^{\infty}\overline{V}(\varphi;B_n)$. 于是我们就证明了 $\overline{V}(\varphi;B)$ 的可数可加性, 而 $\underline{V}(\varphi;B)$ 及 $V(\varphi;B)$ 的可数可加性可类似地证明.

为了建立起(11), 我们注意到对每个适合 $C\subseteq B$ 的集合 $C\in\mathfrak{B}$, 有 $\varphi(C)=\varphi(B)-\varphi(B-C)\leqq\varphi(B)-\underline{V}(\varphi;B)$, 从而 $\overline{V}(\varphi;B)\leqq\varphi(B)-\underline{V}(\varphi;B)$ 成立. 类似地得到 $\underline{V}(\varphi;B)\geqq\varphi(B)-\overline{V}(\varphi;B)$. 这些不等式联立给出(11).

定理 3 (Hahn 分解) 设 $\varphi\in A(S,\mathfrak{B})$ 是一个广义测度. 则存在一个集合 $P\in\mathfrak{B}$ 使得

对每个满足 $B\subseteq P$ 的 $B\in\mathfrak{B}$ 都有 $\varphi(B)\geqq 0$,

对每个满足 $B\subseteq P^C=S-P$ 的 $B\in\mathfrak{B}$ 都有 $\varphi(B)\leqq 0$.

分解 $S=P+(S-P)$ 称作 S 的附属于 φ 的 Hahn 分解.

证明 对于每个正整数 n, 我们选取一个集合 $B_n\in\mathfrak{B}$ 使 $\varphi(B_n)\geqq\overline{V}(\varphi;S)-2^{-n}$ 满足, 于是根据(11)得到

$$\underline{V}(\varphi;B_n)\geqq -2^{-n} \text{ 及 } \overline{V}(\varphi;S-B_n)\leqq 2^{-n}. \tag{12}$$

后一不等式是从 $\overline{V}(\varphi;S-B_n)=\overline{V}(\varphi;S)-\overline{V}(\varphi;B_n)$ 及 $\overline{V}(\varphi;B_n)\geqq\varphi(B_n)$ 得到的. 然后, 我们令

$$P=\underline{\lim}_{n\to\infty}B_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}B_n.$$

则 $S-P=\overline{\lim}_{n\to\infty}(S-B_n)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}(S-B_n)\subseteq\bigcup_{n=k}^{\infty}(S-B_n)$ 对每个 k 成立, 因而, 由 $\overline{V}(\varphi;B)$ 的 σ-可加性得到

$$\overline{V}(\varphi;S-P)\leqq\sum_{n=k}^{\infty}\overline{V}(\varphi;S-B_n)\leqq 2^{-(k-1)},$$

它给出了 $\overline{V}(\varphi;P)=0$. 另一方面, 负变差 $\underline{V}(\varphi;B)$ 是非正测度, 则由(12)式类似地有

$$|\underline{V}(\varphi;P)|\leqq\underline{\lim}_{n\to\infty}|\underline{V}(\varphi;B_n)|=0$$

它给出了 $\underline{V}(\varphi;P)=0$. 证明于是完成.

系 广义测度 φ 的全变差 $V(\varphi;S)$ 用

$$V(\varphi;S)=\sup_{\sup|x(s)|\leq 1}\left|\int_S x(s)\varphi(ds)\right| \tag{13}$$

定义, 其中 $x(s)$ 取遍定义在 S 上满足 $\sup_s|x(s)|\leqq 1$ 的 $\mathfrak{B}$-可测函数.

证明 如果我们按照 $s\in P$ 或 $s\in S-P$ 取 $x(s)=1$ 或 $=-1$, 则(13)式的右边就给出了 $V(\varphi;S)$, 另一方面, 容易看出

$$\left|\int_S x(s)\varphi(ds)\right|\leqq\sup_s|x(s)|\cdot\int_S V(\varphi;ds)=\sup_s|x(s)|\cdot V(\varphi;S)$$

于是(13)式得证.

例 5 $A(S,\mathfrak{B})$. $\mathfrak{B}$ 上的广义测度 φ 的空间 $A(S,\mathfrak{B})$ 在运算

$$(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(B)=\alpha_1\varphi_1(B)+\alpha_2\varphi_2(B),\quad B\in\mathfrak{B}$$

下成为一个实线性空间. 它按范数

$$\|\varphi\|=V(\varphi;S)=\sup_{\sup|x(s)|\leq 1}\left|\int_S x(s)\varphi(ds)\right| \tag{14}$$

成为一个赋范线性空间.

例 6 复测度 φ 的空间 $A(S,\mathfrak{B})$ 在运算

$$(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(B)=\alpha_1\varphi_1(B)+\alpha_2\varphi_2(B),\quad B\in\mathfrak{B}$$

下成为一个复线性空间, 其中 α_1,α_2 是复数. 它按范数

$$\|\varphi\|=\sup_{\sup|x(s)|\leq 1}\left|\int_S x(s)\varphi(ds)\right| \tag{15}$$

成为一个赋范线性空间. 要注意其中的 $x(s)$ 是定义在 S 上的复值 $\mathfrak{B}$-可测函数. 我们称(15)式右端的值为 φ 在 S 上的**全变差**并记为 $V(\varphi;S)$.

§4. 拟赋范线性空间的例

例 1 $\mathfrak{E}^k(\Omega)$. 在第一章§1中介绍的线性空间 $\mathfrak{E}^k(\Omega)$, 按拟范数 $\|x\|=d(x,0)$, 成为一个

拟赋范线性空间，其中 $d(x,y)$ 同那里的定义一样.

例 2 $M(S,\mathfrak{B},m)$. 设 $m(S)<\infty$，又设 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 是定义在 S 上的全体 $\mathfrak{B}$-可测复值函数 $x(s)$ 所成的集合且满足 $|x(s)|<\infty$ m-a.e.，则 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 按代数运算

$$(x+y)(s)=x(s)+y(s),\quad (\alpha x)(s)=\alpha x(s)$$

以及（按约定当且仅当 $x(s)=y(s)$ m-a.e. 时 $x=y$）

$$\|x\|=\int_S |x(s)|(1+|x(s)|)^{-1}m(ds) \tag{1}$$

成为一个拟赋范线性空间. 关于拟范数 $\|x\|$ 的三角不等式显然可从

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\leqq\frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|}\leqq\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}$$

得到. 由下列命题得映射 $\{\alpha,x\}\to\alpha x$ 是连续的.

命题 在 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 中的收敛 $s\text{-}\lim x_n=x$ 等价于 S 中函数序列 $\{x_n(s)\}$ 的**渐近收敛**（或**按测度收敛**）于 $x(s)$:

$$\text{对任何 } \varepsilon>0,\ \lim_{n\to\infty} m\{s\in S;\ |x(s)-x_n(s)|\geqq\varepsilon\}=0. \tag{2}$$

证明 由不等式

$$\frac{\delta}{1+\delta}m(B_\delta)\leqq\|x\|\leqq m(B_\delta)+\frac{\delta}{1+\delta}m(S-B_\delta),\ B_\delta=\{s\in S;\ |x(s)|\geqq\delta\}$$

显然得证.

注 容易看出 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 的拓扑也可以用拟范数

$$\|x\|=\inf_{\varepsilon>0}\tan^{-1}[\varepsilon+m\{s\in S;\ |x(s)|\geqq\varepsilon\}] \tag{1'}$$

来定义.

例 3 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. 第一章 §1 介绍的线性空间 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$，按拟范数 $\|x\|=d(x,0)$ 成为拟赋范线性空间. 其中距离 $d(x,y)$ 在第一章 §1 中已定义.

§ 5. Pre-Hilbert 空间

定义 1 一个实的或复的赋范线性空间 X 称为 **pre-Hilbert 空间**，如果它的范数满足条件

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{1}$$

定理 1 (M. Fréchet-J. von Neumann-P. Jordan) 在一个实的 pre-Hilbert 空间 X 中，定义

$$(x,y)=4^{-1}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2). \tag{2}$$

则有性质:

$$(\alpha x,y)=\alpha(x,y)\quad(\alpha\in R^1), \tag{3}$$

$$(x+y,z)=(x,z)+(y,z), \tag{4}$$

$$(x,y)=(y,x), \tag{5}$$

$$(x,x)=\|x\|^2. \tag{6}$$

证明 (5)和(6)是显然的. 从(1)与(2)有

$$(x, z)+(y, z)=4^{-1}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)$$
$$=2^{-1}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)=2\left(\frac{x+y}{2}, z\right). \tag{7}$$

如果取 $y=0$, 可得 $(x, z)=2\left(\frac{x}{2}, z\right)$, 这是因为由(2)有 $(0, z)=0$. 于是由(7)便得到(4). 因此(3)对形如 $\alpha=\frac{m}{2^n}$ 的实数 α 成立. 在赋范线性空间中, $\|\alpha x+y\|$ 及 $\|\alpha x-y\|$ 关于 α 是连续的, 所以, 由(2), $(\alpha x, y)$ 关于 α 是连续的. 因此得证(3)对每个实数 α 成立.

系(J. von Neumann-P. Jordan) 在一个复的 pre-Hilbert 空间 X 中, 定义

$$(x, y)=(x, y)_1+i(x, iy)_1$$

其中 $$i=\sqrt{-1},\quad (x, y)_1=4^{-1}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2). \tag{8}$$

则有(4), (6)及

$$(\alpha x, y)=\alpha(x, y)\ (\alpha\in C^1), \tag{3'}$$

$$(x, y)=\overline{(y, x)}\qquad (\text{共轭复数}). \tag{5'}$$

证明 X 也是一个实的 pre-Hilbert 空间, 因此(4)与(3′)对实 α 已成立. 由(8)有 $(x, y)_1=(y, x)_1$, $(ix, iy)_1=(x, y)_1$, 于是 $(y, ix)_1=(-iiy, ix)_1=-(iy, x)_1=-(x, iy)_1$. 所以

$$(y, x)=(y, x)_1+i(y, ix)_1=(x, y)_1-i(x, iy)_1=\overline{(x, y)}.$$

类似地有

$$(ix, y)=(ix, y)_1+i(ix, iy)_1=-(x, iy)_1+i(x, y)_1=i(x, y),$$

从而证明了(3′). 最后, 因为

$$(x, x)_1=\|x\|^2\ \text{及}\ (x, ix)_1=4^{-1}(|1+i|^2-|1-i|^2)\|x\|^2=0$$

所以(6)成立.

定理 2 一个(实的或)复的线性空间 X 是一个(实的或)复的 pre-Hilbert 空间, 如果对每一对元素 $x, y\in X$ 都相应地有一个(实或)复数 (x, y), 它满足(3′), (4), (5′)以及

$$(x, x)\geqq 0,\ \text{以及当且仅当}\ x=0\ \text{时},\ (x, x)=0. \tag{9}$$

证明 对任意实数 α, 由(3′), (4)和(5′), 有

$$(x+\alpha(x, y)y, x+\alpha(x, y)y)=\|x\|^2+2\alpha|(x, y)|^2+\alpha^2|(x, y)|^2\cdot\|y\|^2\geqq 0,$$

其中 $$\|x\|^2=(x, x)^{1/2}$$

所以我们有 $|(x, y)|^4-\|x\|^2|(x, y)|^2\|y\|^2\leqq 0$. 于是我们得到 Schwarz 不等式

$$|(x, y)|\leqq\|x\|\cdot\|y\|, \tag{10}$$

其中等号当且仅当 x 和 y 是线性相关时成立. 从(9)式的后一部分显然得到(10)式的后一部分.

由(10)得到关于范数 $\|x\|$ 的三角不等式:

$$\|x+y\|^2=(x+y, x+y)=\|x\|^2+(x, y)+(y, x)+\|y\|^2\leqq(\|x\|+\|y\|)^2.$$

最后, 等式(1)是容易验证的.

定义 2 上面引入的数 (x, y) 称作 pre-Hilbert 空间 X 的两个向量 x 和 y 的数量积(或

内积).

例 1 $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$是一个 pre-Hilbert 空间，在其中数量积由$(x, y)=\int x(s)\overline{y(s)}m(ds)$给出.

例 2 赋范线性空间(l^2)是一个 pre-Hilbert 空间，在其中数量积由$(\{\xi_n\},\{\eta_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\bar{\eta}_n$给出.

例 3 设Ω是R^n的一个开域及$0\leqq k<\infty$. 则合条件

$$\|f\|_k=\left(\sum_{|j|\leq k}\int_{\Omega}|D^j f(x)|^2 dx\right)^{1/2}<\infty, \tag{11}$$

其中$dx=dx_1\cdots dx_n$是R^n的Lebesgue 测度

的全体函数$f\in C^k(\Omega)$按数量积

$$(f,g)_k=\sum_{|j|\leq k}\int_{\Omega}D^j f(x)\cdot D^j\overline{g(x)}dx \tag{12}$$

构成一个 pre-Hilbert 空间$\hat{H}^k(\Omega)$.

例 4 设Ω是R^n的一个开域及$0\leqq k<\infty$. 则按数量积(12)和范数 (11) $C_0^k(\Omega)$成为一个 pre-Hilbert 空间，并记为$\hat{H}_0^k(\Omega)$.

例 5 设G是复z-平面上的一个有界开域. 又设$f(z)$是定义在G内并使得

$$\|f\|=\left(\iint_G|f(z)|^2 dxdy\right)^{1/2}<\infty, \quad (z=x+iy) \tag{13}$$

的全纯函数，$A^2(G)$是一切这样的全纯函数$f(z)$组成的集合. 则$A^2(G)$按范数(13)，数量积

$$(f, g)=\iint_G f(z)\overline{g(z)}dx\,dy \tag{14}$$

以及代数运算

$$(f+g)(z)=f(z)+g(z), \quad (\alpha f)(z)=\alpha f(z)$$

成为一个 pre-Hilbert 空间.

例 6 Hardy-Lebesgue 类H-L^2. 设$f(z)$是复z-平面上单位圆$\{z; |z|<1\}$内的全纯函数且满足

$$\sup_{0<r<1}\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta<\infty,\right. \tag{15}$$

而H-L^2是一切这样的$f(z)$所组成的集合. 如果$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$是$f$的 Taylor 展式，则

$$F(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{n,m=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}c_n\bar{c}_m r^{n+m}e^{i(n-m)\theta}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 r^{2n}$$

是随r, $0<r<1$，单调增加的且是上有界的. 因此容易看出

$$\|f\|=\sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta\right\}^{1/2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2} \tag{16}$$

是满足条件(1)的一个范数，这是因为(l^2)是一个 pre-Hilbert 空间.

注 设给定序列$\{c_n\}\in(l^2)$，并考虑

$$f(z)=f(re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^ne^{in\theta},\quad |z|<1.$$

根据 Schwarz 不等式，有

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}c_nz^n\right|\leq\left(\sum_{n=k}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=k}^{\infty}r^{2n}\right)^{1/2},$$

从而$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在任一个圆$|z|\leq\rho$内是一致收敛的，其中$0<\rho<1$. 于是$f(z)$是单位圆$|z|<1$内的一个全纯函数且使(15)式成立，即$f(z)$属于$H\text{-}L^2$类.

因而，我们已经证明了

定理 3 在 Hardy-Lebesgue 类$H\text{-}L^2$与 pre-Hilbert 空间(l^2)之间有如下一一对应：

$$H\text{-}L^2\ni f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\longleftrightarrow\{c_n\}\in(l^2),$$

且使得由

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\longleftrightarrow\{c_n\},\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nz^n\longleftrightarrow\{d_n\}$$

必导致

$$f(z)+g(z)\longleftrightarrow\{c_n+d_n\},\ \alpha f(z)\longleftrightarrow\{\alpha c_n\}\text{以及}\|f\|=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2}$$

于是，$H\text{-}L^2$作为一个 pre-Hilbert 空间与(l^2)是同构的.

§ 6. 线性算子的连续性

命题 1 设X和Y是同一个数域K上的线性拓扑空间. 这时，把$D(T)\subseteq X$映入Y内的线性算子T在$D(T)$上是处处连续的，当且仅当T在零向量$x=0$处是连续的.

证明 从算子T的线性性质和$T\cdot0=0$，这是显然的.

定理 1 设X, Y是局部凸空间，而$\{p\}$, $\{q\}$分别是确定X和Y的拓扑的半范数系，则把$D(T)\subseteq X$映入Y内的线性算子T是连续的，当且仅当对每一个半范数$q\in\{q\}$，总存在某个半范数$p\in\{p\}$及正数β使得

$$q(Tx)\leq\beta p(x)\ \text{对所有的}\ x\in D(T)\text{成立}. \tag{1}$$

证明 这个条件是充分的. 因为，按照$T\cdot0=0$，所述条件蕴含着T在点$x=0\in D(T)$处是连

续的，从而 T 在 $D(T)$ 上处处连续.

条件是必要的. T 在点 $x=0$ 处的连续性蕴含着对每一个半范数 $q\in\{q\}$ 和每一个正数 ε 总存在半范数 $p\in\{p\}$ 和正数 δ 使得

$$x\in D(T) \text{ 和 } p(x)\leqq\delta \text{ 时，必有 } q(Tx)\leqq\varepsilon.$$

设 x 是 $D(T)$ 的任一点，且取正数 λ 使得 $\lambda p(x)\leqq\delta$. 则我们有 $p(\lambda x)\leqq\delta$, $\lambda x\in D(T)$ 从而 $q(T(\lambda x))\leqq\varepsilon$. 于是 $q(Tx)\leqq\varepsilon/\lambda$. 因此，如果 $p(x)=0$，我们可取 λ 任意大，从而有 $q(Tx)=0$；而如果 $p(x)\neq 0$，我们可取 $\lambda=\delta/p(x)$，从而在任何情况下，都有 $q(Tx)\leqq\beta p(x)$，其中 $\beta=\varepsilon/\delta$.

系 1 设 X 是一个局部凸空间，f 是 $D(f)\subseteq X$ 上的一个线性泛函. 则 f 是连续的当且仅当在确定 X 的拓扑的半范数系 $\{p\}$ 中存在一个半范数 p 和一个正数 β 使得

$$|f(x)|\leqq\beta p(x) \text{ 对所有的 } x\in D(f) \text{ 成立.} \tag{2}$$

证明 因为绝对值 $|\alpha|$ 本身构成了确定实数或复数域的拓扑的一个半范数系.

系 2 设 X, Y 是两个赋范线性空间，则把 $D(T)\subseteq X$ 映入 Y 内的线性算子 T 是连续的当且仅当存在一个正常数 β 使得

$$\|Tx\|\leqq\beta\|x\| \text{ 对所有的 } x\in D(T) \text{ 满足.} \tag{3}$$

系 3 设 X, Y 都是赋范线性空间，则把 $D(T)\subseteq X$ 映入 Y 内的线性算子 T 具有连续的逆算子 T^{-1} 当且仅当存在一个正常数 γ 使得

$$\|Tx\|\geqq\gamma\|x\| \text{ 对所有的 } x\in D(T) \text{ 满足.} \tag{4}$$

证明 由(4)，$Tx=0$ 蕴涵 $x=0$，从而逆算子 T^{-1} 存在. 用(4)和上面的系 2 可以证明 T^{-1} 的连续性.

定义 1 设 T 是把赋范线性空间 X 映入赋范线性空间 Y 内的一个连续线性算子. 定义

$$\|T\|=\inf_{\beta\in B}\beta, \text{ 其中 } B=\{\beta;\ \|Tx\|\leqq\beta\|x\|, \text{ 对所有的 } x\in X\}. \tag{5}$$

由于上述系 2 和 T 的线性性质容易看出

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqq 1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|. \tag{6}$$

$\|T\|$ 称为 T 的**范数**. 一个把赋范线性空间 X 映入赋范线性空间 Y 的连续线性算子称为把 X 映入 Y 的**有界线性算子**，因为对于这样一个算子，当 x 取遍 X 的单位圆或单位球 $\{x\in X;\ \|x\|\leqq 1\}$ 时，范数 $\|Tx\|$ 是有界的.

定义 2 设 T 和 S 是线性算子并使得

$$D(T) \text{ 及 } D(S)\subseteq X \text{ 以及 } R(T) \text{ 及 } R(S)\subseteq Y.$$

则和 $T+S$ 与数乘 αT 分别由

$$(T+S)(x)=T(x)+S(x), \text{ 其中 } x\in D(T)\cap D(S),\ (\alpha T)(x)=\alpha(Tx)$$

来定义. 设 T 是把 $D(T)\subseteq X$ 映入 Y 内的一个线性算子，而 S 是把 $D(S)\subseteq Y$ 映入 Z 内的一个线性算子. 则**乘积** ST 由

$$(ST)x=S(Tx) \text{ 对于 } x\in\{x;\ x\in D(T) \text{ 和 } Tx\in D(S)\}$$

来定义. $T+S$, αT 和 ST 都是线性算子.

注 即令在 $X=Y=Z$ 时，ST 与 TS 都不一定一致．这样的一个例子是映 $L^2(R^1)$ 入 $L^2(R^1)$ 内的线性算子 $Tx=tx(t)$，$Sx(t)=\sqrt{-1}\frac{d}{dt}x(t)$，在这个例子中有交换关系 $(ST-TS)x(t)=\sqrt{-1}x(t)$．

命题 2 如果 T 和 S 是把赋范线性空间 X 映入赋范线性空间 Y 内的有界线性算子，则

$$\|S+T\|\leqq\|S\|+\|T\|,\quad \|\alpha T\|=|\alpha|\cdot\|T\|. \tag{7}$$

如果 T 是映赋范线性空间 X 入赋范线性空间 Y 内的有界线性算子，而 S 是映 Y 入赋范线性空间 Z 内的有界线性算子，则

$$\|ST\|\leqq\|S\|\cdot\|T\|. \tag{8}$$

证明 我们证明后一个不等式；(7)式可类似地证明．$\|STx\|\leqq\|S\|\cdot\|Tx\|\leqq\|S\|\cdot\|T\|\cdot\|x\|$．从而 $\|ST\|\leqq\|S\|\cdot\|T\|$．

系 如果 T 是把赋范线性空间 X 映入 X 内的有界线性算子，则

$$\|T^n\|\leqq\|T\|^n, \tag{9}$$

其中 T^n 由 $T^n=T\cdot T^{n-1}(n=1, 2, \cdots;\ T^0=I$，$I$ 把每一个 x 映到 x 自身，即 $Ix=x$，并称为恒等算子)用归纳法得出．

§7. 有界集和 0 邻域吸收空间①

定义 1 线性拓扑空间 X 中的一个子集 B 叫做是有界的如果它能被 0 的任一个邻域 U 所吸收，亦即，如果存在一个正常数 α 使得 $\alpha^{-1}B\subseteqq U$．这里 $\alpha^{-1}B=\{x\in X; x=\alpha^{-1}b, b\in B\}$．

命题 设 X，Y 均是线性拓扑空间．则把 X 映入 Y 内的一个连续线性算子必将 X 的每一个有界集映到 Y 的一个有界集上．

证明 设 B 是 X 的一个有界集，而 V 是 Y 中 0 点的一个邻域．根据 T 的连续性，存在 X 中 0 点的某个邻域 U 使得 $T\cdot U=\{Tu; u\in U\}\subseteqq V$．今设 $\alpha>0$ 使得 $B\subseteqq\alpha U$．则 $T\cdot B\subseteqq T(\alpha U)=\alpha(T\cdot U)\subseteqq\alpha V$．这就证明了 $T\cdot B$ 是 Y 的一个有界集．

定义 2 一个局部凸空间 X 叫做 0 邻域吸收空间如果它满足条件：

如果 X 的一个平衡的凸集 M 能吸收 X 的每一个有界集，则 M 是 X 的 0 的一个邻域． (1)

定理 1 一个局部凸空间 X 是 0 邻域吸收空间当且仅当每一个定义在 X 上的，在每一个有界集上为有界的半范数是连续的．

证明 首先注意：定义在 X 上的半范数 $p(x)$ 是连续的当且仅当它在 $x=0$ 处是连续的．这从半范数的次可加性：$p(x-y)\geqq|p(x)-p(y)|$（第一章，§1,(4)）可以看出．

必要性 设 $p(x)$ 是定义在 X 上的一个半范数，且在 X 的每个有界集上有界．集合 $M=\{x\in X; p(x)\leqq1\}$ 是凸、平衡的．如果 B 是 X 的一个有界集，则 $\sup_{b\in B}p(b)=\alpha<\infty$，因而 $B\subseteqq\alpha M$．根

① "0 邻域吸收空间"是 Bornologic space 的意译——译者注．

据假设，X是0邻域吸收的，所以，M必是0的一个邻域．于是$p(x)$在$x=0$处连续．

充分性　设M是一个能吸收X的每一个有界集的X的平衡凸集．p是M的Minkowski泛函．则p在每一个有界集上有界，因为根据假设，M能吸收每一个有界集．于是根据条件，$p(x)$是连续的．因此$M_1=\{x\in X; p(x)<1/2\}$是含于M的一个开集$\ni 0$．这就证明了M是0的一个邻域．

例1　赋范线性空间是0邻域吸收空间．

证明　设X是赋范线性空间．则X的单位圆$S=\{x\in X;\ \|x\|\leqq 1\}$是$X$的一个有界集．设$X$上的某个半范数$p(x)$在$S$上有界，亦即$\sup\limits_{x\in S} p(x)=\alpha<\infty$．则对任意$y\neq 0$，有

$$p(y)=p\left(\|y\|\cdot\frac{y}{\|y\|}\right)=\|y\|\cdot p\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\leqq\alpha\|y\|.$$

因此p在$y=0$处连续，从而它在X的每一点处连续．

注　后面将会明白，拟赋范线性空间$M(S,\mathfrak{B})$不是局部凸的．因此，一个拟赋范线性空间不一定是0邻域吸收空间．然而可以证明

定理2　把一个拟赋范线性空间映入另一个拟赋范线性空间的线性算子T是连续的当且仅当T把有界集映成有界集．

证明　象在第一章§2中证明命题2一样，可以证明一个拟赋范线性空间是一个线性拓扑空间．于是"仅当"部分由上面的命题已经证明了．我们来证"当"的部分．

设T把有界集映成有界集．假设$s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$．则$\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k\|=0$，因而存在一个整数序列$\{n_k\}$使得

$$\lim_{k\to\infty}n_k=\infty \quad 和 \quad \lim_{k\to\infty}n_k\|x_k\|=0.$$

例如，可以取n_k如下：

$$\begin{aligned} n_k&=最大整数\leqq\|x_k\|^{-1/2}, && 当\ x_k\neq 0\ 时, \\ &=k, && 当\ x_k=0\ 时. \end{aligned}$$

今有$\|n_kx_k\|=\|x_k+x_k+\cdots+x_k\|\leqq n_k\|x_k\|$，所以$s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}n_kx_k=0$．但是，在拟赋范线性空间中，收敛于0的序列$\{n_kx_k\}$是有界的．因此，根据条件，$\{T(n_kx_k)\}=\{n_kT(x_k)\}$是一个有界序列．所以

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty}Tx_k=s\text{-}\lim_{k\to\infty}n_k^{-1}(T(n_kx_k))=0,$$

从而T在$x=0$处连续，于是T处处连续．

定理3　设X是0邻域吸收的，T是把X映入局部凸线性拓扑空间Y内的一个线性算子，如果T把每个有界集映成有界集，则T是连续的．

证明　设V是Y中0的一个平衡凸邻域．p是V的Minkowski泛函．考虑$q(x)=p(Tx)$．q是定义在X上且在X的每一个有界集上为有界的半范数，这是因为Y的每一个有界集都被0的邻域V所吸收．既然X是0邻域吸收的，所以，q就是连续的．这样集合$\{x\in X;\ Tx\in V^a\}=\{x\in X; q(x)\leqq 1\}$是$X$中0的一个邻域，这就证明了$T$是连续的．

§8. 广义函数和广义导数

定义在第一章§1中所引进的局部凸线性拓扑空间$\mathfrak{D}(\Omega)$上的连续线性泛函数就是"分布"或L. Schwartz的"广义函数"．为了讨论广义函数，先证明

定理1 设B是$\mathfrak{D}(\Omega)$的一个有界集，则存在一个Ω的紧子集K使得

对每个$\varphi\in B$，有$\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq K$， (1)

对每个微分算子D^j，有$\sup\limits_{x\in K,\,\varphi\in B}|D^j\varphi(x)|<\infty$. (2)

证明 假定有某一函数序列$\{\varphi_j\}\subseteq B$和某一点列$\{p_i\}$使得(i)：$\{p_i\}$在Ω内无聚点，(ii)：$\varphi_i(p_i)\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots)$．于是

$$p(\varphi)=\sum_{i=1}^{\infty}i\,|\varphi(p_i)|/|\varphi_i(p_i)|$$

在每个$\mathfrak{D}_K(\Omega)$上是一个连续的半范数，$\mathfrak{D}_K(\Omega)$是在第一章§1中定义的．于是对于任意的$\varepsilon>0$，集合$\{\varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega);\ p(\varphi)\leq\varepsilon\}$是$\mathfrak{D}_K(\Omega)$中0的一个邻域．$\mathfrak{D}(\Omega)$既是诸$\mathfrak{D}_K(\Omega)$的归纳极限，我们就可看出$\{\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega);\ p(\varphi)\leq\varepsilon\}$也是$\mathfrak{D}(\Omega)$中0的一个邻域．因此$p$在$\mathfrak{D}(\Omega)$中0处是连续的，从而它在$\mathfrak{D}(\Omega)$上是连续的．于是$p$在$\mathfrak{D}(\Omega)$的有界集$B$上必是有界的．然而$p(\varphi_i)\geq i$ $(i=1, 2, \cdots)$．这就证明了(1)一定成立．

其次，我们假设(1)成立而(2)不成立．于是存在某个微分算子D^{j_0}和某个函数序列$\{\varphi_j\}\subseteq B$使得$\sup\limits_{x\in K}|D^{j_0}\varphi_i(x)|>i$ $(i=1, 2, \cdots)$．那么，如果我们令

$$p(\varphi)=\sup_{x\in K}|D^{j_0}\varphi(x)|\quad \text{对于 } \varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega)\text{成立，}$$

则$p(\varphi)$就是$\mathfrak{D}_K(\Omega)$上的一个连续半范数且$p(\varphi_i)>i$ $(i=1, 2, \cdots)$．所以，$\{\varphi_i\}\subseteq B$在$\mathfrak{D}_K(\Omega)$内不可能是有界的，更不必说在$\mathfrak{D}(\Omega)$内了．这个矛盾证明了(2)必定成立．

定理2 空间$\mathfrak{D}(\Omega)$是0邻域吸收的．

证明 设$q(\varphi)$是$\mathfrak{D}(\Omega)$上的一个半范数，且它在$\mathfrak{D}(\Omega)$的每个有界集上是有界的．根据第一章§7中的定理1，我们仅需证明q于$\mathfrak{D}(\Omega)$连续．为此，我们需证明q在空间$\mathfrak{D}_K(\Omega)$上是连续的，其中K是Ω的任意一个紧子集．因为$\mathfrak{D}(\Omega)$是诸$\mathfrak{D}_K(\Omega)$的归纳极限，于是我们就可看出：q在$\mathfrak{D}(\Omega)$上是连续的．

而q在每一个$\mathfrak{D}_K(\Omega)$上是连续的，这是因为根据条件，q在拟赋范线性空间$\mathfrak{D}_K(\Omega)$的每一个有界集上是有界的，从而根据上节定理2知，q在$\mathfrak{D}_K(\Omega)$上是连续的．所以q在$\mathfrak{D}(\Omega)$上必是连续的．

现在可以来定义广义函数了．

定义1 一个定义于$\mathfrak{D}(\Omega)$上的连续线性泛函T叫做Ω内的一个广义函数，或一个理想函数，或一个分布；而值$T(\varphi)$叫做广义函数T在检验函数$\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$处的值．

由于第一章§7中的定理1和上述定理2，我们有

命题1 一个定义在$\mathfrak{D}(\Omega)$上的线性泛函是Ω内的一个广义函数当且仅当它在$\mathfrak{D}(\Omega)$的每

一个有界集上是有界的，亦即，当且仅当T在每一个满足条件(1)和(2)的集合$B\subset\mathfrak{D}(\Omega)$上是有界的.

证明 从当且仅当半范数$|T(\varphi)|$连续时$T(\varphi)$连续这个事实知命题显然成立.

系 定义在$C_0^\infty(\Omega)$上的一个线性泛函T是Ω内的一个广义函数当且仅当它满足条件:

对于Ω的每一个紧子集K，总相应有某个正常数C和某个正整数k使得

$$|T(\varphi)|\leq C\sup_{|j|\leq k,\ x\in K}|L^j\varphi(x)|，\text{对于 }\varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega)\text{成立.} \tag{3}$$

证明 根据T在诸$\mathfrak{D}_K(\Omega)$的归纳极限$\mathfrak{D}(\Omega)$上的连续性，我们看出T必在每一个$\mathfrak{D}_K(\Omega)$上连续. 于是条件(3)的必要性是显然的. 至于条件(3)的充分性也是明显的，因为它能导致T在$\mathfrak{D}(\Omega)$的每一个有界集上有界.

注 上述的系对于所有应用是很方便的，因此它可当作广义函数的一个有用的定义.

例 1 设在Ω内 a.e. 定义的一个复值函数$f(x)$在Ω内关于R^n的 Lebesgue 测度$dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$是局部可积的，其意义是对Ω的任意紧子集K，有$\int_K|f(x)|dx<\infty$. 于是

$$T_f(\varphi)=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in\mathfrak{D}(\Omega), \tag{4}$$

定义了Ω内的一个广义函数T_f.

例 2 设Ω是R^n的某个开集. 今设$m(B)$是定义在Ω内的 Baire 子集B上的一个σ-有限且σ-可加的复值测度. 于是

$$T_m(\varphi)=\int_\Omega\varphi(x)m(dx),\quad \varphi\in\mathfrak{D}(\Omega) \tag{5}$$

在Ω内定义了一个广义函数T_m.

例 3 作为例 2 的一个特殊情形

$$T_{\delta_p}(\varphi)=\varphi(p)，\text{其中 }p\text{ 是 }\Omega\text{ 内的一固定点，}\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega), \tag{6}$$

定义了Ω内的一个广义函数T_{δ_p}. 它称为集中在$p\in\Omega$点处的 Dirac 分布. 在$p=0$(R^n的原点)的特殊情况下，我们将把T_{δ_0}记为T_δ或δ.

定义 2 Ω内的所有广义函数组成的集合记为$\mathfrak{D}(\Omega)'$. 它按运算

$$(T+S)(\varphi)=T(\varphi)+S(\varphi),\quad (\alpha T)(\varphi)=\alpha T(\varphi), \tag{7}$$

成为一个线性空间. 而我们称$\mathfrak{D}(\Omega)'$是Ω内的广义函数空间或$\mathfrak{D}(\Omega)$的对偶空间.

注 两个分布T_{f_1}和T_{f_2}作为泛函是相等的(对每一个$\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$，有$T_{f_1}(\varphi)=T_{f_2}(\varphi)$)当且仅当有$f_1(x)=f_2(x)$ a.e. 成立. 如果这一事实得证，则Ω内的一切局部可积函数所成集合，按对应关系$f\longleftrightarrow T_f$，与$\mathfrak{D}(\Omega)'$的一个子集一一对应，且有(f_1和f_2当作是等价的当且仅当$f_1(x)=f_2(x)$ a.e.)

$$T_{f_1}+T_{f_2}=T_{f_1+f_2},\quad \alpha T_f=T_{\alpha f}. \tag{7'}$$

在这个意义下，广义函数的概念实际上是局部可积函数概念的一个推广. 为了证明以上的论断，我们只须证明：在R^n的一个开集Ω内一个局部可积的函数f，如果对所有的$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$都有

$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx=0$, 则在$\Omega$内 $f=0$ a.e.. 利用引进 Baire 测度 $\mu(B)=\int_B f(x)dx$, 上述积分为 0 的条件导致对所有的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 有$\int_\Omega \varphi(x)\mu(dx)=0$. 而且借助于第一章§1 中的命题8 又进一步导致对于所有的 $\varphi\in C_0^0(\Omega)$ 有$\int_\Omega \varphi(x)\mu(dx)=0$. 今设$B$是$\Omega$内的一个紧 G_δ-集: $B=\bigcap_{n=1}^\infty G_n$, 其中$G_n$是$\Omega$内的一个开的相对紧集. 应用第 0 章§2 中的 Uryshon 定理知, 存在一个连续函数 $f_n(x)$使得

对于 $x\in\Omega$, 有 $0\leq f_n(x)\leq 1$,

对于 $x\in G_{n+2}^a$, 有 $f_n(x)=1$,

对于 $x\in G_n^a-G_{n+1}(n=1,2,\cdots)$, 有 $f_n(x)=0$,

这里假定 $\{G_n\}$ 是Ω的开的相对紧集所组成的一个单调减少序列且满足 $G_{n+2}^a\subseteq G_{n+1}$. 设 $\varphi=f_n$ 并令 $n\to\infty$, 我们看出对于Ω的所有紧 G_δ-集有 $\mu(B)=0$. Ω 的 Baire 集是含有 Ω 的所有紧 G_δ-集的最小 σ-环的元素, 根据 Baire 测度 μ 的 σ-可加性, 我们看出对于 Ω 的每一个 Baire 集 μ 都为 0. 于是这个测度 μ 的密度 f 在 Ω 内几乎处处为 0.

通过以下命题我们能定义广义函数的微分概念.

命题 2 如果T是 Ω 内的一个广义函数, 则

$$S(\varphi)=-T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right),\qquad \varphi\in\mathfrak{D}(\Omega) \tag{8}$$

定义了Ω内另一个广义函数 S.

证明 S是$\mathfrak{D}(\Omega)$上的线性泛函且它在$\mathfrak{D}(\Omega)$的每一个有界集上均为有界.

定义 3 由(8)定义的广义函数S叫做是T(关于x_1)的**广义导数**或**分布导数**, 且记为

$$S=\frac{\partial}{\partial x_1}T \tag{9}$$

所以我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_1}T(\varphi)=-T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right). \tag{10}$$

注 以上概念是通常导数概念的推广. 因为, 如果函数 f 关于 x_1 是连续可微的, 则有

$$\frac{\partial}{\partial x_1}T_f(\varphi)=-T_f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)=-\int\cdots\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1\cdots dx_n$$
$$=\int\cdots\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}f(x)\cdot\varphi(x)dx_1\cdots dx_n=T_{\partial f/\partial x}(\varphi),$$

注意到 $\varphi(x)$在Ω的某个紧子集之外为 0, 再使用分部积分法便可得到上式.

系 Ω 内的广义函数T在以上定义的分布意义下是无限次可微的且

$$(D^jT)(\varphi)=(-1)^{|j|}T(D^j\varphi), \text{其中} |j|=\sum_{i=1}^n j_i,\ D^j=\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}\cdots\partial x_n^{j_n}}. \tag{11}$$

例 1 **Heaviside 函数** $H(x)$由

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases} \tag{12}$$

来定义. 于是我们有

$$\frac{d}{dx}T_H=T_{\delta_0}, \tag{12'}$$

其中 T_{δ_0} 是集中在 R^1 的原点处的 Dirac 分布. 事实上, 对于任意的 $\varphi\in\mathfrak{D}(R^1)$, 我们均有

$$\left(\frac{d}{dx}T_H\right)(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\varphi'(x)dx=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)dx=-[\varphi(x)]_0^{\infty}=\varphi(0).$$

例 2 设 $f(x)$ 在 R^1 的开集 $R^1-\bigcup_{j=1}^{k}x_j$ 内具有有界且连续的导数. 又设 $s_j=f(x_j+0)-f(x_j-0)$ 是 $f(x)$ 在 $x=x_j$ 处的振幅或跳跃. 因为

$$\left(\frac{d}{dx}T_f\right)(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)dx=\sum_j\varphi(x_j)s_j+\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)dx,$$

所以我们有

$$\frac{d}{dx}T_f=T_{f'}+\sum_j s_j\delta_{x_j}, \tag{12''}$$

其中 δ_{x_j} 由(6)确定.

例 3 设 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个在具有光滑边界 S 的闭有界域 $\Omega\subseteq R^n$ 上连续可微的函数. 在 Ω 之外令 f 为 0, 按分部积分法, 有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}T_f\right)(\varphi)=-\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx=\int_S f(x)\varphi(x)\cos(\nu,x_j)dS+\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi(x)dx,$$

其中 ν 是 S 的内法线, $(\nu,x_j)=(x_j,\nu)$ 是 ν 和正 x_j-轴之间的夹角, 而 dS 是面积元素. 于是我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_f=T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}+T_S,\ \text{其中 } T_S(\varphi)=\int_S f(x)\varphi(x)\cos(\nu,x_j)dS. \tag{12'''}$$

系 如果 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 Ω 上属于 C^2 而且在 Ω 之外为 0, 则从(12''')和 $\frac{\partial}{\partial\nu}=\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\cos(\nu,x_j)$ 可得 Green 积分定理

$$(\Delta T_f)(\varphi)=T_{\Delta f}(\varphi)+\int_S\frac{\partial f}{\partial\nu}\varphi(x)dS-\int_S f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}dS, \tag{12''''}$$

其中 Δ 是 Laplace 算子 $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

命题 3 如果 T 是 Ω 内的一个广义函数, $f\in C^\infty(\Omega)$, 则

$$S(\varphi)=T(f\varphi),\qquad \varphi\in\mathfrak{D}(\Omega) \tag{13}$$

定义了 Ω 内另一个广义函数 S,

证明 S 是一个定义在 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 上的线性泛函且它在 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 的每一个有界集上为有界. 这只要把 Leibniz 公式应用到 $f\varphi$ 上便可得到.

定义 4 按(13)式定义的广义函数 S 叫做函数 f 和广义函数 T 的乘积.

Leibniz 公式 用 fT 记(13)式中的 S, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fT)=\frac{\partial f}{\partial x_j}T+f\frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{14}$$

这是因为对$\frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_j}$运用Leibniz 公式, 我们便有

$$-T\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=T\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi\right)-T\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi)\right).$$

这个公式可以推广如下.

设 $P(\xi)$ 是 $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n$ 的一个多项式并考虑一个具常系数的偏微分算子$P(D)$, 它是用 $i^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$代替 $P(\xi)$ 中的 ξ_j 而得到的. 虚系数 i^{-1} 的引入对于第六章中的 Fourier 变换理论中的符号运算是适宜的.

定理 3 (L. Hörmander 的广义 Leibniz 公式) 我们有

$$P(D)(fT)=\sum_s(D_sf)\frac{1}{s!}P^{(s)}(D)T, \tag{15}$$

其中, 对 $s=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, 有

$$\begin{cases}P^{(s)}(\xi)=\dfrac{\partial^{s_1+s_2+\cdots+s_n}}{\partial\xi_1^{s_1}\partial\xi_2^{s_2}\cdots\partial\xi_n^{s_n}}P(\xi)=D_\xi^sP(\xi),\\ D_s=\left(\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1}\left(\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)^{s_2}\cdots\left(\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{s_n},\end{cases} \tag{16}$$

而
$$s!=s_1!\,s_2!\cdots s_n! \tag{17}$$

证明 重复使用(14)式可给出形如

$$P(D)(fT)=\sum_s(D_sf)Q_s(D)T \tag{18}$$

的一个恒等式, 其中诸 $Q_s(\xi)$是多项式. 因为(18)式是一个恒等式, 所以我们可以把

$$f(x)=e^{i\langle x,\xi\rangle}\text{ 与 }T=e^{i\langle x,\eta\rangle},\ \text{其中}\langle x,\xi\rangle=\sum_{j=1}^n x_j\xi_j$$

代入(18)式, 于是按符号运算法

$$P(D)e^{i\langle x,\xi\rangle}=P(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}, \tag{19}$$

可得
$$P(\xi+\eta)=\sum_s\xi^sQ_s(\eta),\ \text{其中 }\xi^s=\xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\cdots\xi_n^{s_n}.$$

另一方面, 由 Taylor 公式, 我们有

$$P(\xi+\eta)=\sum_s\frac{1}{s!}\xi^sP^{(s)}(\eta).$$

于是得
$$Q_s(\eta)=\frac{1}{s!}P^{(s)}(\eta).$$

§9. B-空间和 F-空间

在一个拟赋范线性空间 X 中，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ 和三角不等式 $\|x_n-x_m\|\leqq\|x_n-x\|+\|x-x_m\|$ 使可推出 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 序列，亦即 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 收敛条件

$$\lim_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0. \tag{1}$$

定义 1 一个拟赋范线性空间 X 叫做是一个 F-空间（或 B-空间），如果它是完备的，亦即如果 X 的每一个 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 均强收敛于 X 的一个点 x_∞：

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_\infty\|=0. \tag{2}$$

这样的极限 x_∞（如果它存在）是唯一确定的，这是因为有三角不等式 $\|x-x'\|\leqq\|x-x_n\|+\|x_n-x'\|$. 一个完备的 pre-Hilbert 空间叫做一个 Hilbert 空间.

注 F-空间和 B-空间分别是 Fréchet 空间和Banach 空间的缩写. 要注意的是：Bourbaki 对拟赋范而完备的局部凸空间使用 Fréchet 空间这个术语.

命题 1 设 Ω 是 R^n 的一个开集，且以 $\mathfrak{E}(\Omega)=C^\infty(\Omega)$ 记第一章 §1，命题 6 中的拟赋范局部凸空间. 这个 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 是一个 F-空间.

证明 在 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 内，条件 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$ 意味着对于 Ω 的任意紧子集 K 和任意的微分算子 D^α，函数序列 $\{D^\alpha f_n(x)\}$ 当 $n\to\infty$ 时，在 K 上一致收敛. 于是存在某个函数 $f(x)\in C^\infty(\Omega)$ 使得在 K 上 $\lim\limits_{n\to\infty}D^\alpha f_n(x)=D^\alpha f(x)$ 一致成立. 因为 D^α 和 K 都是任意的，这就是说在 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 内有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$.

命题 2 $L^p(S)=L^p(S,\mathfrak{B},m)$ 是一个 B-空间. 特别地，$L^2(s)$ 和 (l^2) 均是 Hilbert 空间.

证明 设在 $L^p(s)$ 内有 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0$. 于是我们可以选择一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\sum\limits_k\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<\infty$. 把三角不等式和 Lebesgue-Fatou 引理应用于函数序列

$$y_t(s)=|x_{n_1}(s)|+\sum_{k=1}^{t}|x_{n_{k+1}}(s)-x_{n_k}(s)|\in L^p(S),$$

显然有

$$\int_\Omega(\lim_{t\to\infty}y_t(s)^p)\,m(ds)\leqq\varliminf_{t\to\infty}\|y_t\|^p\leqq\left(\|x_{n_1}\|+\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\right)^p.$$

因此有限极限 $\lim\limits_{t\to\infty}y_t(s)$ 几乎处处存在. 于是有限极限 $\lim\limits_{t\to\infty}x_{n_{t+1}}(s)=x_\infty(s)$ 几乎处处存在且 $x_\infty(s)\in L^p(S)$，这是因为 $|x_{n_{t+1}}(s)|\leqq\lim\limits_{t\to\infty}y_t(s)\in L^p(S)$. 再应用 Lebesgue-Fatou 引理，我们得到

$$\|x_\infty - x_{n_k}\|^p = \int_\Omega (\lim_{t\to\infty} |x_{n_t}(s) - x_{n_k}(s)|^p) m(ds) \leqq (\sum_{l=k}^{\infty} \|x_{n_{l+1}} - x_{n_l}\|)^p.$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_\infty - x_{n_k}\| = 0$,于是用三角不等式和 Cauchy 收敛条件 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m\| = 0$, 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_\infty - x_n\| \leqq \overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_\infty - x_{n_k}\| + \overline{\lim_{k,n\to\infty}}\|x_{n_k} - x_n\| = 0.$$

我们附带地证明了下面重要的

系 一个满足 Cauchy 收敛条件(1)的序列 $\{x_n\}\in L^p(S)$ 含有一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

有限极限 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}(s) = x_\infty(s)$ 几乎处处存在, $x_\infty(s)\in L^p(S)$ 以及

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n(s) = x_\infty. \tag{3}$$

注 在以上命题和系的证明中曾假定 $1\leqq p<\infty$. 然而这些结论对于 $p=\infty$ 的情形也是有效的, 其证明较之对 $1\leqq p<\infty$ 的情形还要简单些. 读者应该作出这个证明.

命题 3 空间 $A^2(G)$ 是 Hilbert 空间.

证明 设 $\{f_n(z)\}$ 是 $A^2(G)$ 的一个 Cauchy 序列. 因 $A^2(G)$ 是 Hilbert 空间 $L^2(G)$ 的一个线性子空间, 故存在一子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 使得

有限极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z) = f_\infty(z)$ a. e. 存在, $f_\infty\in L^2(G)$

和 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_G |f_\infty(z) - f_n(z)|^2 dxdy = 0.$

我们必须证明 $f_\infty(z)$ 在 G 内是全纯的. 为此, 今设 $|z-z_0|\leqq\rho$ 是含于 G 内的球. 由 Taylor 展式

$f_n(z) - f_m(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j (z-z_0)^j$ 推导出

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|^2 &\geqq \int_{|z-z_0|\leqq\rho} |f_n(z) - f_m(z)|^2 dxdy = \int_0^\rho \left(\int_0^{2\pi} \sum_j c_j r^j e^{ij\theta} \sum_k \bar{c}_k r^k e^{-ik\theta} d\theta\right) r dr \\ &= \sum_j 2\pi \int_0^\rho |c_j|^2 r^{2j+1} dr = 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2j+2} |c_j|^2 (2j+2)^{-1} \geqq \pi |c_0|^2 \rho^2 \\ &= \pi\rho^2 |f_n(z_0) - f_m(z_0)|^2.\end{aligned} \tag{4}$$

于是序列 $\{f_n(z)\}$ 本身在含于 G 内的任一闭球上一致收敛. 因诸 $f_n(z)$ 在 G 内是全纯的, 所以 $f_\infty(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ 在 G 内必定是全纯的.

命题 4 $M(S, \mathfrak{B}, m)$, 其中 $m(S)<\infty$, 是 F-空间.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 内的一个 Cauchy 序列, 因为在 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 中的收敛是渐近收敛, 所以我们可以选择 $\{x_n(s)\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}(s)\}$ 使得对于 $B_k = \{s\in S;\ 2^{-k}\leqq |x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)|\}$ 有 $m(B_k)\leqq 2^{-k}$. 序列 $x_{n_k}(s) = x_{n_1}(s) + \sum\limits_{j=1}^{k-1}(x_{n_{j+1}}(s) - x_{n_j}(s))$ $(k=1, 2, \cdots)$ 强收敛于属于 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 的一个函数, 这是因为, 如果 $s\overline{\in}\bigcup\limits_{j=l}^{\infty} B_j$, 我们便有 $\sum\limits_{j=l}^{\infty}|x_{n_{j-1}}(s) - x_{n_{j+1}}(s)| \leqq$

$\sum_{j=t}^{\infty}2^{-j}\leq 2^{1-t}$和$m\left(\bigcup_{j=t}^{\infty}B_j\right)\leq\sum_{j=t}^{\infty}m(B_j)\leq\sum_{j=t}^{\infty}2^{-j}\leq 2^{1-t}$；因而当令$t\to\infty$时，序列$\{x_{n_k}(s)\}$几乎处处收敛于一个函数$x_\infty(s)\in M(S,\mathfrak{B},m)$. 于是$\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x_\infty\|=0$，从而由$\lim_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0$我们得到$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_\infty\|=0$.

空间(s) 所有数列$\{\xi_n\}$组成的集合(s)赋以拟范数

$$\|\{\xi_n\}\|=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}|\xi_j|/(1+|\xi_j|)$$

后，按运算$\{\xi_n\}+\{\eta_n\}=\{\xi_n+\eta_n\}$，$\alpha\{\xi_n\}=\{\alpha\xi_n\}$构成一个$F$-空间. (s)的完备性的证明可以象在$M(S,\mathfrak{B},m)$的情形那样得到. 拟范数

$$\|\{\xi_n\}\|=\inf_{\varepsilon>0}\tan^{-1}\{\varepsilon+\text{满足条件}|\xi_n|>\varepsilon\text{ 的那些 }\xi_n\text{ 的个数}\}$$

也给出了(s)的一个等价拓扑.

注 显然$C(S)$，(c_0)和(c)均是B-空间. 空间(l^2)的完备性是L^p的完备性的一个推论. 于是根据第一章§5的定理3知，空间H-L^2与(l^2)一样都是Hilbert空间.

空间 Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ 设Ω是R^n的一个开集，而k是一个正整数. 对于$1\leq p<\infty$，我们以$W^{k,p}(\Omega)$表示一切这样的复值函数$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$所组成的集合，即它们是定义在Ω内且使f和它的阶数为$|s|\leq\sum_{j=1}^{n}|s_j|\leq k$的分布导数$D^sf$均属于$L^p(\Omega)$. $W^{k,p}(\Omega)$在运算

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad(\alpha f)(x)=\alpha f(x)\quad\text{和范数}$$

$$\|f\|_{k,p}=\left(\sum_{|s|\leq k}\int_\Omega|D^sf(x)|^pdx\right)^{1/p},\quad dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$$

下构成一个赋范线性空间. 作为约定，如果在Ω内$f_1(x)=f_2(x)$a.e.，我们便认为两个函数f_1和f_2是$W^{k,p}(\Omega)$的相同向量. 容易看出按数量积

$$(f,g)_{k,2}=\left(\sum_{|s|\leq k}\int_\Omega D^sf(x)\overline{D^sg(x)}dx\right)$$

$W^{k,2}(\Omega)$成为一个pre-Hilbert空间.

命题5 空间$W^{k,p}(\Omega)$是一个B-空间. 特别地，$W^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega)$按范数$\|f\|_k=\|f\|_{k,2}$和数量积$(f,g)_k=(f,g)_{k,2}$成为一个Hilbert空间.

证明 设$\{f_h\}$是$W^{k,p}(\Omega)$的一个Cauchy序列. 于是对于任意的微分算子$D^s(|s|\leq k)$，序列$\{D^sf_h\}$是$L^p(\Omega)$的一个Cauchy序列，从而根据$L^p(\Omega)$的完备性，存在函数$f^{(s)}\in L^p(\Omega)$ $(|s|\leq k)$使得$\lim_{h\to\infty}\int_\Omega|D^sf_h(x)-f^{(s)}(x)|^pdx=0$. 把第一章§3中的Hölder不等式应用到$\Omega$的紧集上，我们容易看出$D^sf_h$在$\Omega$内是局部可积的. 于是，对于任意的函数$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$T_{D^sf_h}(\varphi)=\int_\Omega D^sf_h(x)\varphi(x)dx=(-1)^{|s|}\int_\Omega f_h(x)D^s\varphi(x)dx,$$

从而，再应用一次 Hölder 不等式，由 $\lim\limits_{h\to\infty}\int_{\Omega}|f_h(x)-f^{(0)}(x)|^p dx=0$，我们得到

$$\lim_{h\to\infty}T_{D^s f_h}(\varphi)=(-1)^{|s|}T_{f^{(0)}}(D^s\varphi)=D^s T_{f^{(0)}}(\varphi).$$

类似地，由 $\lim\limits_{h\to\infty}\int_{\Omega}|D^s f_h(x)-f^{(s)}(x)|^p dx=0$，有

$$\lim_{h\to\infty}T_{D^s f_{h(s)}}(\varphi)=Tf^{(s)}(\varphi).$$

于是我们必定有 $D^s T_{f^{(0)}}=T_{f^{(s)}}$，亦即分布导数 $D^s f^{(0)}$ 等于 $f^{(s)}$. 这就证明了 $\lim\limits_{h\to\infty}\|f_h-f^{(0)}\|_{k,p}=0$，且 $W^{k,p}(\Omega)$ 是完备的.

§10. 完 备 化

F-空间(和 B-空间)的完备性在泛函分析中将在这种意义上起重要作用，即(有了完备性)我们就能把第 0 章预备知识中给出的 Baire 纲论用于这些空间. 下面的完备化定理将是本书经常使用的.

定理 (完备化) 设 X 是一个不完备的拟赋范线性空间. 则 X 是同构并等距于某个 F-空间 $\widetilde{X}$ 的一个稠密线性子空间，亦即存在 X 到 $\widetilde{X}$ 的某个稠密线性子空间的一个一一对应关系 $x\leftrightarrow\tilde{x}$ 使得

$$\widetilde{(x+y)}=\tilde{x}+\tilde{y},\quad \widetilde{(\alpha x)}=\alpha\tilde{x},\quad \|\tilde{x}\|=\|x\|. \tag{1}$$

空间 $\widetilde{X}$ 在等距同构意义下是唯一确定的. 如果 X 本身是一个赋范线性空间，则 $\widetilde{X}$ 是一个 B-空间.

证明 这个证明象 Cantor 从有理数构造实数那样来进行.

X 的一切Cauchy序列 $\{x_n\}$ 所组成的集合可以根据等价关系 $\{x_n\}\sim\{y_n\}$ 来分类，而 $\{x_n\}\sim\{y_n\}$ 是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$. 我们用 $\{x_n\}'$ 表示含有 $\{x_n\}$ 的类. 于是所有这样的类 $\tilde{x}=\{x_n\}'$ 组成的集合 $\widetilde{X}$ 在运算

$$\{x_n\}'+\{y_n\}'=\{x_n+y_n\}',\quad \alpha\{x_n\}'=\{\alpha x_n\}'$$

下成为一个线性空间. 我们有 $|\|x_n\|-\|x_m\||\leq\|x_n-x_m\|$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$ 存在. 我们令

$$\|\{x_n\}'\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

容易看出向量和 $\{x_n\}'+\{y_n\}'$，数乘 $\alpha\{x_n\}'$ 及范数 $\|\{x_n\}'\|$ 的这些定义均不依赖于这些类 $\{x_n\}'$，$\{y_n\}'$ 的特殊的代表元素的选择. 例如说，如果 $\{x_n\}\sim\{x'_n\}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|\leq\lim_{n\to\infty}\|x'_n\|+\lim_{n\to\infty}\|x'_n-x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x'_n\|,$$

而类似地又有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x'_n\|\leq\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$，所以有 $\|\{x_n\}'\|=\|\{x'_n\}'\|$.

为了证明 $\|\{x_n\}'\|$ 是一个拟范数，我们必须证明

$$\lim_{\alpha\to 0}\|\alpha\{x_n\}'\|=0 \text{ 和 } \lim_{\|\{x_n\}'\|\to 0}\|\alpha\{x_n\}'\|=0.$$

前者是等价于 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=0$, 而后者则等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=0$. 这些都是正确的, 因为 $\|\alpha x\|$ 关于两个变量 x 和 α 均是连续的.

为了证明 $\widetilde{X}$ 的完备性, 设 $\{\tilde{x}_k\}=\{\{x_n^{(k)}\}\}$ 是 $\widetilde{X}$ 的一个 Cauchy 序列, 对于每一个 k, 我们可以选取 n_k 使得

$$\|x_m^{(k)}-x_{n_k}^{(k)}\|<k^{-1}, \text{ 当 } m>n_k \text{ 时成立.} \tag{2}$$

于是我们可以证明序列 $\{\tilde{x}_k\}$ 收敛于含有 X 的 Cauchy 序列:

$$\{x_{n_1}^{(1)},\ x_{n_2}^{(2)},\ \cdots, x_{n_k}^{(k)},\ \cdots\} \tag{3}$$

的类. 为了这个目的, 我们用 $\bar{x}_{n_k}^{(k)}$ 表示含有序列

$$\{x_{n_k}^{(k)}, x_{n_k}^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)}, \cdots\} \tag{4}$$

的类. 于是, 由(2)有

$$\|\tilde{x}_k-\bar{x}_{n_k}^{(k)}\|=\lim_{m\to\infty}\|x_m^{(k)}-x_{n_k}^{(k)}\|\leqq k^{-1}, \tag{5}$$

从而有

$$\|x_{n_k}^{(k)}-x_{n_m}^{(m)}\|=\|\bar{x}_{n_k}^{(k)}-\bar{x}_{n_m}^{(m)}\|\leqq\|\bar{x}_{n_k}^{(k)}-\tilde{x}_k\|+\|\tilde{x}_k-\tilde{x}_m\|$$
$$+\|\tilde{x}_m-\bar{x}_{n_m}^{(m)}\|\leqq\|\tilde{x}_k-\tilde{x}_m\|+k^{-1}+m^{-1}.$$

因此(3)是 X 的一个 Cauchy 序列. 设 $\tilde{x}$ 是含有(3)的类. 于是, 由(5)有

$$\|\tilde{x}-\tilde{x}_k\|\leqq\|\tilde{x}-\bar{x}_{n_k}^{(k)}\|+\|\bar{x}_{n_k}^{(k)}-\tilde{x}_k\|\leqq\|\tilde{x}-\bar{x}_{n_k}^{(k)}\|+k^{-1}.$$

既然象上面所证明那样, 有

$$\|\tilde{x}-\bar{x}_{n_k}^{(k)}\|\leqq\lim_{p\to\infty}\|x_{n_p}^{(p)}-x_{n_k}^{(k)}\|\leqq\lim_{p\to\infty}\|\tilde{x}_p-\tilde{x}_k\|+k^{-1}$$

成立我们就证明了 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\tilde{x}-\bar{x}_{n_k}^{(k)}\|=0$, 从而有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\tilde{x}-\tilde{x}_k\|=0$.

上面的证明说明对应关系

$$X\ni x\leftrightarrow\tilde{x}=\{x, x, \cdots, x, \cdots\}'=\bar{x}$$

必是同构和等距的, 并且按照这个对应关系 X 在 $\widetilde{X}$ 内的象在 $\widetilde{X}$ 内是稠密的. 定理的最后那一部分是显然的.

完备化的例子 设 Ω 是 R^n 的一个开集而 $k<\infty$. 空间 $C_0^k(\Omega)$ 在范数

$$\|f\|_k=\left(\sum_{|s|\leq k}\int_\Omega|D^s f(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

下的完备化空间记为 $H_0^k(\Omega)$; 于是 $H_0^k(\Omega)$ 是第一章 § 5 例 4 中所确定的 pre-Hilbert 空间 $\hat{H}_0^k(\Omega)$ 的完备化空间. 所以 $H_0^k(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间. 类似地, 第一章 § 5 例 3 中的 pre-Hilbert 空间 $\hat{H}^k(\Omega)$ 的完备化空间用 $H^k(\Omega)$ 来表示.

$H_0^k(\Omega)$ 的元素可具体地得到如下: 设 $\{f_h\}$ 是 $C_0^k(\Omega)$ 关于范数 $\|f\|_k$ 的一个 Cauchy 序列. 于是根据空间 $L^2(\Omega)$ 的完备性, 一定存在函数 $f^{(s)}(x)\in L^2(\Omega)$, 其中 $|s|=\sum\limits_{j=1}^n s_j\leqq k$, 使得

$$\lim_{h\to\infty}\int_\Omega|f^{(s)}(x)-D^s f_h(x)|^2dx=0\quad(dx=dx_1dx_2\cdots dx_n).$$

因为数量积按 $L^2(\Omega)$ 的范数是连续的，所以对任意的检验函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$T_{f^{(s)}}(\varphi)=\lim_{h\to\infty}\langle D^s f_h,\ \varphi\rangle=\lim_{h\to\infty}(-1)^{|s|}T_{f_h}(D^s\varphi)$$
$$=(-1)^{|s|}\lim_{h\to\infty}\langle f_h,D^s\varphi\rangle=(-1)^{|s|}\langle f^{(0)},D^s\varphi\rangle=(D^sT_{f^{(0)}})(\varphi).$$

因而我们看出当把 $f^{(s)}\in L^2(\Omega)$ 当作一个广义函数时，它是 $f^{(0)}$ 的分布导数：$f^{(s)}=D^sf^{(0)}$.

这样我们就证明了 Hilbert 空间 $H_0^k(\Omega)$ 是 Hilbert 空间 $W^k(\Omega)$ (Sobolev 空间)的一个线性子空间. 一般说来 $H_0^k(\Omega)$ 是 $W^k(\Omega)$ 的一个真子空间. 然而我们可以证明

命题 $H_0^k(R^n)=W^k(R^n)$.

证明 我们知道空间 $W^k(R^n)$ 是所有这样的函数 $f(x)$ 组成的空间，即 f 和它的 $|s|=\sum_{j=1}^n s_j\leq k$ 阶的分布导数 $D^sf(x)$ 均属于 $L^2(R^n)$，又 $W^k(R^n)$ 的范数由

$$\|f\|_k=\left(\sum_{|s|\leq k}\int_{R^n}|D^sf(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

给出.

设 $f\in W^k(R^n)$ 以及用

$$f_N(x)=\alpha_N(x)f(x)$$

来定义 $f_N(x)$，其中函数 $\alpha_N(x)\in C_0^\infty(R^n)$ $(N=1,2,\cdots)$ 满足

$$\alpha_N(x)=1,\ \text{当}\ |x|\leq N\ \text{时, 以及}$$
$$\sup_{x\in R^n,\ |s|\leq k,\ N=1,2,\cdots}|D^s\alpha_N(x)|<\infty$$

于是根据 Leibniz 公式，有

$$D^sf(x)-D^sf_N(x)=\begin{cases}0, & \text{当}\ |x|\leq N\ \text{时},\\ D^t\alpha_N(x)\cdot D^nf(x)\ \text{诸项的一个线性组合}, & \\ \text{其中}\ |n|+|t|\leq k,\ \text{当}\ |x|>N\ \text{时}, & \end{cases}$$

因此，根据对于 $|s|\leq k$, $D^sf\in L^2(R^n)$，我们看出 $\lim\limits_{N\to\infty}\|D^sf_N-D^sf\|_0=0$，从而 $\lim\limits_{N\to\infty}\|f_N-f\|_k=0$.

所以只要证明对于任意的具有紧支集的 $f\in W^k(R^n)$，总存在一个序列 $\{f_a(x)\}\subseteq C_0^\infty(R^n)$ 使得 $\lim\limits_{a\to 0}\|f_a-f\|_k=0$ 就足够了. 为了这个目的考虑 f 的正则化(见第一章 §1 中的(16)式)：

$$f_a(x)=\int_{R^n}f(y)\theta_a(x-y)dy,\ \ a>0.$$

按照微分法则有

$$D^sf_a(x)=\int_{R^n}f(y)D_x^s\theta_a(x-y)dy=(-1)^{|s|}\int_{R^n}f(y)D_y^s\theta_a(x-y)dy$$
$$=(D^sT_f)(\theta_{a,x})\quad(\text{其中}\ \theta_{a,x}=\theta_a(x-y))$$
$$=\int_{R^n}D^sf(y)\cdot\theta_a(x-y)dy\quad(\text{对于}\ |s|\leq k),$$

因此由 Schwarz 不等式有

$$\int_{R^n}|D^s f_a(x)-D^s f(x)|^2dx$$
$$\leq\left(\int_{R^n}\theta_a(x-y)dy\right)\int_{R^n}\left[\int_{R^n}|D_y^s f(y)-D_x^s f(x)|^2\theta_a(x-y)dy\right]dx$$
$$=\int_{|\varepsilon|\leq a}\left[\int_{R^n}|D_y^s f(y)-D_y^s f(y+\varepsilon)|dy\right]^2\theta_a(\varepsilon)d\varepsilon,$$

其中 $$y+\varepsilon=(y_1+\varepsilon_1, y_2+\varepsilon_2, \cdots, y_n+\varepsilon_n).$$

我们知道最右边方括号内的那个积分随 $\varepsilon\to 0$ 而趋于0(见第0章§3中定理1)，从而 $\lim\limits_{a\to 0}\int_{R^n}|D^s f_a(x)-D^s f(x)|^2dx=0$. 这样便有 $\lim\limits_{a\to 0}\|f_a-f\|_k=0$. 所以 $C_0^k(R^n)$ 关于范数 $\|\ \|_k$ 的完备化 $H_0^k(R^n)$ 与空间 $W^k(R^n)$ 是恒同的.

系 $H_0^k(R^n)=H^k(R^n)=W^k(R^n)$.

§11. B-空间的商空间

假设 X 是一个赋范线性空间，而 M 是 X 的一个闭线性子空间. 我们考虑其元素为模 M 类的商空间 X/M. 由于 M 是闭的这个事实，所以所有这种类 ξ 在 X 内均是闭的.

命题 如果我们定义

$$\|\xi\|=\inf_{x\in\xi}\|x\|. \tag{1}$$

则 $\|\xi\|$ 满足关于范数的所有公理.

证明 如果 $\xi=0$, 则 ξ 与 M 一致，且包含了 X 的零向量；因而由(1)有 $\|\xi\|=0$. 反之，假设 $\|\xi\|=0$, 那末从(1)可以推出这个类含有某个序列 $\{x_n\}$, 对于它我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$, 于是 X 的零向量属于 X 的闭集合 ξ. 这就证明了 $\xi=M$, 从而它是 X/M 中的零向量.

其次假设 $\xi,\eta\in X/M$. 根据定义(1), 对于任意的 $\varepsilon>0$, 总存在向量 $x\in\xi$, $y\in\eta$ 使得

$$\|x\|\leq\|\xi\|+\varepsilon,\quad \|y\|\leq\|\eta\|+\varepsilon.$$

所以 $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\leq\|\xi\|+\|\eta\|+2\varepsilon$. 另一方面, $(x+y)\in(\xi+\eta)$ 由(1)又有 $\|\xi+\eta\|\leq\|x+y\|$. 因而有 $\|\xi+\eta\|\leq\|\xi\|+\|\eta\|+2\varepsilon$, 从而得到三角不等式

$$\|\xi+\eta\|\leq\|\xi\|+\|\eta\|.$$

最后, 显然公理 $\|\alpha\xi\|=|\alpha|\cdot\|\xi\|$ 是成立的.

定义 空间 X/M 赋予范数(1)后叫做一个赋范商空间.

定理 如果 X 是一个 B-空间，而 M 是 X 的某个闭线性子空间，则赋范商空间也是一个 B-空间.

证明 假设 $\{\xi_n\}$ 是 X/M 中的一个 Cauchy 序列. 则 $\{\xi_n\}$ 含有一个使得 $\|\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k}\|<2^{-k-2}$ 满足的子序列 $\{\xi_{n_k}\}$. 另外根据 x/M 的范数的定义(1)，在每一类 $(\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k})$ 中我们都可选出一个向量 y_k 使得

$$\|y_k\|<\|\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k}\|+2^{-k-2}<2^{-k-1},$$

设 $x_{n_1}\in\xi_{n_1}$. 级数 $x_{n_1}+y_1+y_2+\cdots$ 按范数收敛，并且由于 X 的完备性，因而它收敛于 X 的某个元素 x. 设 ξ 是含有 x 的类. 我们要证明 $\xi=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$.

以 s_k 表示上述级数的部分和 $x_{n_1}+y_1+y_2+\cdots+y_k$. 于是 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x-s_k\|=0$. 另一方面，从关系 $x_{n_1}\in\xi_{n_1}$, $y_p\in(\xi_{n_{p+1}}-\xi_{n_p})$ 可得 $s_k\in\xi_{n_{k+1}}$, 从而由(1)有

$$\|\xi-\xi_{n_{k+1}}\|\leqq\|x-s_k\|\to 0, \text{当 } k\to\infty \text{ 时}.$$

所以从三角不等式 $\|\xi-\xi_n\|\leqq\|\xi-\xi_{n_{k+1}}\|+\|\xi_{n_{k+1}}-\xi_n\|$ 以及 $\{\xi_n\}$ 是一个 *Cauchy* 序列这个事实，我们可以断定 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\xi-\xi_n\|=0$.

§12. 单位分解

为了在下一节讨论广义函数的支集，我们预先给出单位分解的概念和它的存在性.

命题 设 G 是 R^n 的一个开集. 又设 G 的某些开子集 U 的族 $\{U\}$ 构成 G 的一个开基: G 的任一开子集均可表示成属于族 $\{U\}$ 的某些开集的并. 则存在这个族 $\{U\}$ 的某个开集系，它具有性质:

这个系中诸开集的并等于 G, (1)

G 的任一紧子集仅与这个系的有限多个开集相交(有非空交集). (2)

定义 1 上述开集系叫做构成 G 的附属于 $\{U\}$ 的散开的开覆盖.

命题的证明 G 可以表示为可数个紧子集的并集. 例如，我们可以取含于 G 内而其心是有理坐标，半径为有理数的所有闭球组成的系.

于是存在诸紧子集 K_r 的一个序列使得(i) $K_r\subseteqq K_{r+1}$ $(r=1, 2, \cdots)$, (ii) G 是诸 K_r 的并以及(iii)每一个 K_r 均含于 K_{r+1} 的内部. 令

$U_r=(K_{r+1}$ 的内部$)-K_{r-2}$ 和 $V_r=K_r-(K_{r-1}$ 的内部$)$, 其中，为方便计，令 $K_0=K_{-1}=$空集. 于是 U_r 是开集，而 V_r 是紧集且 $G=\bigcup\limits_{r=1}^{\infty}V_r$. 对任一点 $x\in V_r$, 取一个开集 $U(x;r)\in\{U\}$ 使得 $x\in U(x,r)\subseteqq U_r$. 因为 V_r 是紧的，所以存在有限点系 $x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(h_r)}$ 使得 $V_r\subseteqq\bigcup\limits_{i=1}^{h_r}U(x^{(i)};\ r)$. 于是，既然 G 的任意一个紧集都仅与有限多个开集 U_r 相交，那么就容易看出: 由诸开集 $U(x^{(i)};\ r)$ $(r=1, 2, \cdots; 1\leqq i\leqq h_r)$ 组成的系是 G 的附属于 $\{U\}$ 的一个散开的开覆盖.

定理 (单位分解) 设 G 是 R^n 的一个开集，而 $\{G_i;\ i\in I\}$ 是覆盖 G 的某个开集族，亦即 $G=\bigcup\limits_{i\in I}G_i$. 则存在 $C_0^\infty(R^n)$ 的一个函数系 $\{\alpha_j(x);\ j\in J\}$ 使得

对于每一个 $j\in J$, $\operatorname{supp}(\alpha_j)$ 都含于某个 G_i 内, (3)

对于每一个 $j\in J$, 有 $0\leqq\alpha_j(x)\leqq 1$, (4)

而对于 $x\in G$, 有 $\sum\limits_{j\in J}\alpha_j(x)\equiv 1$. (5)

证明 设 $x^{(0)}\in G$ 并取含有 $x^{(0)}$ 的某个 G_i. 今设球心在 $x^{(0)}$ 其半径为 r 的闭球 $S(x^{(0)};r)$ 含

于 G_i 内. 像在第一章 § 1的(14)式中那样, 构造一个函数 $\beta^{(r)}_{x^{(0)}}(x)\in C_0^\infty(R^n)$ 使得

$$\beta^{(r)}_{x^{(0)}}(x)>0, \text{当} |x-x^{(0)}|<r \text{时},$$
$$\beta^{(r)}_{x^{(0)}}(x)=0, \text{当} |x-x^{(0)}|\geqq r \text{时}.$$

令 $U^{(r)}_{x^{(0)}}=\{x; \beta^{(r)}_{x^{(0)}}(x)\neq 0\}$. 则 $U^{(r)}_{x^{(0)}}\subseteqq G_i$ 且 $\bigcup\limits_{x^{(0)}\in G, r>0} U^{(r)}_{x^{(0)}}=G$, 此外还有 $\text{supp}(\beta^{(r)}_{x^{(0)}})$ 是紧的.

根据命题, 存在 G 的附属于开基 $\{U^{(r)}_{x^{(0)}}; x^{(0)}\in G, r>0\}$ 的一个散开的开覆盖 $\{U_j; j\in J\}$. 设 $\beta_j(x)$ 是这个族 $\{\beta^{(r)}_{x^{(0)}}(x)\}$ 中与 U_j 相关联的函数. 于是, 因为 $\{U_j; j\in J\}$ 是一个散开的开覆盖, 所以在 G 的任一固定点 x 处仅有有限多个 $\beta_j(x)$ 不为 0. 这样在 G 的每一点处, 和 $s(x)=\sum\limits_{i\in J}\beta_j(x)$ 是收敛的且是 >0 的. 因而诸函数

$$\alpha_j(x)=\beta_j(x)/s(x) \quad (j\in J)$$

满足定理的要求.

定义 2 这个系 $\{\alpha_j(x); j\in J\}$ 叫做附属于覆盖 $\{G_i; i\in I\}$ 的一个单位分解.

§ 13. 具有紧支集的广义函数

定义 1 称一个分布 $T\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ 在 Ω 的某个开集 U 内为 0, 如果对于每一个其支集含于 U 内的 $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ 均有 $T(\varphi)=0$. T 的支集定义为使 T 在 $\Omega-F$ 内为 0 的 Ω 的最小闭集 F, 记为 $\text{supp}(T)$.

为了说明上述定义有意义, 我们必须证明 T 在其内为 0 的 Ω 的最大开集的存在. 这点可以证明如下.

定理 1 如果一个分布 $T\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ 在 Ω 的一个开集族 $\{U_i; i\in I\}$ 的每一个 U_i 内均为 0, 则 T 在 $U=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$ 内为0.

证明 设 $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ 是具有 $\text{supp}(\varphi)\subseteqq U$ 的某个函数. 我们构造一个单位分解 $\{\alpha_j(x); j\in J\}$, 它附属于 Ω 的覆盖: $\{U_i; i\in I\}$ 和 $\Omega-\text{supp}(\varphi)$. 于是 $\varphi=\sum\limits_j\alpha_j\varphi$ 是一个有限和, 从而有 $T(\varphi)=\sum\limits_{j\in J}T(\alpha_j\varphi)$. 假如 $\text{supp}(\alpha_j)$ 含于某个 U_i 内, 则根据条件有 $T(\alpha_j\varphi)=0$; 假如 $\text{supp}(\alpha_j)$ 含于 $\Omega-\text{supp}(\varphi)$ 内, 则有 $\alpha_j\varphi=0$, 从而有 $T(\alpha_j\varphi)=0$. 所以有 $T(\varphi)=0$.

命题 1 空间 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 的某个子集 B 是有界的当且仅当对于任意一个微分算子 D^j 及 Ω 的任一个紧子集 K, 函数集合 $\{D^jf(x); f\in B\}$ 在 K 上是一致有界的.

证明 从确定 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 的拓扑的那些半范数的定义来看是显然的.

命题 2 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 上的一个线性泛函 T 是连续的, 当且仅当在 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 的每一个有界集上 T 总是有界的.

证明 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 既是一个拟赋范线性空间, 命题就是第一章 § 7 中定理 2 的一个推论.

命题 3 一个具有紧支集的分布 $T\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ 可以用一种且仅能用一种方式延拓成 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函 T_0 使得当 $f\in\mathfrak{E}(\Omega)$ 在 $\operatorname{supp}(T)$ 的某个邻域内为 0 时, $T_0(f)=0$

证明 令 $\operatorname{supp}(T)=K$, 其中 K 是 Ω 的一个紧子集. 对任一点 $x^0\in K$ 和 $\varepsilon>0$, 我们取球心在 x^0 而半径为 ε 的一个球 $S(x^0,\varepsilon)$. 对于任意的充分小的 $\varepsilon>0$, 紧集 K 被有限多个球 $S(x^0,\varepsilon)$, 其中 $x^0\in K$, 所覆盖. 设 $\{\alpha_j(x);\ j\in J\}$ 是附属于这个有限球系的一个单位分解. 于是函数 $\psi(x)=\sum\limits_{\operatorname{supp}(\alpha_j)\cap K'\neq\text{空}}\alpha_j(x)$ (其中 K' 是 K 的含于上述有限球系内部的某个紧邻域)满足:

$$\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega)\text{ 且在 }K\text{ 的某个邻域内 }\psi(x)=1.$$

对于 $f\in C^\infty(\Omega)$ 我们用 $T_0(f)=T(\psi f)$ 来定义 $T_0(f)$. 这个定义与 ψ 的选择无关. 因为, 如果 $\psi_1\in C_0^\infty(\Omega)$ 在 K 的某个邻域内等于 1, 则对于任意的 $f\in C^\infty(\Omega)$, 函数 $(\psi-\psi_1)f\in\mathfrak{D}(\Omega)$ 在 K 的某个邻域内为 0. 所以 $T(\psi f)-T(\psi_1 f)=T((\psi-\psi_1)f)=0$.

对 ψf 应用Leibniz 微分公式, 容易看出: 当 $\{f\}$ 取遍 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 的一个有界集时, $\{\psi f\}$ 便取遍 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 的一个有界集. 这样, 因为分布 $T\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ 在 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 的有界集上是有界的, 所以泛函 T_0 在 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 的有界集上是有界的. 于是根据上面提到过的第一章 § 7 中的定理 2, T_0 是 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函. 今设 $f\in\mathfrak{E}(\Omega)$ 在 K 的某个邻域 $U(K)$ 内为 0. 于是, 选择一个在 $(\Omega-U(K))$ 内为 0 的 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$, 便有 $T_0(f)=T(\psi f)=0$.

命题 4 设 K' 是上述 T_0 定义中 ψ 的支集. 则对于某两个常数 C 和 k 有

$$|T_0(f)|\leq C\sup_{|j|\leq k;\,x\in K'}|D^j f(x)|\text{ 对所有的 }f\in C^\infty(\Omega)\psi\text{ 成立.}$$

证明 因为 T 是 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函, 则对于 Ω 的任意一个紧集 K', 存在常数 C' 和 k' 使得

$$|T(\varphi)|\leq C'\sup_{|j|\leq k',\,x\in K'}|D^j\varphi(x)|\text{ 对所有的 }\varphi\in\mathfrak{D}_{K'}(\Omega)\text{ 成立.}$$

(第一章 § 8 中命题 1 的系), 然而对于任意的 $g\in C^\infty(\Omega)$, 我们有 $\varphi=\psi g\in\mathfrak{D}_{K'}(\Omega)$. 所以根据 Leibniz 的微分公式, 有

$$\sup_{|j|\leq k',\,x\in K'}|D^j(\psi g)(x)|\leq C''\sup_{|j|\leq k',\,x\in K'}|D^j g(x)|,$$

其中 C'' 是与 g 无关的常数. 令 $g=f$ 和 $k'=k$, 便得到命题.

命题 5 设 S_0 是 $C^\infty(\Omega)$ 上的一个线性泛函, 且对于某个常数 C 和一个正整数 k 以及 Ω 的一个紧子集 K 有

$$|S_0(f)|\leq C\sup_{|j|\leq k,\,x\in k}|D^j f(x)|\quad\text{对所有的 }f\in C^\infty(\Omega)\text{ 成立.}$$

则 S_0 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 上的限制是其支集含于 K 内的一个分布.

证明 如果 f 在 K 的某个邻域内恒为 0, 则有 $S_0(f)=0$. 因此, 如果 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ 在 K 的一个邻域内等于 1, 则有

$$S_0(f)=S_0(\psi f)\quad\text{对于所有的 }f\in C^\infty(\Omega)\text{ 成立.}$$

容易看出, 如果 $\{f\}$ 取遍 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 的一个有界集, 则根据 Leibniz 公式 $\{\psi f\}$ 取遍这样一个集合, 它是含于形如

$$\{g\in C^\infty(\Omega);\sup_{|j|\leq k,x\in K}|D^j g(x)|=C_K<\infty\}$$

的集合内的. 因此 $S_0(\psi f)=T(f)$ 在 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 的有界集合上是有界的, 所以 T 是 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 上的一个连续线性泛函.

于是我们证明了如下的

定理 2 Ω 内具有紧支集的所有分布组成的集合恒同于 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 上所有连续线性泛函所组成的空间 $\mathfrak{E}(\Omega)'$, 即 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 的对偶空间. $C^\infty(\Omega)$ 上的一个线性泛函 T 属于 $\mathfrak{E}(\Omega)'$, 当且仅当对于某两常数 C 和 k 以及 Ω 的一个紧子集 K 有

$$|T(f)|\leq C\sup_{|j|\leq k,x\in K}|D^j f(x)|$$

对于所有的 $f\in C^\infty(\Omega)$ 成立.

以下我们要证明一个定理, 它给出了支集退化为一点的分布的一般表示式.

定理 3 设 R^n 的一个开集 Ω 含有原点 0. 则支集退化为原点 0 的分布 $T\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ 能表示成 0 点处的 Dirac 分布及其导数的有限线性组合.

证明 对于这样的一个分布 T, 由上述定理 2 可知, 存在着常数 C 和 k 以及 Ω 的某个含有原点 0 的紧子集 K 使得对所有的 $f\in C^\infty(\Omega)$ 有

$$|T(f)\leq|C\sup_{|j|\leq k,x\in K}|D^j f(x)|\quad 成立.$$

我们将证明

如果对所有适合 $|j|\leq k$ 的 j, 有 $D^j f(0)=0$ 成立, 则 $T(f)=0$.

为此, 取一个函数 $\psi\in C^\infty(\Omega)$, 它在 0 的某个邻域内等于 1, 且令

$$f_\varepsilon(x)=f(x)\psi(x/\varepsilon),$$

因为在原点 0 的某个邻域内有 $f=f_\varepsilon$, 所以有 $T(f)=T(f_\varepsilon)$, 由 Leibniz 公式, 可知 f_ε 的 $\leq k$ 阶的导数是形如 $|\varepsilon|^{-i}D^i\psi\cdot D^j f$ (其中 $|i|+|j|\leq k$) 的诸项的某个线性组合. 因为根据假设, 对于 $|i|\leq k$, 有 $D^i f(0)=0$, 所以按 Taylor 公式有 f_ε 的 $|s|$ 阶导数在 $\psi(x/\varepsilon)$ 的支集内是 $0(\varepsilon^{k+1-|s|})$. 这样, 当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时, f_ε 的 $\leq k$ 阶的导数在 0 的某个邻域内要一致趋于 0. 于是 $T(f)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}T(f_\varepsilon)=0$.

今对一般的 f, 用 f_k 记 f 在原点的直到 k 阶的 Taylor 展式. 于是由上述已证的结果有

$$T(f)=T(f_k)+T(f-f_k)=T(f_k)+0=T(f_k).$$

这就证明了 T 是 f 在原点处且其阶 $\leq k$ 的导数的线性泛函的线性组合.

§ 14. 广义函数的直接积

我们首先证明一个逼近定理.

定理 1 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$, $y=(y_1,\cdots,y_m)\in R^m$ 以及 $z=x\times y=(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)\in R^{n+m}$. 则对于任意的函数 $\varphi(z)=\varphi(x,y)\in C_0^\infty(R^{n+m})$, 可以选取函数 $u_{ij}(x)\in C_0^\infty(R^n)$ 和 $v_{ij}(y)\in C_0^\infty(R^m)$ 使得函数序列

$$\varphi_i(z)=\varphi_i(x,y)=\sum_{j=1}^{k_i}u_{ij}(x)v_{ij}(y) \tag{1}$$

当 $i\to\infty$ 时，按 $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ 的拓扑趋于 $\varphi(z)=\varphi(x,y)$.

证明 我们对 $n=m=1$ 的情形来证明定理 1. 考虑

$$\Phi(x,y,t)=(2\sqrt{Tt})^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\eta)\exp(-((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)/4t)d\xi d\eta,$$

$$t>0;\quad \Phi(x,y,0)=\varphi(x,y). \tag{2}$$

用变数代换 $\xi_1=(\xi-x)/2\sqrt{t}$, $\eta_1=(\eta-y)/2\sqrt{t}$, 有

$$\Phi(x,y,t)=(\sqrt{\pi})^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\xi_1\sqrt{t},\ y+2\eta_1\sqrt{t})e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}d\xi_1 d\eta_1.$$

由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}d\xi_1 d\eta_1=\pi$, 于是有

$$|\Phi(x,y,t)-\varphi(x,y)|\leq(\sqrt{\pi})^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+2\xi\sqrt{t},\ y+2\eta\sqrt{t})-\varphi(x,y)|$$

$$Xe^{-\xi^2-\eta^2}d\xi d\eta\leq\pi^{-1}\left\{\iint_{\xi^2+\eta^2\geq T^2}+\iint_{\xi^2+\eta^2<T^2}\right\}.$$

因为函数 φ 是有界的且 $e^{-\xi^2-\eta^2}$ 在 R^n 内是可积的，所以右边第一项随 $T\uparrow\infty$ 而趋于 0. 右边第二项对于固定的 $T>0$, 随 $t\downarrow 0$ 而趋于 0. 于是我们证明了 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\Phi(x,y,t)=\varphi(x,y)$ 对 (x,y) 一致成立.

其次，因为 $\mathrm{supp}(\varphi)$ 是紧的，用分部积分法，有

$$\frac{\partial^{m+k}\Phi(x,y,t)}{\partial x^m\partial y^k}=\iint_{-\infty}^{\infty}(2\sqrt{\pi t})^{-2}\frac{\partial^{m+k}\varphi(\xi,\eta)}{\partial\xi^m\partial\eta^k}e^{-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]/4t}d\xi d\eta,\ t>0,$$

$$=\frac{\partial^{m+k}\varphi(x,y)}{\partial x^m\partial y^k},\ t=0.$$

因而象上面一样有

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\partial^{m+k}\Phi(x,y,t)}{\partial x^m\partial y^k}=\frac{\partial^{m+k}\varphi(x,y)}{\partial x^m\partial y^k}\text{对}(x,y)\text{一致成立}. \tag{3}$$

易知由(2)给出的 $\Phi(x,y,t)$ 在 $t>0$ 时，可以延拓为复变数 x 及 y 在 $|x|<\infty$, $|y|<\infty$ 内的一个全纯函数. 因此对任何给定的 $\gamma>0$ 函数 $\Phi(x,y,t)$ 对固定的 $t>0$ 可以展成 Taylor 级数

$$\Phi(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m}c_s(t)x^s y^{m-s}.$$

这个级数对于 $|x|\leqq\gamma$, $|y|\leqq\gamma$ 是绝对一致收敛的且可以逐项求导:

$$\frac{\partial^{m+k}\Phi(x,y,t)}{\partial x^m\partial y^k}=\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m_1}c_s(t)\frac{\partial^{m+k}x^s y^{m_1-s}}{\partial x^m\partial y^k}.$$

设 $\{t_i\}$ 是使 $t_i\downarrow 0$ 的一个正数序列. 由上所述，对每一个 t_i, 我们可以选取级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{s=0}^{m}c_s(t)x^s y^{m-s}$

的一段多项式 $P_i(x,y)$ 使得

$$\lim_{i\to\infty} P_i(x,y)=\varphi(x,y) \quad \text{按 } \mathfrak{E}(R^2) \text{ 的拓扑成立.}$$

即对 R^2 的任意紧子集 K，及每一微分算子 D^s 有 $\lim\limits_{n\to\infty} D^s P_i(x,y)=D^s\varphi(x,y)$ 在 K 上一致成立. 取 $\rho(x)\in C_0^\infty(R^1)$ 及 $\sigma(y)\in C_0^\infty(R^1)$ 使得在 $\operatorname{supp}(\varphi(x,y))$ 上有 $\rho(x)\sigma(y)=1$ 成立. 那么容易看出 $\varphi_i(x,y)=\rho(x)\sigma(y)P_i(x,y)$ 满足定理 1 的条件.

注 把属于 $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ 且可表示为

$$\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(x)\psi_j(x),\ \text{这里}\varphi_j(x)\in\mathfrak{D}(R^n),\ \psi_j(y)\in\mathfrak{D}(R^m),$$

的全体函数记为 $\mathfrak{D}(R^n)\times\mathfrak{D}(R^m)$. 上述定理 1 是讲 $\mathfrak{D}(R^n)\times\mathfrak{D}(R^m)$ 按 $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ 的拓扑在 $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ 内是稠密的. $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ 的线性子空间 $\mathfrak{D}(R^n)\times\mathfrak{D}(R^m)$ 赋予相对拓扑后称为 $\mathfrak{D}(R^n)$ 和 $\mathfrak{D}(R^m)$ 的直接积.

现在可以来定义分布的直接积了. 为了明显地标出函数 $\varphi(x)\in\mathfrak{D}(R^n)$ 的自变量为 $x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)$，我们把 $\mathfrak{D}(R^n)$ 记为 $(\mathfrak{D}_x)$. 也把由函数 $\psi(y)$，其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，所组成的空间 $\mathfrak{D}(R^m)$ 记为 $(\mathfrak{D}_y)$. 同样把函数 $X(x,y)$ 所组成的空间 $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ 记为 $(\mathfrak{D}_{x\times y})$. 为了指明分布 $T\in\mathfrak{D}(R^n)'=(\mathfrak{D}_x)'$ 是作用在 x 的函数 $\varphi(x)$ 上，因此把 T 记成 $T_{(x)}$.

定理 2 设 $T_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$, $S_{(y)}\in(\mathfrak{D}_y)'$. 则我们能够用一种且仅能用一种方法来定义一个分布 $W=W_{(x\times y)}\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$ 使得

对所有的 $u\in(\mathfrak{D}_x)$, $v\in(\mathfrak{D}_y)$ 有

$$W(u(x)v(y))=T_{(x)}(u(x))S_{(y)}(v(y)), \tag{4}$$

而对所有的 $\varphi(\mathfrak{D}_{x\times y})$ 有

$$W(\varphi(x,y))=S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x,y)))=T_{(x)}(S_{(y)}\varphi(x,y))) \tag{5}$$

(Fubini 定理).

注 分布 W 叫做 $T_{(x)}$ 和 $S_{(y)}$ 的直接积或张量积且记为

$$W=T_{(x)}\times S_{(y)}=S_{(y)}\times T_{(x)}. \tag{6}$$

定理 2 的证明 设 $\mathfrak{B}=\{\varphi(x,\ y)\}$ 是空间 $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ 的一个有界集类. 对于固定的 $y^{(0)}$，集合 $\{\varphi(x,y^{(0)});\varphi\in\mathfrak{B}\}$ 是 $(\mathfrak{D}_x)$ 的一个有界集. 可以证明

$$\{\psi(y^{(0)});\ \psi(y^{(0)})=T_{(x)}(\varphi(x,y^{(0)})),\ \varphi\in\mathfrak{B}\} \tag{7}$$

是 $\mathfrak{D}_{y(0)}$ 的有界集，今证明如下.

因为 $\mathfrak{B}$ 是 $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ 的有界集，所以存在紧集 $K_x\subset R^n$ 及紧集 $K_y\subset R^m$ 使得

$$\text{当 }\varphi\in\mathfrak{B}\text{ 时，有 }\operatorname{supp}(\varphi)\subseteq\{(x,y)\in R^{n+m};x\in K_x,y\in K_y\}\text{成立.}$$

于是由 $y^{(0)}\bar{\in} K_y$ 必导致 $\varphi(x,y^{(0)})=0$ 及 $\psi(y^{(0)})=T_{(x)}(\varphi(x,y^{(0)})=0$. 因此

$$\text{当 }\varphi\in\mathfrak{B}\text{ 时，有 }\operatorname{supp}(\psi)\subseteq K_y. \tag{8}$$

我们必须证明对于 R^n 内的任何微分算子 D_y 有

$$\sup_{y,\psi}|D_y\psi(y)|<\infty,\ \text{其中 }\psi(y)=T_{(x)}(\varphi(x,y)),\ \varphi\in\mathfrak{B}. \tag{9}$$

为此，例如说取 $D_{y_1}=\dfrac{\partial}{\partial y_1}$. 于是由 $T_{(x)}$的线性性质有

$$\frac{\psi(y_1+h, y_2, \cdots, y_m)-\psi(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{h}=T_{(x)}\left\{\frac{\varphi(x, y_1+h, y_2, \cdots, y_m)-\varphi(x, y_1, y_2, \cdots, y_m)}{h}\right\}.$$

当 φ 取遍 $\mathfrak{B}$ 时，作为变量 x 的具有参量 $y\in R^m$ 及 $h(|h|\leq 1)$ 的属于{ }的函数组成$(\mathfrak{D}_x)$的一个有界集，这点可由 $\mathfrak{B}$ 是$(\mathfrak{D}_{x\times y})$的有界集这一事实而得知. 于是令 $h\to 0$ 以及由第一章 § 8 的命题 1 便知(9)是真的.

因此，由同一个命题 1 知，数值集合

$$\{S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x, y))); \varphi\in\mathfrak{B}\} \tag{10}$$

是有界的. 所以同一个命题 1 说明我们通过

$$W^{(1)}(\varphi)=S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x, y))) \tag{11}$$

已经定义了一个分布 $W^{(1)}\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$. 类似地通过

$$W^{(2)}(\varphi)=T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x, y))) \tag{12}$$

定义了分布 $W^{(2)}\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$. 显然对于 $u\in(\mathfrak{D}_x)$和 $v\in(\mathfrak{D}_y)$有

$$W^{(1)}(u(x)v(y))=W^{(2)}(u(x)v(y))=T_{(x)}(u(x))S_{(y)}(v(y)). \tag{13}$$

所以由上述定理 1 及分布 $W^{(1)}$与 $W^{(2)}$的连续性可得 $W^{(1)}=W^{(2)}$. 令 $W=W^{(1)}=W^{(2)}$，就证明了定理 2.

第一章参考文献

关于局部凸线性拓扑空间及 Banach 空间，可参看 N. Bourbaki[2], A. Grothendieck[1], G. Köthe[1], S. Banach[1], N. Dunford-J. Schwartz[1]以及 E. Hille-R. S. Phillips[1]. 关于广义函数，参看L. Schwartz [1], I. M. Gelfand-G. E. Šilov[1], L. Hörmander[6]以及 A. Friedman[1].

第二章 Baire-Hausdorff 定理的应用

B-空间(或 F-空间)的完备性使我们能应用第 0 章中的 Baire-Hausdorff 定理，并得到诸如一致有界性定理，共鸣定理，开映射定理及闭图象定理这样一些泛函分析的基本定理. 这些定理本质上是属于 S. Banach[1]的. 广义函数的逐项可微性则是一致有界性定理的推论.

§1. 一致有界性定理及共鸣定理

定理 1(一致有界性定理) 设 X 为一个不能表成可数个闭的稀疏子集的并集的线性拓扑空间，而 $\{T_a;\ a\in A\}$ 为一族把 X 映入拟赋范线性空间 Y 内的连续映射. 我们假定对任意 $a\in A$ 及 $x, y\in X$, 有

$$\|T_a(x+y)\|\leq\|T_ax\|+\|T_ay\| \text{ 且当 } \alpha\geqq 0 \text{ 时 } \|T_a(\alpha x)\|=\|\alpha T_ax\|.$$

今若对每点 $x\in X$, 集合 $\{T_ax; a\in A\}$ 有界，则 $s\text{-}\lim\limits_{x\to 0}T_ax=0$ 对 $a\in A$ 一致成立.

证明 对给定的 $\varepsilon>0$ 及每个正整数 n, 考察集合 $X_n=\{x\in X;\sup\limits_{a\in A}\{\|n^{-1}T_ax\|+\|n^{-1}T_a(-x)\|\leqq\varepsilon\}$.

由 T_a 的连续性知每个 X_n 为闭. 又由 $\{\|T_ax\|; a\in A\}$ 的有界性假设，得 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$. 因而根据对 X 的假定，必有某 X_{n_0} 含有某一点 $x_0\in X$ 的一个邻域 $U=x_0+V$, 此处 V 为 X 的 0 点的一个适合 $V=-V$ 的邻域. 因此由 $x\in V$ 即导致 $\sup\limits_{a\in A}\|n_0^{-1}T_a(x_0+x)\|\leqq\varepsilon$, 所以我们有

$$\begin{aligned}\|T_a(n_0^{-1}x)\|=\|T_a(n_0^{-1}(x_0+x-x_0))\|&\leqq\|n_0^{-1}T_a(x_0+x)\|\\&+\|n_0^{-1}T_a(-x_0)\|\leqq 2\varepsilon \qquad \text{当 } x\in V, a\in A.\end{aligned}$$

于是定理得证，因为线性拓扑空间的数乘 αx 对变量 α 和 x 连续.

系 1(共鸣定理) 设 $\{T_a;\ a\in A\}$ 为一族映 B-空间 X 入赋范线性空间 Y 内的有界线性算子. 则由每一点 $x\in X$ 处的集合 $\{\|T_ax\|; a\in A\}$ 的有界性必导致集合 $\{\|T_a\|; a\in A\}$ 的有界性.

证明 由一致有界性定理，对任一 $\varepsilon>0$ 存在一 $\delta>0$, 使得当 $\|x\|\leqq\delta$ 时有 $\sup\limits_{a\in A}\|T_ax\|\leqq\varepsilon$. 因此 $\sup\limits_{a\in A}\|T_a\|\leqq\varepsilon/\delta$.

系 2 设 $\{T_n\}$ 为一序列映 B-空间 X 入赋范线性空间 Y 内的有界线性算子. 假设对每点 $x\in X$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=Tx$ 存在，则 T 亦为映 X 入 Y 的一有界线性算子，且有

$$\|T\|\leqq\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|. \tag{1}$$

证明 对每点 $x\in X$, 序列 $\{\|T_nx\|\}$ 的有界性由范数的连续性所保证. 于是由前系知 $\sup\limits_{n\geq 1}\|T_n\|<\infty$, 故 $\|T_nx\|\leqq\sup\limits_{n\geqslant 1}\|T_n\|\cdot\|x\|$ $(n=1, 2, \cdots)$. 再由范数的连续性，即得

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty}\|T_n x\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|T_n\|\cdot\|x\|,$$

这正是不等式(1). 最后, T 显然是线性的.

定义 如上得到的算子 T 称为序列 $\{T_n\}$ 的强极限, 记为 $T = s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n$.

下面我们证明一个关于有界线性算子的有界逆算子的存在性定理.

定理 2(C. Neumann) 设 T 为把 B-空间 X 映入其本身的有界线性算子. 假定 $\|I-T\|<1$, 此处 I 为单位算子, 即 $I\cdot x = x$. 则 T 有唯一的有界线性逆 T^{-1}, 它由 C. Neumann 级数给出

$$T^{-1}x = s\text{-}\lim_{n\to\infty}(I + (I-T) + (I-T)^2 + \cdots + (I-T)^n)x,\ x\in X. \tag{2}$$

证明 对任一 $x\in X$, 我们有

$$\left\|\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x\right\| \leq \sum_{n=0}^{k}\|(I-T)^n x\| \leq \sum_{n=0}^{k}\|(I-T)^n\|\|x\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|I-T\|^n\|x\|.$$

因 $\|I-T\|<1$, 上式右端收敛. 于是, 由 X 的完备性知, 有界线性算子 $s\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n$ 是确定的. 它是 T 的逆这一性质可由

$$T\cdot s\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x = s\text{-}\lim_{k\to\infty}(I-(I-T))\cdot\left(\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x\right) = x - s\text{-}\lim_{k\to\infty}(I-T)^{k+1}x = x,$$

及类似的方程 $s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n\right)Tx = x$ 而证实.

§ 2. Vitali-Hahn-Saks 定理

此定理涉及测度序列的收敛性, 并需要用到下列命题

命题 设 $(S, \mathfrak{B}, m)$ 为一测度空间. $\mathfrak{B}_0$ 为满足条件 $m(B)<\infty$ 的一切 $B\in\mathfrak{B}$ 的集合. 则按距离

$$d(B_1, B_2) = m(B_1\ominus B_2),\ 其中\ B_1\ominus B_2 = B_1\cup B_2 - B_1\cap B_2, \tag{1}$$

$\mathfrak{B}_0$ 就派生出一个距离空间 $(\mathfrak{B}_0)$, 其中我们把 $\mathfrak{B}_0$ 中满足 $m(B_1\ominus B_2)=0$ 的集合 B_1 与 B_2 视为同一集合. 因此, $(\mathfrak{B}_0)$ 中的一个点 $\bar{B}$ 便是满足条件 $m(B\ominus B_1)=0$ 的集合 $B_1\in\mathfrak{B}_0$ 所成的集类. 在上述距离(1)下, $(\mathfrak{B}_0)$ 成为一完备距离空间.

证明 若以 $C_B(s)$ 表示集合 B 的特征函数:

$$C_B(s) = 1\ 或\ 0,\ 视\ s\in B\ 或\ s\bar{\in} B\ 而定,$$

则

$$d(B_1, B_2) = \int_S |C_{B_1}(s) - C_{B_2}(s)|\, m(ds). \tag{2}$$

因此距离空间 $(\mathfrak{B}_0)$ 便可等同于 B-空间 $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 的一个子集. 令 $B_n\in\mathfrak{B}$, 而序列 $\{C_{B_n}(s)\}$ 满足条件

$$\lim_{n,k\to\infty} d(B_n, B_k) = \lim_{n,k\to\infty}\int_S |C_{B_n}(s) - C_{B_k}(s)|\, m(ds) = 0.$$

则正如在空间 $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 的完备性的证明中一样，我们可选一子序列 $\{C_{B_{n'}}(s)\}$ 使得 $\lim_{n'\to\infty} C_{B_{n'}}(s) = C(s)$ m-a. e. 存在，且 $\lim_{n'\to\infty}\int_S |C(s)-C_{B_{n'}}(s)|m(ds)=0$. 显然 $C(s)$ 是一集合 $B_\infty\in\mathfrak{B}_0$ 的特征函数，因而 $\lim_{n\to\infty} d(B_\infty, B_n)=0$.

这就证明了 $(\mathfrak{B}_0)$ 为一完备距离空间.

定理(Vitali-Hahn-Saks) 设 $(S, \mathfrak{B}, m)$ 为一测度空间，$\{\lambda_n(B)\}$ 为一全变差 $|\lambda_n|(S)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 均为有限的复测度序列. 假定每一 $\lambda_n(B)$ 为 m-绝对连续，且对任意 $B\in\mathfrak{B}$，$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(B)=\lambda(B)$ 存在并有限. 则 $\lambda_n(B)$ 的 m-绝对连续性对 n 是一致的. 即由 $\lim m(B)=0$ 必导致 $\lim\lambda_n(B)=0$ 对 n 一致地成立. 若 $m(S)<\infty$，则 $\lambda(B)$ 在 $\mathfrak{B}$ 上是 σ-可加的.

证明 由于 $\lambda_n(B)$ 的 m-绝对连续性，数值 $\lambda_n(B)$ 与类 $\bar{B}$ 中的集合 B 的选择无关，因而对每一 λ_n，可用等式 $\bar{\lambda}_n(\bar{B})=\lambda_n(B)$ 确定一个在 $(\mathfrak{B}_0)$ 上的单值函数 $\bar{\lambda}_n(\bar{B})$. $\bar{\lambda}_n(\bar{B})$ 的连续性由 $\lambda_n(B)$ 的 m-绝对连续性所保证，同时 $\bar{\lambda}_n(\bar{B})$ 的连续性必导致 $\lambda_n(B)$ 的 m-绝对连续性.

于是，对任一 $\varepsilon>0$，集合

$$F_k(\varepsilon)=\{\bar{B};\ \sup_{n\geq1}|\bar{\lambda}_k(\bar{B})-\bar{\lambda}_{n+k}(\bar{B})|\leqq\varepsilon\}$$

在 $(\mathfrak{B}_0)$ 中是闭的，同时根据假定 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n(B)=\lambda(B)$，即知 $(\mathfrak{B}_0)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(\varepsilon)$. 由于完备距离空间 $(\mathfrak{B}_0)$ 是第二纲的，故至少有一 $F_{k_0}(\varepsilon)$ 包含 $(\mathfrak{B}_0)$ 的一个非空开集. 这就表示必存在一 $\bar{B}_0\in(\mathfrak{B}_0)$ 和一正数 $\eta>0$ 使得

$$若\ d(B, B_0)<\eta\ 则必有\ \sup_{n\geq1}|\bar{\lambda}_{k_0}(\bar{B})-\bar{\lambda}_{k_0+n}(\bar{B})|\leqq\varepsilon.$$

另一方面，任一满足 $m(B)<\eta$ 的 $B\in\mathfrak{B}_0$. 必能表示成 $B=B_1-B_2$ 且符合条件 $d(B_1, B_0)<\eta$, $d(B_2, B_0)<\eta$. 例如我们可取 $B_1=B\cup B_0$, $B_2=B_0-B\cap B_0$. 因此，若 $m(B)\leqq\eta$ 且 $k\geqq k_0$，就有

$$\begin{aligned}|\lambda_k(B)|&\leqq|\lambda_{k_0}(B)|+|\lambda_{k_0}(B)-\lambda_k(B)|\\&\leqq|\lambda_{k_0}(B)|+|\lambda_{k_0}(B_1)-\lambda_k(B_1)|+|\lambda_{k_0}(B_2)-\lambda_k(B_2)|\leqq|\lambda_{k_0}(B)|+2\varepsilon.\end{aligned}$$

所以由 λ_{k_0} 的 m-绝对连续性及 $\varepsilon>0$ 的任意性可得，由 $m(B)\to0$ 必导致 $\lambda_n(B)\to0$ 对 n 一致地成立. 于是，特别地有，由 $m(B)\to0$ 必导致 $\lambda(B)\to0$. 另一方面，显然 λ 是有限可加的，即 $\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}B_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda(B_j)$. 因此，根据前面所证的 $\lim_{m(B)\to0}\lambda(B)=0$，易知当 $m(S)<\infty$ 时 λ 是 σ-可加的.

系 1 设 $\{\lambda_n(B)\}$ 为 S 上的一个对一切 n 其全变差 $|\lambda_n|(S)$ 均为有限的复测度序列. 若对一切 $B\in\mathfrak{B}$ 极限 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n(B)$ 存在并有限，则 $\{\lambda_n(B)\}$ 的 σ-可加性在下述意义下对 n 是一致的，即对 $\mathfrak{B}$ 中任一满足 $\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k=\varnothing$ 的集合的递减序列 $\{B_k\}$，对 n 一致地有 $\lim_{k\to\infty}\lambda_n(B_k)=0$.

证明 我们来考察

$$m(B)=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\mu_j(B)\quad 其中\ \mu_j(B)=\lambda_j(B)/|\lambda_j|(S).$$

m 的 σ-可加性系各 λ_j 的 σ-可加性的直接推论，且有 $0\leqq m(B)\leqq 1$. 每一 μ_j，从而每一 λ_j，都是 m-绝对连续的. 因此，根据前面的定理，由于 $\lim\limits_{k\to 0}m(B_k)=0$ 即有 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_n(B_k)=0$ 对 n 一致地成立.

系 2　即使 $m(S)=\infty$，定理中的 $\lambda(B)$ 仍然是 σ-可加且 m-绝对连续的.

§ 3. 广义函数序列的逐项可微性

广义函数序列的收敛性研究是很简单的. 事实上我们能证明

定理　设 $\{T_n\}$ 为一 $\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ 的广义函数序列. 设对一切 $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$，有限极限 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n(\varphi)=T(\varphi)$ 存在. 则 T 也是一 $\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ 的广义函数. 此时我们称 T 为序列 $\{T_n\}$ 在 $\mathfrak{D}(\Omega)'$ 中的极限，并记为 $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$.

证明　泛函 T 的线性性质是显然的. 今设 K 为 Ω 的任一紧子集. 则每一 T_n 在 F-空间 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 上定义了一个线性泛函. 并且，这些线性泛函均是连续的，因为可由第一章 § 8 中命题 1 证明它们在 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 的每一有界集上是有界的. 因此，由一致有界性定理，T 必定是 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 上的线性泛函，并且它在 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 的每一有界集上为有界. 从而 T 是每一 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 上的连续线性泛函. 因为 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 是全体 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 的归纳极限，因而 T 必定是 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函.

系（逐项可微性定理）　设 $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$. 则对任一微分算子 D^j，成立 $D^jT=\lim\limits_{n\to\infty}D^jT_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$.

证明　$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T(\mathfrak{D}(\Omega)')$ 导致对任意 $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n((-1)^{|j|}D^j\varphi)=T((-1)^{|j|}D^j\varphi)$. 因此我们有

$$(D^jT)(\varphi)=\lim_{n\to\infty}(D^jT_n)(\varphi)\quad 对一切\ \varphi\in\mathfrak{D}(\Omega).$$

§ 4. 奇性凝聚原理

Baire-Hausdorff 定理可用来证明具有各种奇异特性的函数的存在性. 例如，我们将证明没有有限导数的连续函数的存在性.

Weierstrass **定理**　在区间 [0, 1] 上存在这样的实值连续函数 $x(t)$，它在区间 [0, 1/2] 上任一点均无有限微商 $x'(t_0)$.

证明　函数 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 有有限右上导数和右下导数的充要条件为：存在正整数 n 使得

$$\sup_{2^{-1}>h>0}h^{-1}|x(t_0+h)-x(t_0)|\leqq n.$$

今以 M_n 表示这样一些函数 $x(t)\in C[0,1]$ 的全体，这些函数 $x(t)$ 在 [0, 1/2] 中的某点 t_0 处满足上述不等式；其中 t_0 可随 $x(t)$ 的不同而不同. 我们只须证明每一 M_n 是 $C[0, 1]$ 的一稀疏子集

就行了．因若此，则集合 $C[0,1]-\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 必非空，这是因为根据 Baire-Hausdorff 定理，完备距离空间 $C[0,1]$ 不是第一纲集．

根据闭区间 $[0,1/2]$ 的紧性和空间 $C[0,1]$ 的范数；易知 M_n 在 $C[0,1]$ 中闭．其次，对任一多项式 $z(t)$ 及数 $\varepsilon>0$，我们恒可以找到这样的函数 $y(t)\in C[0,1]-M_n$，使得 $\sup\limits_{0\leq t\leq 1}|z(t)-y(t)|=\|z-y\|\leqq\varepsilon$；例如，我们可以取形如锯齿线图形所表达的连续函数，使得上述条件均满足．于是，由 Weierstrass 多项式逼近定理，M_n 是 $C[0,1]$ 中的稀疏集．

S. Banach[1] 和 H. Steinhaus 已证明了奇性凝聚原理(见后面)，它的基础是下面的

定理 (S. Banach) 给定一映 B-空间 X 入赋范线性空间 Y_n 内的有界线性算子序列 $\{T_n\}$．则集合

$$B=\{x\in X;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_nx\|<\infty\}$$

或者重合于 X，或者是 X 的一个第一纲集．

证明 在 B 是第二纲集的假设下，我们将证明 $B=X$．由 B 的定义，只要 $x\in B$，我们便有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|k^{-1}T_nx\|=0$．因此，对任一 $\varepsilon>0$，

$$B\subseteqq\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k \quad 其中\ B_k=\{x\in X;\ \sup_{n\geq 1}\|k^{-1}T_nx\|\leqq\varepsilon\}.$$

由于全体 T_n 的连续性，每一 B_k 是闭集．因此，若 B 是第二纲集，则有某 B_{k_0} 含有一正半径的球．这就是说，存在一 $x_0\in X$ 和一数 $\delta>0$，只要 $\|x-x_0\|\leqq\delta$，必有 $\sup\limits_{n\geq 1}\|k_0^{-1}T_nx\|\leqq\varepsilon$．于是令 $y=x-x_0$，当 $\|y\|\leqq\delta$ 时，我们便有 $\|k_0^{-1}T_ny\|\leqq\|k_0^{-1}T_nx\|+\|k_0^{-1}T_nx_0\|\leqq 2\varepsilon$．因此

$$\sup_{n\geq 1,\ \|z\|\leq k_0^{-1}\delta}\|T_nz\|\leqq 2\varepsilon,$$

故 $B=X$．

系 (奇性凝聚原理) 设 $\{T_{p,q}\}$ $(q=1,2,\cdots)$ 为一序列把 B-空间 X 映入赋范线性空间 Y_p $(p=1,2,\cdots)$ 内的有界线性算子．假定对每个 p 存在一 $x_p\in X$ 使得 $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}}\|T_{p,q}x_p\|=\infty$．则集合

$$B=\{x\in X;\ \overline{\lim_{q\to\infty}}\|T_{p,q}x\|=\infty \quad 对一切\ p=1,2,\cdots\}$$

是第二纲的．

证明 根据假设和前面的定理，对每一 p，集合 $B_p=\{x\in X;\ \overline{\lim\limits_{q\to\infty}}\|T_{p,q}x\|<\infty\}$ 是第一纲的，因而 $B=X-\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}B_p$ 必定是第二纲的．

上述系给出了寻找具有许多奇性的函数的一个普遍方法．

例 存在一个周期为 2π 的实值连续函数 $x(t)$，它的 Fourier 展式的部分和：

$$f_q(x;t)=\sum_{k=0}^{q}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)K_q(s,t)\,ds$$

$$此处\ K_q(s, t) = \sin((q+2^{-1})(s-t))/2\sin 2^{-1}(s-t), \tag{1}$$

满足条件

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} |f_q(x; t)| = \infty \quad 在一集合\ P(\subsetneq[0, 2\pi])上, 此集合具有连续统的势. \tag{2}$$

此外, 集合 P 可以选择得使它包含任一可数序列 $\{t_j\}\subseteq[0, 2\pi]$.

证明 周期为 2π 的实值连续函数全体按范数 $\|x\|=\sup_{0\le t\le 2\pi}|x(t)|$ 构成一实 B-空间 $C_{2\pi}$. 如式(1)所示, 对一给定的 $t_0\in[0, 2\pi]$, $f_q(x; t_0)$ 为 $C_{2\pi}$ 上的一有界线性泛函. 此外, 这个泛函 $f_q(x; t_0)$ 的范数等于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_q(s, t_0)|\, ds = 函数\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{t} K_q(s, t_0)的全变差. \tag{3}$$

易知, 对固定的 t_0, 当 $q\to\infty$ 时(3)趋于 ∞.

所以, 若我们取一可数稠密集 $\{t_j\}\subseteq[0, 2\pi]$, 根据前面的系, 集合

$$B=\{x\in C_{2\pi};\ \overline{\lim_{q\to\infty}}|f_q(x; t)|=\infty \ \ 当\ t=t_1, t_2, \cdots\}$$

是第二纲的. 于是, 根据空间 $C_{2\pi}$ 的完备性, 集合 B 非空. 我们来证明, 对任一 $x\in B$, 集合

$$P=\{t\in[0, 2\pi];\ \overline{\lim_{q\to\infty}}|f_q(x; t)|=\infty\}$$

有连续统的势. 为此, 令

$$F_{m,q}=\{t\in[0, 2\pi];\ |f_q(x; t)|\le m\},\ F_m=\bigcap_{q=1}^{\infty}F_{m,q}.$$

由 $x(t)$ 和三角函数的连续性知集合 $F_{m,q}$, 从而集合 F_m, 均是 $[0, 2\pi]$ 的闭集. 如果我们能证明 $\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m$ 是 $[0, 2\pi]$ 的一个第一纲集. 则集合 $P=([0, 2\pi]-\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m)\ni\{t_j\}$ 必将是第二纲的, 作为 $[0, 2\pi]$ 中的第二纲集, P 不可能是可数的, 故根据连续统假设, P 必有连续统的势.

最后我们应该来证明每一 F_m 是 $[0, 2\pi]$ 中的第一纲集. 设某 F_{m_0} 是第二纲的, 则 $[0, 2\pi]$ 的闭集 F_{m_0} 必包含 $[0, 2\pi]$ 的一闭区间 $[\alpha, \beta]$. 这导致对一切 $t\in[\alpha, \beta]$ 有 $\sup_{q\ge 1}|f_q(x; t)|\le m_0$, 而这是与 P 包含 $[0, 2\pi]$ 的一稠密集 $\{t_j\}$ 矛盾的.

注 我们能证明 P 具有连续统的势而无须求助于连续统假设. 例如可参看 F. Hausdorff[1].

§5. 开映射定理

定理 (S. Banach 的开映射定理) 设 T 为映 F 空间 X 到 F 空间 Y 上的一连续线性算子. 则 T 把 X 的每一开集映成 Y 的开集.

为了证明, 我们先证

命题 令 X, Y 为线性拓扑空间. 设 T 为映 X 入 Y 内的连续线性算子, 并假定 T 的值域 $R(T)$ 是 Y 中的一个第二纲集. 则对 X 的 0 点的每一邻域 U, 必有相应的 Y 的 0 点的某邻域 V 使得

$V \subseteq (TU)^a$.

证明 令 W 为 X 的 0 点的满足条件 $W=-W$, $W+W\subseteq U$ 的一个邻域. 对每一 $x\in X$, 有 $x/n\to 0$(当 $n\to\infty$), 故对充分大的 n 有 $x\in nW$. 于是 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}(nW)$, 所以 $R(T)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(nW)$. 由于 $R(T)$ 是 Y 中的第二纲集, 从而存在某一正整数 n_0 使 $(T(n_0W))^a$ 包含一非空开集. 又由于 $(T(nW))^a=n(T(W))^a$, 且因 $n(T(W))^a$ 与 $(T(W))^a$ 是相互同胚①的, 故 $(T(W))^a$ 也包含一非空开集. 令 $y_0=Tx_0, x_0\in W$, 是此开集的一个点. 由于 $x\to -x_0+x$ 是一同胚映射, 我们即知存在 Y 的 0 点的这样一个邻域 V, 使得 $V\subseteq -y_0+(T(W))^a$. $-y_0+T(W)$ 的元可表成 $-y_0+Tw=T(w-x_0)$, 其中 $w\in W$. 但 $w-x_0\in W+W\subseteq U$, 这是因为 W 是 X 的 0 点的这样一个邻域, 它满足条件 $W=-W$ 和 $W+W\subseteq U$.

所以, $-y_0+T(W)\subseteq T(U)$, 于是通过取闭包, 即有 $-y_0+(T(W))^a\subseteq(T(U))^a$, 故 $V\subseteq -y_0+(T(W))^a\subseteq(T(U))^a=(TU)^a$.

定理的证明 因 Y 为一完备距离空间, 故它是第二纲的. 因此, 根据前面的命题, X 的 0 点的邻域的 T 象的闭包含有 Y 的 0 点的邻域.

以 $X_\varepsilon, Y_\varepsilon$ 分别表示 X, Y 中的中心在原点, 半径为 $\varepsilon>0$ 的球. 令 $\varepsilon_i=\varepsilon/2^i\ (i=0,1,2,\cdots)$. 则依据我们前面叙述的事实, 知存在一正数序列 $\{\eta_i\}$ 使得

$$\lim_{i\to\infty}\eta_i=0 \quad 且 \quad Y_{\eta_i}\subseteq(TX_{\varepsilon_i})^a \quad (i=0,1,2,\cdots). \tag{1}$$

令 $y\in Y_{\eta_0}$ 为任一点. 我们来证明存在一 $x\in X_{2\varepsilon_0}$ 使得 $Tx=y$. 取 $i=0$, 由(1)知存在 $x_0\in X_{\varepsilon_0}$ 使得 $\|y-Tx_0\|<\eta_1$. 由于 $(y-Tx_0)\in Y_{\eta_1}$, 取 $i=1$ 又由(1)知存在 $x_1\in X_{\varepsilon_1}$ 使 $\|y-Tx_0-Tx_1\|<\eta_2$. 重复此过程, 我们找到一序列 $\{x_i\}$, 其中 $x_i\in X_{\varepsilon_i}$, 使得

$$\left\|y-T\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)\right\|<\eta_{n+1} \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

我们有 $\left\|\sum_{k=m+1}^{n}x_k\right\|\leqq\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|\leqq\sum_{k=m+1}^{n}\varepsilon_k\leqq\left(\sum_{k=m+1}^{n}2^{-k}\right)\varepsilon_0$, 所以叙列 $\left\{\sum_{k=0}^{n}x_k\right\}$ 为一Cauchy 叙列. 于是由 X 的完备性, 即知 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x_k=x\in X$ 存在. 此外

$$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}x_k\right\|\leqq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\|x_k\|\leqq\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\right)\varepsilon_0=2\varepsilon_0.$$

由于 T 的连续性, 必定得到 $y=Tx$. 因此, 我们就证明了任意一个球 $X_{2\varepsilon_0}$ 必被 T 映射到一个含有球 Y_{η_0} 的集合上.

作了这些准备后, 今设 G 为 X 中一非空开集且 $x\in G$. 令 U 为 X 的 0 点的满足 $x+U\subseteq G$ 的一个邻域. 又令 V 为 Y 的 0 点的满足 $T(U)\supseteq V$ 的一个邻域. 那么, $TG\supseteq T(x+U)=Tx+TU\supseteq Tx$

---

① 一个映拓扑空间 S_1 到拓扑空间 S_2 上的双方单值的映射 M 称为一同胚映射, 如果 M 和 M^{-1} 均是将开集映成开集.

$+V$. 故 TG 含有它本身的任一点的一个邻域. 这就证明了 T 映 X 的开集成 Y 的开集.

定理的系 若映一 F-空间到一 F-空间上的连续线性算子 T 是一个双方单值映射, 则逆算子 T^{-1} 也是一连续线性算子.

§6. 闭图象定理

定义 1 设 X, Y 为同一数域上的线性拓扑空间. 则积空间 $X\times Y$ 按

$$\{x_1, y_1\}+\{x_2, y_2\}=\{x_1+x_2, y_1+y_2\}, \alpha\{x, y\}=\{\alpha x, \alpha y\},$$

成为一线性空间. 如果我们定义如下形状的集合为开集:

$$G_1\times G_2=\{(x, y); x\in G_1, y\in G_2\},$$

其中 G_1, G_2 分别是 X, Y 的开集, 则积空间也是一拓扑线性空间. 特别, 如果 X, Y 是拟赋范线性空间, 则按拟范数

$$\|\{x, y\}\|=(\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2}, \tag{1}$$

$X\times Y$ 亦是拟赋范线性空间.

命题 1 若 X 和 Y 为 B-空间(F-空间), 则 $X\times Y$ 亦是 B-空间(F-空间).

证明 因为 $s\text{-}\lim\{x_n, y_n\}=\{x, y\}$ 等价于 $s\text{-}\lim x_n=x$, $s\text{-}\lim y_n=y$, 结论显然.

定义 2 映 $D(T)\subseteq X$ 入 Y 内的线性算子 T 的图象 $G(T)$ 是积空间 $X\times Y$ 中的集合 $\{\{x, Tx\}; x\in D(T)\}$. 设 X, Y 是拓扑线性空间. 当其图象 $G(T)$ 构成 $X\times Y$ 的一闭线性子空间时, 则 T 称为闭线性算子. 如果 X 和 Y 是拟赋范线性空间. 则映 $D(T)\subseteq X$ 入 Y 内的线性算子 T 是闭的, 当且仅当下面的条件满足:

$$\{x_n\}\subseteq D(T),\ s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n=x \text{ 以及 } s\text{-}\lim Tx_n=y \text{ 导致 } x\in D(T) \text{ 且 } Tx=y. \tag{2}$$

因此闭线性算子的概念是有界线性算子概念的拓广. 映 $D(T)\subseteq X$ 入 Y 内的线性算子称为能闭的(closable)或 pre-闭的(pre-closed), 如果它的图象 $G(T)$ 在 $X\times Y$ 中的闭包是一线性算子(例如说 S, 它映 $D(S)\subseteq X$ 入 Y 内)的图象.

命题 2 如果 X, Y 是拟赋范线性空间, 则 T 是能闭的, 当且仅当下列条件满足:

$$\{x_n\}\subseteq D(T),\ s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n=0 \text{ 且 } s\text{-}\lim_{n\to\infty} Tx_n=y \text{ 导致 } y=0. \tag{3}$$

证明 "仅当"部分是显然的, 这是因为 $G(T)$ 在 $X\times Y$ 中的闭包是一线性算子 S 的图象 $G(S)$, 所以 $y=S\cdot 0=0$. "当"的部分证明如下. 我们根据下列条件定义一线性算子 S, 并称 S 是 T 的最小闭扩张:

$x\in D(S)$ 当且仅当存在一序列 $\{x_n\}\subseteq D(T)$ 使得

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n=x \quad \text{和} \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} Tx_n=y \quad \text{存在; 并且我们定义 } Sx=y. \tag{4}$$

根据条件(3), 值 y 被 x 所唯一确定. 我们只须证明 S 是闭的. 令 $w_n\in D(S)$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} w_n=w$ 且 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Sw_n=u$. 则存在一序列 $\{x_n\}\subseteq D(T)$ 使得 $\|w_n-x_n\|\leq n^{-1}$, $\|Sw_n-Tx_n\|\leq n^{-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$. 因而 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} w_n=w$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Sw_n=u$, 故 $w\in D(S)$, $Sw=u$.

一个闭而不连续的算子的例 设 $X=Y=C[0,\ 1]$. 令D为其导数$x'(t)\in X$的一切函数$x(t)\in X$的集合,令T为在$D(T)=D$上按关系$Tx=x'$定义的线性算子. 这个T不是连续的,因为对$x_n(t)=t^n$

$$\|x_n\|=1,\ \|Tx_n\|=\sup_{0\le t\le 1}|x_n'(t)|=\sup_{0\le t\le 1}|nt^{n-1}|=n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

但T是闭的. 事实上,设$\{x_n\}\subseteq D(T)$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$且$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=y$. 则$x_n'(t)$一致收敛于$y(t)$,同时$x_n(t)$一致收敛于$x(t)$. 故$x(t)$必可微且具有连续导数$y(t)$. 这就证明了$x\in D(T)$且$Tx=y$.

一些能闭算子的例 令D_x为其系数$c_j(x)\in C^k(\Omega)$的一线性微分算子

$$D_x=\sum_{|j|\le k}c_j(x)D^j, \tag{5}$$

其中Ω是R^n中的一开域. 今考察函数$f(x)\in L^2(\Omega)\cap C^k(\Omega)$中满足条件$D_xf(x)\in L^2(\Omega)$的这样一些函数的全体$D$. 我们按关系$(Tf)(x)=D_xf(x)$定义一个映$D(T)=D\subseteq L^2(\Omega)$入$L^2(\Omega)$内的线性算子$T$. 则$T$是能闭的. 因为, 令$\{f_h\}\subseteq D$且使$s\text{-}\lim\limits_{h\to\infty}f_h=0$, $s\text{-}\lim\limits_{h\to\infty}D_xf_h=g$满足. 则对任一$\varphi(x)\in C_0^k(\Omega)$,由分部积分得

$$\int_\Omega D_xf(x)\cdot\varphi(x)dx=\int_\Omega f(x)D_x'\varphi(x)dx, \tag{6}$$

其中D_x'是D_x的形式伴随微分算子:

$$D_x'\varphi(x)=\sum_{|j|\le k}(-1)^{|j|}D^j(c_j(x)\varphi(x)) \tag{7}$$

既然分部积分中的被积出项由于$\varphi(x)\in C_0^k(\Omega)$而消去, 就得到公式(6). 于是由$L^2(\Omega)$中数积的连续性,只要在(6)中取$f=f_h$并令$h\to\infty$,便得到

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx=\int_\Omega 0\cdot D_x'\varphi(x)dx=0. \tag{8}$$

由于$\varphi(x)\in C_0^k(\Omega)$是任意的,必定有$g(x)=0$ a. e.,即表示在$L^2(\Omega)$中$g=0$.

命题 3 映$D(T)\subseteq X$入Y内的闭线性算子的逆T^{-1},如果存在,则必是闭线性算子.

证明 T^{-1}的图象是积空间$Y\times X$中的集合$\{\{Tx,\ x\};x\in D(T)\}$. 当我们回忆一下这样一个事实,即映射$\{x,\ y\}\to\{y,\ x\}$是$X\times Y$到$Y\times X$上的同胚映射时,命题便得证.

下面我们证明 Banach 的闭图象定理:

定理 1 映F-空间X入F-空间Y内的闭线性算子是连续的.

证明 T的图象$G(T)$是F-空间$X\times Y$的闭线性子空间. 于是根据$X\times Y$的完备性, $G(T)$是一F-空间. 由关系$U\{x,\ Tx\}=x$确定的映射U是映F-空间$G(T)$到F-空间X上的双方单值的连续线性变换. 于是根据开映射定理, U的逆U^{-1}是连续的. 由关系$V\{x,\ Tx\}=Tx$确定的线性算子V显然是映$G(T)$到$R(T)\subseteq Y$上的连续算子. 所以$T=VU^{-1}$是由X入Y中连续的.

下面的关于两个线性算子的比较定理是属于 L. Hörmander 的:

定理 2 设$X_i\,(i=0,1,2;X_0=X)$是B-空间, $T_i\,(i=1,2)$是映$D(T_i)\subseteq X$入X_i内的线性算子.

若 T_1 为闭, T_2 能闭且使得 $D(T_1)\subseteq D(T_2)$, 则存在常数 C 使得

$$\|T_2x\|\leqq C(\|T_1x\|^2+\|x\|^2)^{1/2} \quad 对一切\ x\in D(T_1). \tag{9}$$

证明 T_1 的图象 $G(T_1)$ 是 $X\times X_1$ 的闭子空间. 于是映射

$$G(T_1)\ni\{x, T_1x\}\to T_2x\in X_2 \tag{10}$$

是映 B-空间 $G(T_1)$ 入 B-空间 X_2 中的线性算子. 我们来证明这个映射是闭的. 设 $\{x_n, T_1x_n\}$ 在 $G(T_1)$ 中 s-收敛且 T_2x_n 在 X_2 中 s-收敛. 由于 T_1 为闭, 从而存在元素 $x\in D(T_1)$ 使得 $x=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 且 $T_1x=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_1x_n$. 根据假设知 $x\in D(T_2)$, 又由于 T_2 能闭, 所以存在的 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_2x_n$ 只能是 T_2x. 于是映射(10)是闭的, 故由闭图象定理, 它必连续. 这就证明了(9).

§7. 闭图象定理的一个应用(Hörmander 定理)

Laplace 方程

$$\Delta u=f\in L^2$$

的任一分布解 $u\in L^2$, 在 $f\in C^\infty$ 的情况下由这样的一个函数所确定, 这个函数只须在它的定义域的零测集上校正一下它的值便等于一个 C^∞ 的函数. 这个结果作为 Weyl 引理而为人们熟知, 它在位势理论的近代研究中起了基本的作用. 请参看 H. Weyl[1]. 有大量的关于 Weyl 引理的拓广的文献. 在这些工作中, L. Hörmander[1]的研究看来是最卓越的. 我们将从他的亚椭圆性 (hypoellipticity)定义开始我们的论述.

定义 1 设 Ω 为 R^n 的一开区域. 若对在 Ω 中具有紧闭包的任一开子域 Ω' 均有 $\int_{\Omega'}|u(x)|^2dx<\infty$, 则称函数 $u(x)(x\in\Omega)$ 属于 $L^2_{loc}(\Omega)$. 一常系数线性偏微分算子 $P(D)$:

$$\begin{cases}P(D)=P\left(\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right), \ 其中\\ P(\xi)=P(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\ 是\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\ 的一个多项式.\end{cases} \tag{1}$$

称为亚椭圆的, 如果 $P(D)u=f\ (f\in C^\infty)$ 的每一分布解 $u\in L^2_{loc}(\Omega)$ 在子区域的零测集上改正它的值后是 C^∞ 的函数.

定理 (Hörmander) 若 $P(D)$ 为亚椭圆的, 则对任一大的正常数 C_1 存在一正常数 C_2, 使得对代数方程 $P(\zeta)=0$ 的任一解 $\zeta=\xi+i\eta$ 成立

$$|\zeta|=\left(\sum_{j=1}^n|\zeta_j|^2\right)^{1/2}\leqq C_1\ 若\ |\eta|=\left(\sum_{j=1}^n|\eta_j|^2\right)^{1/2}\leqq C_2. \tag{2}$$

证明 令 U 是 $P(D)u=0$ 的分布解 $u\in L^2(\Omega')$ 的全体, 亦即是满足下列条件的 $u\in L^2(\Omega')$ 的全体

$$\int_{\Omega'}u\cdot P'(D)\varphi dx=0 \quad 对一切\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega'), \tag{3}$$

其中 $P(D)$ 的伴随微分算子 $P'(D)$ 由下列关系确定

$$P'(\xi)=P(-\xi_1, -\xi_2, \cdots, -\xi_n). \tag{4}$$

我们能证明U是$L^2(\Omega')$的闭线性子空间. 由微分算子$P(D)$的线性性质，显然得到U是线性空间. 令U的一个序列$\{u_h\}$为$L^2(\Omega')$中适合条件$s\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} u_h=u$的序列. 则由$L^2(\Omega')$中数积的连续性知

$$0=\lim_{h\to\infty}\int_{\Omega'} u_h\cdot P'(D)\varphi dx=\int_{\Omega'} u\cdot P'(D)\varphi dx, \text{ 亦即 } u\in U.$$

故U是$L^2(\Omega')$的一闭线性子空间,从而可视为一B-空间.

由于$P(D)$为亚椭圆的,我们可以认为每一$u\in U$在Ω'中是C^∞的. 令Ω_1'为任一在Ω'中具有紧闭包的开子域. 则对任一$u\in U$，函数$\frac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$在Ω'中是C^∞的,利用前一节用到的论证,映射

$$U\ni u\to\frac{\partial u}{\partial x_k}\in L^2(\Omega_1') \qquad (k=1, 2, \cdots, n)$$

是一闭线性算子. 于是,根据闭图象定理,存在常数C使得

$$\int_{\Omega_1}\sum_{k=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2 dx\leq C\int_{\Omega'}|u|^2 dx, \text{ 对一切 } u\in U.$$

如果我们利用此不等式于函数$u(x)=e^{i\langle x,\zeta\rangle}$，其中$\zeta=\xi+i\eta=(\xi_1+i\eta_1, \xi_2+i\eta_2, \cdots, \xi_n+i\eta_n)$是$P(\zeta)=0$的一个解,且$\langle x, \zeta\rangle=\sum\limits_{j=1}^n\langle x_j, \zeta_j\rangle$,即得

$$\sum_{k=1}^n|\zeta_k|^2\cdot\int_{\Omega_1'} e^{-2\langle x,\eta\rangle}dx\leq C\int_{\Omega'} e^{-2\langle x,\eta\rangle}dx.$$

所以,当$|\eta|$为有界时,$|\xi|$必有界.

注　以后我们将证明条件(2)导致$P(D)$的亚椭圆性. 这个结果同样是属于Hörmander的. 尤其可见Weyl引理是Hörmander结果的一个平凡的推论. 事实上，代数方程$-\sum\limits_{j=1}^n\zeta_j^2=0$的根满足(2).

第二章参考文献

S. Banach[1], N. Bourbaki[2], N. Dunford-J. Schwartz[1], E. Hille-R. S. Phillips[1]和L. Hörmander[6].

第三章　正交投影及 F. Riesz 表示定理

§1. 正交投影

在 pre-Hilbert 空间中我们可以引入两个矢量的正交性概念. 正是由于这个事实, Hilbert 空间可被等同于它的对偶空间, 亦即等同于有界线性泛函的空间. 这个结果就是 F. Riesz 表示定理, 而 Hilbert 空间的整个理论是奠基在这个定理上的.

定义 1　设 x, y 为 pre-Hilbert 空间 X 的矢量. 若 $(x, y)=0$, 我们就称 x 正交于 y, 并记为 $x \perp y$; 若 $x \perp y$ 则 $y \perp x$, 且 $x \perp x$ 当且仅当 $x=0$. 设 M 为 pre-Hilbert 空间 X 的一子集, 我们以 $M^{\perp}$ 表示 X 中正交于 M 中每一矢量 m 的矢量的全体.

定理 1　设 M 为 Hilbert 空间 X 的一闭线性子空间. 则 $M^{\perp}$ 亦是 X 的一闭线性子空间, 并称 $M^{\perp}$ 为 M 的正交补. 任一矢量 $x \in X$ 能唯一分解成如下形式

$$x=m+n, \text{ 其中 } \quad m \in M \quad \text{ 而 } \quad n \in M^{\perp}. \tag{1}$$

(1)中的元素 m 称为 x 在 M 上的正交投影, 并记为 $P_M x$; P_M 称为在 M 上的投影算子或投影子 (projector). 因此, 注意到 $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$ 这一事实, 即得

$$x=P_M x+P_{M^{\perp}} x, \quad \text{即} \quad I=P_M+P_{M^{\perp}}. \tag{1'}$$

证明　$M^{\perp}$ 的线性性质是数积 (x, y) 关于 x 的线性性质的推论. 由于数积的连续性, $M^{\perp}$ 是闭的. 因为一正交于它本身的矢量必是零矢量, 所以分解式(1)的唯一性是显然的.

为了证明分解式(1)的可能性, 我们可以假设 $M \neq X$ 且 $x \overline{\in} M$, 因若 $x \in M$, 只须令 $m=x$, $n=0$ 我们得到平凡分解. 因此, 由于 M 为闭且 $x \overline{\in} M$, 我们得

$$d=\inf_{m \in M}\|x-m\|>0.$$

令 $\{m_n\} \subseteq M$ 为一极小化序列, 亦即 $\lim\limits_{n \to \infty}\|x-m_n\|=d$. 则 $\{m_n\}$ 是一 Cauchy 序列. 因根据 $\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=2(\|a\|^2+\|b\|^2)$ 在任一 pre-Hilbert 空间为真(见第一章 §5 式(1))这一事实, 即得

$$\begin{aligned}
\|m_k-m_n\|^2 &= \|(x-m_n)-(x-m_k)\|^2=2(\|x-m_n\|^2+\|x-m_k\|^2)-\|2x-m_n-m_k\|^2 \\
&=2(\|x-m_n\|^2+\|x-m_k\|^2)-4\|x-(m_n+m_k)/2\|^2 \\
&\leqq 2(\|x-m_n\|^2+\|x-m_k\|^2)-4d^2 (\text{因为} (m_n+m_k)/2 \in M) \\
&\to 2(d^2+d^2)-4d^2=0, \qquad \text{当 } k, n \to \infty.
\end{aligned}$$

根据 Hilbert 空间 X 的完备性, 必存在一元素 $m \in X$ 使得 $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} m_n=m$. 由于 M 闭, 知 $m \in M$. 同样, 根据范数的连续性, 我们得 $\|x-m\|=d$.

记 $x=m+(x-m)$. 命 $n=x-m$, 我们断言 $n \in M^{\perp}$. 对任一 $m' \in M$ 和任一实数 α, 知 $(m+\alpha m') \in M$, 所以

$$d^2 \leqq \|x-m-\alpha m'\|^2 = (n-\alpha m', n-\alpha m')$$
$$= \|n\|^2 - \alpha(n, m') - \alpha(m', n) + \alpha^2\|m'\|^2.$$

由于$\|n\|=d$，上式导致对一切实数α有$0 \leqq -2\alpha Re(n, m') + \alpha^2\|m'\|^2$，于是对每一$m' \in M$必$Re(n, m')=0$. 以$im'$代替$m'$，我们得$Im(n, m')=0$，故对每一$m' \in M$必$(n, m')=0$.

系 1 对 Hilbert 空间X的闭线性子空间M，成立$M = M^{\perp\perp} = (M^\perp)^\perp$.

定理 2 投影子$P = P_M$是有界线性算子，且

$$P = P^2 \qquad (P \text{ 的幂等性}), \tag{2}$$

$$(Px, y) = (x, Py) \ (P \text{ 的对称性}). \tag{3}$$

反之，一个映 Hilbert 空间X入X内的满足条件(2)和(3)的有界线性算子P是在$M=R(P)$上的投影子.

证明 由正交投影的定义，(2)是显然的. 又由(1′)及$P_M x \perp P_{M^\perp} y$知

$$(P_M x, y) = (P_M x, P_{M^\perp} y + P_M y) = (P_M x, P_M y)$$
$$= (P_M x + P_{M^\perp} x, P_M y) = (x, P_M y).$$

其次令$y = x+z$, $x \in M$, $z \in M^\perp$及$w = u+v$, $u \in M$, $v \in M^\perp$，则$y+w = (x+u)+(z+v)$，且$x+u \in M$，$(z+v) \in M^\perp$，故根据分解式(1)的唯一性得$P_M(y+w) = P_M y + P_M w$；相仿可得$P_M(\alpha y) = \alpha P_M(y)$. 算子$P_M$的有界性因

$$\|x\|^2 = \|P_M x + P_{M^\perp} x\|^2 = (P_M x + P_{M^\perp} x, P_M x + P_{M^\perp} x)$$
$$= \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2 \geqslant \|P_M x\|^2$$

而得证. 特别，我们有

$$\|P_M\| \leq 1.$$

定理之逆部分证明如下. 由于P是一线性算子，所以集合$M=R(P)$是一线性子空间. 条件$x \in M$等价于存在某一$y \in X$使$x = P \cdot y$，根据(2)，这又逐一等价于$x = Py = P^2 y = Px$. 所以$x \in M$等价于$x = Px$. M是闭子空间；因当$x_n \in M$，$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$时，由$P$的连续性及$x_n = Px_n$即导致$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Px_n = Py$，故$y = Py$.

我们必须证明$P = P_M$. 若$x \in M$，我们有$Px = x = P_M \cdot x$；又若$y \in M^\perp$，我们知$P_M y = 0$. 此外，在后一种情况下，因$(Py, Py) = (y, P^2 y) = (y, Py) = 0$，故$Py = 0$. 所以对任一$y \in X$，我们得到

$$Py = P(P_M y + P_{M^\perp} y) = PP_M y + 0 \quad \text{亦即} \quad Py = P_M y.$$

投影算子的另一特征性质由下列定理给出：

定理 3 映 Hilbert 空间X入X内的有界线性算子P为一投影子，当且仅当P满足$P = P^2$且$\|P\| \leqslant 1$.

证明 我们只须证明"当"的部分. 令$M = R(P)$及$N = N(P) = \{y; Py = 0\}$. 和前述定理 2 的证明中一样，M是一闭线性子空间且$x \in M$等价于$x = Px$. 由于P的连续性，N亦是一闭线性子空间. 在分解式$x = Px + (I-P)x$中，我们有$Px \in M$和$(I-P)x \in N$. 后一断言由$P(I-P) = P - P^2 = 0$而显然.

因此我们必须证明 $N=M^\perp$. 对每一 $x\in X$. 由于 $P^2=P$ 知 $y=Px-x\in N$. 所以特别当 $x\in N^\perp$ 时, 则 $Px=x+y$ 且 $(x,y)=0$. 由此得 $\|x\|^2\geqq\|Px\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$, 故 $y=0$. 因此我们证明了 $x\in N^\perp$ 必导致 $x=Px$, 这就表示 $N^\perp\subseteq M=R(P)$. 反之, 命 $z\in M=R(P)$, 故 $z=Pz$. 此时我们得到正交分解式 $z=y+x, y\in N$、$x\in N^\perp$. 故 $z=Pz=Py+Px=Px=x$, 因其中最后一等式是已经证明了的. 这表明 $M=R(P)\subseteq N^\perp$. 这样, 我们便得到 $M=N^\perp$, 故由 $N=(N^-)^\perp$ 即得 $N=M^\perp$.

§2. "殆正交"元

一般情况下, 在赋范线性空间中我们不能定义正交性概念. 然而, 我们能证明

定理 (F. Riesz[2]) 设 X 为一赋范线性空间, M 是它的一闭线性子空间. 假设 $M\neq X$. 则对任一 $\varepsilon>0\,(0<\varepsilon<1)$, 必存在元 $x_\varepsilon\in X$ 使得

$$\|x_\varepsilon\|=1 \quad 且 \quad \operatorname{dis}(x_\varepsilon, M)=\inf_{m\in M}\|x_\varepsilon-m\|\geqq 1-\varepsilon. \tag{1}$$

因此元 x_ε 是殆正交于 M.

证明 设 $y\in X-M$. 因 M 闭, $\operatorname{dis}(y, M)=\inf_{m\in M}\|y-m\|=\alpha>0$. 因此存在一元 $m_\varepsilon\in M$ 使 $\|y-m_\varepsilon\|\leqq\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$. 矢量 $x_\varepsilon=(y-m_\varepsilon)/\|y-m_\varepsilon\|$ 满足 $\|x_\varepsilon\|=1$ 且

$$\|x_\varepsilon-m\|=\|y-m_\varepsilon\|^{-1}\|y-m_\varepsilon-\|y-m_\varepsilon\|m\|\geqq\|y-m_\varepsilon\|^{-1}\alpha\geqq\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{-1}=1-\varepsilon.$$

系 1 设存在在赋范线性空间 X 中的一个闭线性子空间 M_n 的序列, 它适合 $M_n\subseteq M_{n+1}$ 且 $M_n\neq M_{n+1}\,(n=1, 2, \cdots)$. 则存在一序列 $\{y_n\}$ 使得

$$y_n\in M_n, \quad \|y_n\|=1 \quad 且 \quad \operatorname{dis}(y_{n+1}, M_n)\geqq 1/2 \qquad (n=1, 2, \cdots). \tag{2}$$

系 2 B-空间 X 的单位球 $S=\{x\in X; \|x\|\leqq 1\}$ 为紧, 当且仅当 X 是有限维的.

证明 "当"的部分是关于 R^n 中有界闭集为紧的 Bolzano-Weierstrass 定理的一个推论. "仅当"部分证明如下. 设 X 不是有限维. 则由前面的推论 1, 存在满足条件 $\|y_n\|=1$ 且当 $m>n$ 时, $\|y_m-y_n\|\geqq 1/2$ 的序列 $\{y_n\}$. 这与 X 的单位球为紧的假设矛盾.

§3. Ascoli-Arzelà 定理

为了给出一个无穷维 B-空间的相对紧无穷子集的例子, 我们来证明

定理 (Ascoli-Arzelà) 设 S 为一紧度量空间, $C(S)$ 为由 $\|x\|=\sup_{s\in S}|x(s)|$ 赋范的(实或)复值连续函数 $x(s)$ 的 B-空间. 则当下列二条件满足时, 序列 $\{x_n(s)\}\subseteq C(S)$ 在 $C(S)$ 中是相对紧的:

$x_n(s)$ 是**等度有界**的(对 n), 即

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{s\in S}|x_n(s)|<\infty, \tag{1}$$

$x_n(s)$ 是**等度连续**的(对 n), 即

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{n\geq 1, \operatorname{dis}(s', s'')\leq\delta}|x_n(s')-x_n(s'')|=0. \tag{2}$$

证明 一有界的复数序列含一收敛子序列 (Bolzano-Weierstrass 定理). 因此对固定的 s, 序列$\{x_n(s)\}$含一收敛子序列. 另方面, 由于度量空间 S 为紧, 所以存在一可数稠密子集$\{s_n\}\subseteq S$, 使得: 对每一 $\varepsilon>0$, 存在$\{s_n\}$的一个满足条件

$$\sup_{s\in S}\inf_{1\leq j\leq k(\varepsilon)}\operatorname{dis}(s, s_j)\leqq\varepsilon \tag{3}$$

的有限子集$\{s_n; 1\leqq n\leqq k(\varepsilon)\}$. 这个事实的证明可如下得到. 由于 S 为紧, 故它是全有界的(参看第 0 章 § 2). 所以对任一 $\delta>0$, 存在属于 S 的点的一有限组, 使得 S 的任一点与此组中的某一点的距离$\leqq\delta$, 令 $\delta=1, 2^{-1}, 3^{-1}, \cdots$, 并且合并这些相应的有限点组, 我们即得到具有所述性质的序列$\{s_n\}$.

于是我们对序列$\{x_n(s)\}$使用对角线选择过程, 即可得到$\{x_n(s)\}$的一子序列$\{x_{n'}(s)\}$, 这个子序列对 $s=s_1, s_2, \cdots, s_k, \cdots$同时收敛, 根据$\{x_n(s)\}$的等度连续性, 对每一 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $\operatorname{dis}(s', s'')\leqq\delta$ 时, 对 $n=1, 2, \cdots$均有$|x_n(s')-x_n(s'')|\leqq\varepsilon$. 因而对每一 $s\in S$, 存在一 $j(j\leqq k(\delta(\varepsilon))$使得

$$\begin{aligned}|x_{n'}(s)-x_{m'}(s)|&\leqq|x_{n'}(s)-x_{n'}(s_j)|+|x_{n'}(s_j)-x_{m'}(s_j)|+|x_{m'}(s_j)-x_{m'}(s)|\\&\leqq 2\varepsilon+|x_{n'}(s_j)-x_{m'}(s_j)|.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\max\limits_{s}|x_{n'}(s)-x_{m'}(s)|\leqq 2\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_{n'}-x_{m'}\|=0$.

§ 4. 正交基. Bessel 不等式与 Parseval 关系

定义 1 pre-Hilbert 空间 X 中的一个矢量集合 S 称为一正交集合, 如果对 S 每一对不相同的矢量 x 和 y 均有 $x\perp y$. 此外若对每一 $x\in S$ 又有$\|x\|=1$, 则S称为一标准正交集合. Hilbert 空间 X 的一标准正交集合 S 称为 X 的一完全标准正交系或正交基, 如果不存在以 S 为真子集的 X 的标准正交集.

定理 1 Hilbert 空间 X(具有非零矢量) 至少有一个完全标准正交系. 此外, 若 S 是 X 中任一标准正交集, 则存在一个以 S 为其子集的完全标准正交系.

证明(根据 Zorn 引理) 设 S 为 X 中一标准正交集. 这种集合确实存在; 例如, 若 $x\neq0$, 仅由 $x/\|x\|$组成的集合便是. 我们考察以 S 为子集的标准正交集的全体$\{S\}$. 按集合包含关系 $S_1\subseteq S_2$ 而约定 $S_1\prec S_2$, $\{S\}$便成为部分有序的. 设$\{S'\}$为$\{S\}$的一全序子组, 则 $\bigcup\limits_{S'\in\{S'\}}S'$ 为一标准正交集, 且是$\{S'\}$的一个上界. 于是, 由 Zorn 引理, 存在$\{S\}$的一极大元 S_0. 这个标准正交集 S_0 包含 S, 且由它的极大性, 它必是完全标准正交系.

定理 2 设 $S=\{x_\alpha; \alpha\in A\}$为 Hilbert 空间 X 的一个完全标准正交系. 对任一 $f\in X$, 我们定义它的(关于 S 的) Fourier系数

$$f_\alpha=(f, x_\alpha). \tag{1}$$

则我们有 Parseval关系

$$\|f\|^2=\sum_{\alpha\in A}|f_\alpha|^2. \tag{2}$$

证明 我们首先证明 Bessel 不等式

$$\sum_{\alpha\in A}|f_\alpha|^2\leqq\|f\|^2.$$

令 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为诸 α 的任一有限组. 对任一有限组复数 $c_{\alpha_1},c_{\alpha_2},\cdots,c_{\alpha_n}$, 根据$\{x_\alpha\}$的标准正交性, 我们有

$$\begin{aligned}\|f-\sum_{j=1}^{n}c_{\alpha_j}x_{\alpha_j}\|^2&=\left(f-\sum_{j=1}^{n}c_{\alpha_j}x_{\alpha_j},\ f-\sum_{j=1}^{n}c_{\alpha_j}x_{\alpha_j}\right)\\&=\|f\|^2-\sum_{j=1}^{n}c_{\alpha_j}\bar{f}_{\alpha_j}-\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{\alpha_j}f_{\alpha_j}+\sum_{j=1}^{n}|c_{\alpha_j}|^2\\&=\|f\|^2-\sum_{j=1}^{n}|f_{\alpha_j}|^2+\sum_{j=1}^{n}|f_{\alpha_j}-c_{\alpha_j}|^2.\end{aligned}\tag{3}$$

于是, 对固定的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, $\|f-\sum_{j=1}^{n}c_{\alpha_j}x_{\alpha_j}\|^2$ 的极小值当 $c_{\alpha_j}=f_{\alpha_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$时达到. 因此我们有

$$\|f-\sum_{j=1}^{n}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j}\|^2=\|f\|^2-\sum_{j=1}^{n}|f_{\alpha_j}|^2,\quad 故\quad \sum_{j=1}^{n}|f_{\alpha_j}|^2\leqq\|f\|^2.\tag{4}$$

根据 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的任意性, 即知 Bessel 不等式$(2')$为真, 且 $f_\alpha\neq0$ 至多对可数多个 α(例如 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots$)成立. 然后我们证明 $f=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j}$. 首先, 序列$\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j}\right\}$ 为一 Cauchy 序列, 因为由$\{x_\alpha\}$的标准正交性

$$\|\sum_{j=k}^{n}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j}\|^2=\left(\sum_{j=k}^{n}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j},\ \sum_{j=k}^{n}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j}\right)=\sum_{j=k}^{n}|f_{\alpha_j}|^2,$$

根据前面证明的(4), 上式当 $k\to\infty$ 时趋于0. 我们命 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j}=f'$, 我们来证明 $(f-f')$ 正交于 S 的每一矢量. 根据内积的连续性, 得

$$(f-f',x_{\alpha_j})=\lim_{n\to\infty}\left(f-\sum_{k=1}^{n}f_{\alpha_k}x_{\alpha_k},\ x_{\alpha_j}\right)=f_{\alpha_j}-f_{\alpha_j}=0,$$

又当 $\alpha\neq\alpha_j$ $(j=1,2,\cdots)$时

$$(f-f',x_\alpha)=\lim_{n\to\infty}\left(f-\sum_{k=1}^{n}f_{\alpha_k}x_{\alpha_k},x_\alpha\right)=0-0=0.$$

因此, 根据标准正交系 $S=\{x_\alpha\}$的完全性, 必有$(f-f')=0$. 于是由(4)及范数的连续性, 我们有:

$$0=\lim_{n\to\infty}\|f-\sum_{j=1}^{n}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j}\|^2=\|f\|^2-\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}|f_{\alpha_j}|^2=\|f\|^2-\sum_{\alpha\in A}|f_\alpha|^2.$$

系 1 我们有 Fourier 展式

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j}=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}f_{\alpha_j}x_{\alpha_j}. \tag{5}$$

系 2 设 $l^2(A)$ 为空间 $L^2(A, \mathfrak{B}, m)$，其中 $m(\{\alpha\})=1$，对一切 $\alpha\in A$. 则 Hilbert 空间 X 按对应关系

$$X\ni f\longleftrightarrow\{f_\alpha\}\in l^2(A). \tag{6}$$

依下述意义

$$(f+g)\longleftrightarrow\{f_\alpha+g_\alpha\},\ \ \beta f\longleftrightarrow\{\beta f_\alpha\}\quad 且\quad \|f\|^2=\|\{f_\alpha\}\|^2=\sum_{\alpha\in A}|f_\alpha|^2 \tag{7}$$

等距同构于 Hilbert 空间 $l^2(A)$.

例 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}, n=0, \pm1, \pm2, \cdots\right\}$是 Hilbert 空间 $L^2(0, 2\pi)$的一个完全标准正交系.

证明 我们只须证明此系的完全性. 根据(3), 我们有

$$\|f-\sum_{j=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}c_je^{ijt}\|^2\geqq\|f-\sum_{j=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}f_je^{ijt}\|^2=\|f\|^2-\sum_{j=-n}^{n}|f_j|^2,$$

此处 $f_j=(f, e^{ijt})$. 如果 $f\in L^2(0, 2\pi)$是一周期为 2π 的连续函数, 则由于 Weierstrass 的三角函数逼近定理(参看第0 章 § 2), 上述不等式的左端可以为任意小. 因此所有线性组合$\sum_j c_je^{ijt}$的集合在范数意义下稠密于 $L^2(0, 2\pi)$中的由周期为 2π 的连续函数组成的子空间, 而后者按范数又稠密于 $L^2(0, 2\pi)$. 所以, 正交于$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}$中的所有函数的任一函数$f\in L^2(0,2\pi)$必为$L^2(0,2\pi)$的零矢量. 这就证明了我们的函数系$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的一个完全标准正交系.

§ 5. F. Schmidt 正交化

定理(E. Schmidt 正交化) 给定 pre-Hilbert 空间 X 的一个有限或可数无限的线性无关的矢量的序列$\{x_j\}$. 则我们能构造一个标准正交集, 它的势与集$\{x_j\}$的势一样, 且它张成的线性空间与$\{x_j\}$张成的线性空间一样.

证明 当然 $x_1\neq0$. 我们如下递推地定义 $y_1, y_2, \cdots$和 $u_1, u_2, \cdots$:

$$y_1=x_1,\qquad\qquad u_1=y_1/\|y_1\|,$$
$$y_2=x_2-(x_2, u_1)u_1,\qquad\qquad u_2=y_2/\|y_2\|,$$
$$\cdots\qquad\qquad\cdots$$
$$y_{n+1}=x_{n+1}-\sum_{j=1}^{n}(x_{n+1}, u_j)u_j,\qquad\qquad u_{n+1}=y_{n+1}/\|y_{n+1}\|,$$
$$\cdots\qquad\qquad\cdots$$

如果$\{x_j\}$是有限集, 此过程可终结. 否则, 它无限延续. 我们注意 $y_n\neq0$, 因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线

性无关的. 因此 u_n 确实有意义. 由归纳法显然可见, 每一 u_n 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性组合, 每一 x_n 是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的线性组合. 因此由诸 u 张成的闭线性子空间与由诸 x 张成的闭线性子空间是完全一样的.

由 $\|u_1\|=1$ 可知 $y_2 \perp u_1$, 于是 $u_2 \perp u_1$. 因此由 $\|u_1\|=1$ 知 $y_3 \perp u_1$, 因而 $u_3 \perp u_1$. 重复此论述, 知 u_1 正交于 $u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$. 相仿, 根据 $\|u_2\|=1$, 我们有 $y_3 \perp u_2$, 故 $u_3 \perp u_2$. 重复此论述, 最终可知 $u_k \perp u_m$ 只要 $k>m$. 所以 $\{u_j\}$ 组成一标准正交集.

系 令 Hilbert 空间 X 是可分的, 即假设 X 有一个至多有可数个元素的稠密子集. 则 X 有一个至多由可数个元素组成的一个完全标准正交系.

证明 假定一至多为可数个矢量 $(\in X)$ 的序列 $\{a_j\}$ 稠密于 X. 设 x_1 为序列 $\{a_j\}$ 的第一个非零元, x_2 为第一个不属于 x_1 张成的闭子空间的 a_i, x_n 是第一个不属于由 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 张成的闭子空间的 a_i. 显然诸 a 和诸 x 张成同一闭线性子空间. 事实上此闭子空间就是全空间 X, 因为集合 $\{a_j\}$ 稠密于 X. 使用 Schmidt 正交化于 $\{x_j\}$, 我们得到一个标准正交系 $\{u_j\}$, 它是可数的且张成全空间 X.

这个系是完全的, 因否则会存在一非零矢量, 它正交于每一 u_j, 因而正交于由诸 u_j 张成的空间 X.

正交化的例 设 S 是区间 (a, b), 并考察实 Hilbert 空间 $L^2(s, \mathfrak{B}, m)$. 此处 $\mathfrak{B}$ 是 (a, b) 中一切 Baire 子集的集合. 如果我们把单项式的集合

$$1, s, s^2, \cdots, s^n, \cdots$$

正交化, 便得到所谓 Tchebyshev 多项式系

$$P_0(s)=\text{常数}, P_1(s), P_2(s), P_3(s), \cdots, P_n(s), \cdots,$$

它们满足

$$\int_a^b P_i(s)P_j(s)m(ds)=\delta_{ij} \quad (=0 \text{ 或 } 1 \text{ 由 } i\neq j \text{ 或 } i=j \text{ 而定}).$$

在 $a=-1, b=1$ 且 $m(ds)=ds$ 的特殊情况下, 我们得 Legendre 多项式; 在 $a=-\infty$, $b=\infty$ 且 $m(ds)=e^{-s^2}ds$ 的情况下, 我们得到 Hermite 多项式, 最后当 $a=0$, $b=\infty$ 且 $m(ds)=e^{-s}ds$ 时, 我们得到 Laguerre 多项式.

易知, 当 $-\infty<a<b<\infty$ 时, 标准正交化系 $\{P_j(s)\}$ 是完全的. 因为我们可以仿照三角函数的完全性的证明(参看前面 § 4 的例); 只是此时我们将求助于 Weierstrass 多项式逼近定理, 以代替 Weierstrass 三角函数逼近定理. 至于 Hermite 或 Laguerre 多项式的完全性证明, 我们建议读者参看 G. Szegö[1]或 K. Yosida[1].

§ 6. F. Riesz 表示定理

定理 (F. Riesz 表示定理) 令 X 为一 Hilbert 空间, f 为 X 上的一个有界线性泛函. 则存在唯一确定的 X 的矢量 y_f 使

$$f(x)=(x, \quad y_f) \quad \text{对一切 } x\in X, \text{ 且 } \|f\|=\|y_f\|. \tag{1}$$

反之，任一矢量 $y\in X$ 根据

$$f_y(x)=(x,\ y)\quad \text{对一切}\ x\in X\quad \text{及}\quad \|f_y\|=\|y\|, \tag{2}$$

定义了 X 上的一个有界线性泛函 f_y.

证明 因为若对一切 $x\in X$ 均有 $(x,z)=0$ 必导致 $z=0$，所以 y_f 的唯一性是显然的. 为证它的存在性，我们考察 f 的零空间 $N=N(f)=\{x\in X; f(x)=0\}$. 因 f 为连续且线性，故 N 为一闭线性子空间. 在 $N=X$ 的情况下，定理是平凡的；这时我们取 $y_f=0$. 假设 $N\neq X$. 则存在一 $y_0\neq 0$，它属于 $N^{\perp}$(参看第三章 §1 的定理 1). 定义

$$y_f=(\overline{f(y_0)}/\|y_0\|^2)y_0. \tag{3}$$

我们断定这个 y_f 符合定理条件. 首先，若 $x\in N$，必有 $f(x)=(x, y_f)$，因为两边均是零. 其次，若 x 为形如 $x=\alpha y_0$ 的元，则我们有

$$(x, y_f)=(\alpha y_0, y_f)=\left(\alpha y_0, \frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2}y_0\right)=\alpha f(y_0)=f(\alpha y_0)=f(x).$$

由于 $f(x)$ 和 (x, y_f) 对 x 都是线性的，所以如果我们证明了 X 由 N 和 y_0 张成，则等式 $f(x)=(x, y_f)$ $x\in X$ 便得证. 为了证明后一断言，注意 $f(y_f)\neq 0$，我们记

$$x=\left(x-\frac{f(x)}{f(y_f)}y_f\right)+\frac{f(x)}{f(y_f)}y_f.$$

右端的第一项是 N 中的元，因为

$$f\left(x-\frac{f(x)}{f(y_f)}y_f\right)=f(x)-\frac{f(x)}{f(y_f)}f(y_f)=0.$$

因此我们便证明了表示式 $f(x)=(x, y_f)$.

所以，我们有

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)|=\sup_{\|x\|\leq 1}|(x, y_f)|\leq \sup_{\|x\|\leq 1}\|x\|\cdot\|y_f\|=\|y_f\|,$$

又

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)|\geq |f(y_f/\|y_f\|)|=\left(\frac{y_f}{\|y_f\|}, y_f\right)=\|y_f\|.$$

故我们证明了等式 $\|f\|=\|y_f\|$.

最后，定理之逆部分由 $|f_y(x)|=|(x, y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|$ 是显然的.

系 1 设 X 为 Hilbert 空间. 则 X 上的有界线性泛函的全体 X' 也构成一 Hilbert 空间，并且在 X' 和 X 之间存在一个保范的一一对应 $f\longleftrightarrow y_f$. 借助于这个对应，X' 作为一个抽象集合可等同于 X；但是，在此对应下，作为线性空间而言不允许把 X' 等同于 X，因为对应 $f\longleftrightarrow y_f$ 是共轭线性的：

$$(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)\longleftrightarrow(\bar{\alpha}_1 y_{f_1}+\bar{\alpha}_2 y_{f_2}), \tag{4}$$

其中 α_1, α_2 是复数.

证明 容易验证，借助于定义内积 $(f_1, f_2)=\overline{(y_{f_1},\ y_{f_2})}$ X' 成为一 Hilbert 空间，故系 1 的论断显然成立.

系 2 Hilbert 空间 X' 上的任一连续线性泛函 T 可按如下方式等同于 X 中的一个唯一确定的元素 t：

$$T(f)=f(t) \qquad \text{对一切 } f\in X'. \tag{5}$$

证明 根据两个共轭线性变换的积是线性变换这一事实，结论显然.

定义 空间 X' 称为 X 的对偶空间. 于是我们能在上面的意义下，把 Hilbert 空间 X 等同于它的第二对偶空间 $X''=(X')'$. 这个事实将称为 Hilbert 空间的自反性.

系 3 设 X 为一 Hilbert 空间，X' 为它的对偶空间. 则对任一稠密于 X' 的子集 $F(\subseteq X')$，我们有

$$\|x_0\|=\sup_{f\in F,\,\|f\|\leq 1}|f(x_0)|, \qquad x_0\in X. \tag{6}$$

证明 我们可以假定 $x_0\neq 0$，因否则公式(6)是平凡的. 我们有 $(x, x/\|x_0\|)=\|x_0\|$，故存在 X 上的一有界线性泛函 f_0，使 $\|f_0\|=1$，$f(x_0)=\|x_0\|$. 因 $f(x_0)=(x_0, y_f)$ 对 y_f 连续，且对应 $f\longleftrightarrow y_f$ 是保范的，所以由 F 稠密于 X' 知(6)为真.

注 Hilbert 给出的"Hilbert 空间"的原始定义是空间(l^2). 参看他的论文[1]. 在假设空间为可分的情况下，给出 Hilbert 空间的公理化定义 (参看第一章 § 9) 的是 J. von Neumann[1]. F. Riesz[1] 在不假定空间是可分的条件下证明了上面的表示定理. 在这篇论文中，他强调 Hilbert 空间的整个理论可以以他的表示定理为基础.

§ 7. Lax-Milgram 定理

近年来，由 P. Lax 和 A. N. Milgram[1]所表述的 F. Riesz 表示定理的一种变形被证实是研究椭圆型线性偏微分方程解的存在性的一个有效工具.

定理(Lax-Milgram) 设 X 为 Hilbert 空间，$B(x, y)$ 为一定义在积 Hilbert 空间 $X\times X$ 上的复值泛函，它满足条件：

一・五线性性质(sesqui-linearity)，即

$$B(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y)=\alpha_1B(x_1, y)+\alpha_2B(x_2, y) \text{ 且} \tag{1}$$
$$B(x, \beta_1y_1+\beta_2y_2)=\bar{\beta}_1B(x, y_1)+\bar{\beta}_2B(x, y_2),$$

有界性，即存在正常数 γ 使

$$|B(x, y)|\leq\gamma\|x\|\cdot\|y\|, \tag{2}$$

正性，即存在正常数 δ 使

$$B(x, x)\geqq\delta\|x\|^2. \tag{3}$$

则存在唯一确定的有界线性算子 S，它具有有界线性逆 S^{-1} 且使得

$$(x, y)=B(x, Sy) \quad \text{只要} \quad x, y\in X, \quad \text{且} \quad \|S\|\leq\delta^{-1}, \quad \|S^{-1}\|\leq\gamma. \tag{4}$$

证明 设 D 是这样一些元素 $y\in X$ 的全体，即要求存在元素 y^* 使对一切 $x\in X$ 有 $(x, y)=B(x, y^*)$. D 是非空的，因为 $0\in D$(此时 $0^*=0$). y^* 由 y 唯一确定. 因若 w 使得 $B(x, w)=0$ 对一切 x 成立，则根据 $0=B(w, w)\geqq\delta\|w\|^2$ 知 $w=0$. 根据(x, y)和 $B(x, y)$的一・五线性性质，我们得到一个定义域为 $D(S)=D$ 的线性算子 S：$Sy=y^*$. S 是连续的，且$\|Sy\|\leq\delta^{-1}\|y\|$，$y\in D(S)$，这是因为

$$\delta\|Sy\|^2\leq B(Sy, Sy)=(Sy, y)\leq\|Sy\|\cdot\|y\|.$$

此外 $D=D(S)$ 是 X 的一闭线性子空间. 证明: 若 $y_n\in D(S)$ 且 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_\infty$, 则根据前面证明的 S 的连续性, $\{Sy_n\}$ 是一 Cauchy 序列, 因而有极限 $z=s\text{-}\lim Sy_n$. 由数积的连续性, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x, y_n)=(x, y_\infty)$. 由 (2) 我们又有 $\lim\limits_{n\to\infty} B(x, Sy_n)=B(x, z)$. 于是由 $(x, y_n)=B(x, Sy_n)$ 我们必定得 $(x, y_\infty)=B(x, z)$, 这就证明 $y_\infty\in D$ 且 $Sy_\infty=z$.

所以如果我们能证明 $D(S)=X$, 则定理的第一部分, 即算子 S 的存在性便得证. 假定 $D(S)\neq X$. 则存在一 $w_0\in X$ 使得 $w_0\neq 0$ 且 $w_0\in D(S)^\perp$. 考察定义在 X 上的线性泛函 $F(z)=B(z, w_0)$. 因为 $|F(z)|=|B(z, w_0)|\leqq\gamma\|z\|\cdot\|w_0\|$, 所以 $F(z)$ 是连续的. 于是由 F. Riesz 表示定理, 存在一 $w_0'\in X$ 使得 $B(z, w_0)=F(z)=(z, w_0')$ 对一切 $z\in X$ 成立. 这就证明了 $w_0'\in D(S)$ 且 $Sw_0'=w_0$. 但由 $\delta\|w_0\|^2\leqq B(w_0, w_0)=(w_0, w_0')=0$ 知 $w_0=0$, 而这是一个矛盾.

逆 S^{-1} 存在. 因 $Sy=0$ 导致对一切 $x\in X$ 均有 $(x, y)=B(x, Sy)=0$, 故 $y=0$. 如上所证, 对每一 $y\in X$ 必存在一 y' 使得对一切 $z\in X$ 成立 $(z, y')=B(z, y)$. 因此 $y=Sy'$, 从而 S^{-1} 是一处处有定义的算子, 又由 $|(z, S^{-1}y)|=|B(z, y)|\leqq\gamma\|z\|\cdot\|y\|$, 即知 $\|S^{-1}\|\leqq\gamma$.

Lax-Milgram 定理的具体应用将在以后的几章中给出. 在下面的四节中, 我们将给出 F. Riesz 表示定理的直接应用的几个例子.

§8. Lebesgue-Nikodym 定理的一个证明

此定理叙述如下:

定理(Lebesgue-Nikodym) 设 $(S, \mathfrak{B}, m)$ 为一测度空间, $\nu(B)$ 为一定义在 $\mathfrak{B}$ 上的 σ-有限, σ-可加且非负的测度. 如果 ν 是 m-绝对连续的, 则存在一非负, m-可测的函数 $p(s)$ 使得

$$\nu(B)=\int_B p(s)m(ds) \qquad \text{对一切 } \nu(B)<\infty \text{ 的 } B\in\mathfrak{B}. \tag{1}$$

此外, $\nu(B)$ 的(关于 $m(B)$)的"密度"$p(s)$ 在 m-a.e. 相等的意义下是唯一确定的.

证明(属于 J. von Neumann[2]) 易知 $\rho(B)=m(B)+\nu(B)$ 是定义在 $\mathfrak{B}$ 上的 σ-有限, σ-可加且非负的测度. 令 $\{B_n\}$ 是一序列的 $\in\mathfrak{B}$ 且满足 $S=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$, $B_n\subseteq B_{n+1}$ 及 $\rho(B_n)<\infty$ (对 $n=1, 2, \cdots$) 的集合. 如果我们能够对每一 $B\subseteqq B_n$ (对固定的 n) 证明定理并得到密度 $p_n(s)$, 则定理为真. 因为我们只须取 $p(s)$ 如下:

$$p(s)=p_1(s) \quad \text{当 } s\in B_1, \text{ 且 } p(s)=p_{n+1}(s) \quad \text{当 } s\in B_{n+1}-B_n$$
$$(n=1, 2, \cdots).$$

所以不失一般性可认为 $\rho(S)<\infty$. 今考察 Hilbert 空间 $L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$. 则

$$f(x)=\int_S x(s)\nu(ds), \quad x\in L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$$

给出了一个 $L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$ 上的有界线性泛函, 这是因为

$$|f(x)|\leqq\int_S|x(s)|\nu(ds)\leqq\left(\int_S|x(s)|^2\nu(ds)\right)^{1/2}\cdot\left(\int_S 1\cdot\nu(ds)\right)^{1/2}\leqq\|x\|_\rho\cdot\nu(S)^{1/2},$$

其中 $\|x\|_\rho=\left(\int_S|x(s)|^2\rho(ds)\right)^{1/2}$. 于是根据 F. Riesz 表示定理, 存在一唯一确定的 $y\in L^2(S,\mathfrak{B},\rho)$ 使得

$$\int_S x(s)\nu(ds)=\int_S x(s)\overline{y(s)}\rho(ds)=\int_S x(s)\overline{y(s)}m(ds)+\int_S x(s)\overline{y(s)}\nu(ds)$$

对一切 $x\in L^2(S,\mathfrak{B},\rho)$ 成立. 当我们取 x 为非负函数并考察两端的实部时, 我们可以假定 $y(s)$ 是实值函数. 于是

$$\int_S x(s)(1-y(s))\nu(ds)=\int_S x(s)y(s)m(ds),\qquad 若\ x(s)\in L^2(S,\mathfrak{B},\rho),\tag{2}$$

是非负的.

我们能够证明 $0\leq y(s)<1$ ρ-a.e. 为此, 令 $E_1=\{s;y(s)<0\}$, $E_2=\{s;y(s)\geqq 1\}$. 如果我们取 E_1 的特征函数 $C_{E_1}(s)$ 作为(2)中的 $x(s)$, 则左端 $\geqq 0$, 于是 $\int_{E_1}y(s)\,m(ds)\geqq 0$. 因此必有 $m(E_1)=0$, 故由 ν 的 m-绝对连续性知 $\nu(E_1)=0$, $\rho(E_1)=0$. 利用取特征函数 $C_{E_2}(s)$ 作为(2)中的 $x(s)$, 我们同样可证 $\rho(E_2)=0$. 所以在 S 上 $0\leqq y(s)<1$ ρ-a.e.

设 $x(s)$ 为 $\mathfrak{B}$-可测且 $\geqq 0$ ρ-a.e. 根据 $\rho(S)<\infty$ 则"截断"函数 $x_n(s)=\min(x(s),n)$ 属于 $L^2(S,\mathfrak{B},\rho)$ $(n=1,2,\cdots)$, 从而

$$\int_S x_n(s)(1-y(s))\nu(ds)=\int_S x_n(s)y(s)m(ds)\qquad(n=1,2,\cdots).\tag{3}$$

由于积分随 n 增加而单调增加, 所以我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_S x_n(s)(1-y(s))m(ds)=\lim_{n\to\infty}\int_S x_n(s)y(s)m(ds)=L\leqq\infty.\tag{4}$$

因为被积项 $\geqq 0$ ρ-a.e., 故由 Lebesgue-Fatou 引理得

$$L\geqq\int_S\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n(s)(1-y(s))\nu(ds)=\int_S x(s)(1-y(s))\nu(ds),\tag{5}$$

$$L\geqq\int_S\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n(s)y(s))m(ds)=\int_S x(s)y(s)m(ds),$$

上式中我们约定若 $x(s)(1-y(s))$ 不是 ν-可积时, 则右端为 ∞; 对 $x(s)y(s)$ 亦作同样约定. 如果 $x(s)y(s)$ 为 m-可积, 则由 Lebesgue-Fatou 引理

$$L\leqq\int_S\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n(s)y(s))m(ds)=\int_S x(s)y(s)m(ds).\tag{6}$$

即使 $x(s)y(s)$ 不是 m-可积的, 这个公式仍然成立, 只要此时约定 $L=\infty$. 在相似的约定下, 我们有

$$L\leqq\int_S x(s)(1-y(s))\nu(ds).\tag{7}$$

所以, 我们有

$$\int_S x(s)(1-y(s))\nu(ds)=\int_S x(s)y(s)m(ds)\qquad 对每一\ \mathfrak{B}\text{-可测且}\ \rho\text{-a.e.}\geqq 0\ 的\ x(s),\tag{8}$$

我们在上式中约定: 若有一端 $=\infty$, 则另一端也 $=\infty$.

现在我们置

$$x(s)(1-y(s))=z(s), \qquad y(s)(1-y(s))^{-1}=p(s).$$

则在如(8)的相同约定下，我们得

$$\int_S z(s)\nu(ds)=\int_S z(s)p(s)m(ds) \qquad \text{若 } z(s) \text{ 为 } \mathfrak{B}\text{- 可测且 } \geqq 0\ \rho\text{-a.e.} \tag{9}$$

如果我们取 $B\in\mathfrak{B}$ 的特征函数 $C_B(s)$ 作为 $z(s)$，我们得到

$$\nu(B)=\int_B p(s)m(ds) \qquad \text{对一切 } B\in\mathfrak{B}.$$

定理的最后部分由定义(1)而为显然.

参考文献 Lebesgue-Nikodym 定理的一个基于 Hahn 分解（参看第一章 § 3 的定理 3)的直接证明请参看 K. Yosida[2]. 这个证明转载于 Halmos[1], p.128. 亦可参看 Saks[1] 和 Dunford-Schwartz[1].

§ 9. Aronszajn-Bergman 再生核

设 A 为一抽象集，并设一个定义在 A 上的复值函数的系统 X 按数积

$$(f, g)=(f(a), g(a))_a \tag{1}$$

构成一 Hilbert 空间. 定义在 $A\times A$ 上的复值函数 $K(a, b)$ 称为 X 的**再生核**，如果它满足条件：

对任一固定的 b，作为 a 的函数 $K(a, b)\in X$

$$f(b)=(f(a), K(a, b))_a \tag{2}$$

因而

$$\overline{f(b)}=(K(a, b), f(a))_a. \tag{3}$$

至于再生核的存在性，我们有

定理 1(N. Aronszajn[1], S. Bergman[1]) X 有再生核 K 当且仅当：对任一 $y_0\in A$ 存在一依赖于 y_0 的常数 C_{y_0} 使得

$$|f(y_0)|\leqq C_{y_0}\|f\| \qquad \text{对一切 } f\in X. \tag{4}$$

证明 把 Schwarz 不等式用于 $f(y_0)=(f(x), K(x, y_0))_x$：

$$|f(y_0)|\leqq\|f\|\cdot(K(x, y_0), K(x, y_0))_x^{1/2}=\|f\|K(y_0, y_0)^{1/2}, \tag{5}$$

定理的仅当部分由此得证. “当”部分借助于把 F. Riesz 表示定理用于 $f\in X$ 的线性泛函 $F_{y_0}(f)=f(y_0)$ 而得证. 因此存在唯一确定的属于 X 的矢量 $g_{y_0}(x)$，使得对一切 $f\in X$

$$f(y_0)=F_{y_0}(f)=(f(x), g_{y_0}(x))_x,$$

所以 $g_{y_0}(x)=K(x, y_0)$ 是 X 的一再生核. 证明的本身表明再生核是唯一确定的.

系 我们有

$$\sup_{\|f\|\leq 1}|f(y_0)|=K(y_0, y_0)^{1/2}, \tag{6}$$

其中上确界被

$$f_0(x)=\rho K(x, y_0)/K(y_0, y_0)^{1/2}, \qquad |\rho|=1 \tag{7}$$

所取到.

证明 Schwarz 不等式(5)中的等式成立当且仅当 $f(x)$ 与 $K(x, y_0)$ 为线性相关. 从两个条件 $f(x)=\alpha K(x, y_0)$ 和 $\|f\|=1$ 出发，我们得到

$$1=|\alpha|(K(x,y_0),K(x,y_0))_x^{1/2}=|\alpha|K(y_0,y_0)^{1/2},\quad 此即\quad |\alpha|=K(y_0,y_0)^{-1/2}.$$

因而(5)中的等号被 $f_0(x)$ 所取到.

例 考察 Hilbert 空间 $A^2(G)$. 对任一 $f\in A^2(G)$ 和 $z_0\in G$, 我们有(参看第一章 § 9 式(4))

$$|f(z)|^2\leqq(\pi r^2)^{-1}\int_{|z-z_0|\leq r}|f(z)|^2dxdy\qquad(z=x+iy).$$

于是 $A^2(G)$ 有再生核, 记为 $K_G(z,z')$. 此 $K_G(z,z')$ 称为复平面的区域 G 的 Bergman 核. 下面的 Bergman 的定理解释了 $K_G(z,z')$ 在共形映照理论中的意义.

定理 2 设 G 是复平面上的一单连通有界开区域, z_0 是 G 的任一点. 根据 Riemann 定理, 存在唯一确定的 z 的正则函数 $w=f_0(z,z_0)$, 它给出区域 G 到 w-复平面的圆 $|w|<\rho_G$ 上的一个一一共形映照, 且使得

$$f_0(z_0,z_0)=0,\qquad (df(z,z_0)/dz)_{z=z_0}=1.$$

Bergman 核 $K_G(z;z_0)$ 与 $f_0(z;z_0)$ 的关系为

$$f_0(z;z_0)=K_G(z_0;z)^{-1}\int_{z_0}^{z}K_G(t;z_0)\,dt,\tag{8}$$

其中积分是沿任一位于 G 中且连接 z_0 与 z 的可求长曲线取的.

证明 令

$A_1^2(G)=\{f(z);f(z)$ 在 G 中全纯, $f'(z)\in A^2(G)$, $f(z_0)=0$ 且 $f'(z_0)=1\}$, 并对任一 $f\in A_1^2(G)$ 考察数

$$\|f'\|^2=\int_G|f'(z)|^2dxdy,\qquad z=x+iy.\tag{9}$$

如果我们以 $z=\varphi(w)$ 表示 $w=f_0(z;z_0)$ 的反函数, 则对任一 $f\in A_1^2(G)$

$$\|f'\|^2=\iint_{|w|<\rho_G}|f'(\varphi(w))|^2|\varphi'(w)|^2dudv,\qquad w=u+iv.$$

这是因为由 Cauchy-Riemann 偏微分方程

$$x_u=y_v,\qquad x_v=-y_u,$$

我们得

$$dxdy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv=(x_uy_v-y_ux_v)dudv=(x_u^2+y_u^2)dudv=|\varphi'(w)|^2dudv.$$

设 $f\in A_1^2(G)$, 并将 $F(w)=f(\varphi(w))$ 展成幂级数

$$F(w)=f(\varphi(w))=w+\sum_{n=2}^{\infty}c_nw^n\qquad 当\ |w|<\rho_G.$$

则
$$F'(w)=f'(\varphi(w))\varphi'(w)=1+\sum_{n=2}^{\infty}nc_nw^{n-1},\quad 故$$

$$\|f'\|^2=\iint_{|w|<\rho_G}|1+\sum_{n=2}^{\infty}nc_nw^{n-1}|^2dudv$$

$$=\int_0^{\rho_G}dr\left\{\int_0^{2\pi}\left(r+\sum_{n=2}^{\infty}n^2|c_n|^2r^{2n-1}\right)d\theta\right\}=\pi\rho_G^2+\sum_{n=2}^{\infty}\pi n|c_n|^2\rho_G^{2n}.$$

所以 $\underset{f\in A_1^2(G)}{\text{minimum}}\|f'\|=\sqrt{\pi}\,\rho_G$，且此下确界当且仅当 $F(w)=f(\varphi(w))=w$ 时取到，即当且仅当 $f(z)=f_0(z;z_0)$ 时取到。

对任一 $f\in A_1^2(G)$，我们令 $g(z)=f(z)/\|f'\|$。则 $\|g'\|=1$。若命

$$\widetilde{A}^2(G)=\{g(z);\,g(z)\text{在}G\text{中全纯},\,g(z_0)=0,\,g'(z_0)>0\ \text{且}\ \|g'\|=1\},$$

则上面的注语表明

$$\underset{g\in\widetilde{A}^2(G)}{\text{maximum}}\,g'(z_0)=1/\|f_0'\|=(\sqrt{\pi}\,\rho_G)^{-1},$$

且此上确界当且仅当 $g(z)$ 等于

$$g_0(z)=f_0(z;z_0)/\|f_0'\|=f_0(z;z_0)/\sqrt{\pi}\,\rho_G$$

时被取到。因此由(7)得

$$g_0'(z)=(\sqrt{\pi}\,\rho_G)^{-1}\frac{df_0(z;z_0)}{dz}=\lambda K_G(z;z_0)/K_G(z_0,z_0)^{1/2},\qquad |\lambda|=1.$$

再令 $z=z_0$，得

$$(\lambda\sqrt{\pi}\,\rho_G)^{-1}=K_G(z_0,z_0)/K_G(z_0,z_0)^{1/2}=K_G(z_0,z_0)^{1/2},$$

所以我们便证明了公式

$$\frac{df_0(z;z_0)}{dz}=K_G(z;z_0)/K_G(z_0;z_0).$$

§10. P. Lax 的负范数

设 $H_0^s(\Omega)$ 是在赋予数积 $(\varphi,\psi)_s$ 和范数 $\|\varphi\|_s$

$$(\varphi,\psi)_s=\sum_{|j|\leq s}\int_\Omega D^j\varphi(x)\overline{D^j\psi(x)}\,dx,\qquad \|\varphi\|_s=(\varphi,\varphi)_s^{1/2}\tag{1}$$

下的 pre-Hilbert 空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 的完备化。任一元素 $b\in H_0^0(\Omega)=L^2(\Omega)$，按关系

$$f_b(w)=(w,b)_0,\qquad w\in H_0^s(\Omega)\tag{2}$$

定义了一个 $H_0^s(\Omega)$ 上的连续线性泛函 f_b。这是因为由 Schwarz 不等式，我们有

$$|(w,b)_0|\leqq\|w\|_0\cdot\|b\|_0\leqq\|w\|_s\cdot\|b\|_0.$$

所以，若我们按关系

$$\|b\|_{-s}=\sup_{w\in H_0^s(\Omega),\|w\|_s\leq1}|f_b(w)|=\sup_{w\in H_0^s(\Omega),\|w\|_s\leq1}|(w,b)_0|.\tag{3}$$

定义 $b\in H_0^0(\Omega)=L^2(\Omega)$ 的**负范数**，则有

$$\|b\|_{-s}\leqq\|b\|_0,\tag{4}$$

故根据 $\|b\|_{-s}\geqq(w/\|w\|_s,b)_0$ 得

$$|(w,b)_0|\leqq\|w\|_s\cdot\|b\|_{-s}.\tag{5}$$

因而我们可以写成

$$\|b\|_{-s}=\|f_b\|_{-s}=\sup_{\|w\|_s\leq1}|(w,b)_0|\qquad\text{对任一}\ b\in H_0^0(\Omega).\tag{5'}$$

我们来证明

定理 1 (P. Lax[2]) 空间$H_0^s(\Omega)$的对偶空间$H_0^s(\Omega)'$可等同于空间 $H_0^0(\Omega)=L^2(\Omega)$在负范数下的完备化.

为了证明我们先需

命题 $H_0^s(\Omega)$上的形如f_b的连续线性泛函的全体F稠密于 Hilbert 空间 $H_0^s(\Omega)'$——$H_0^s(\Omega)$的对偶空间.

证明 F在下述意义下是在$H_0^s(\Omega)$上完全的(total):对固定的$w\in H_0^s(\Omega)$,仅当$w=0$时才会同时有诸$f_b(w)=0$, $b\in H_0^0(\Omega)$.这是显然的,因为任一$w\in H_0^s(\Omega)$也是$H_0^0(\Omega)$的元.

今若F在 Hilbert 空间$H_0^s(\Omega)'$中不是稠的,则在第二共轭空间$H_0^s(\Omega)''=(H_0^s(\Omega)')'$中存在一元$T\neq 0$使得对一切$f_b\in F$均有$T(f_b)=0$. 由 Hilbert 空间$H_0^s(\Omega)$的自反性,存在一元$t\in H_0^s(\Omega)$使对一切$f\in H_0^s(\Omega)'$有$T(f)=f(t)$. 于是对一切$b\in H_0^0(\Omega)$有$T(f_b)=f_b(t)=0$. 根据上面证明的$F$的完全性,这导致$t=0$,与$T\neq 0$矛盾.

系 我们有与(3′)对偶的

$$\|w\|_s=\sup_{b\in H_0^0(\Omega),\|b\|_{-s}\leq 1}|(w,b)_0| \qquad \text{对一切 } w\in H_0^s(\Omega). \tag{6}$$

证明 因$F=\{f_b; b\in H_0^0(\Omega)\}$稠密于$H_0^s(\Omega)'$,由第三章§6之系3,知结论为显然.

定理 1 的证明 由下列事实定理为显然:i)F稠密于对偶空间$H_0^s(\Omega)'$,且 ii)F是一一对应于集合$H_0^0(\Omega)=L^2(\Omega)$,此对应还是保持负范数的,即

$$F\ni f_b\longleftrightarrow b\in H_0^0(\Omega) \text{ 且 } \|f_b\|_{-s}=\|b\|_{-s}.$$

我们以$H_0^{-s}(\Omega)$记$H_0^0(\Omega)$关于负范数$\|b\|_{-s}$的完备化. 于是

$$H_0^s(\Omega)'=H_0^{-s}(\Omega). \tag{7}$$

对$H_0^s(\Omega)$上的任一连续线性泛函f,我们以$\langle w, f\rangle$表示f在$w\in H_0^s(\Omega)$上的值. 于是对任一$b\in H_0^0(\Omega)$,我们可以写为

$$f_b(w)=(w,b)_0=\langle w,f_b\rangle=\langle w,b\rangle \quad w\in H_0^s(\Omega), \tag{8}$$

并有广义 Schwarz 不等式

$$|\langle w,b\rangle|\leqq\|w\|_s\|b\|_{-s}, \tag{9}$$

它正是(5).

现在我们能证明

定理 2 (P. Lax[2]) $H_0^{-s}(\Omega)$上任一连续线性泛函$g(b)$能借助于一固定元$w\in H_0^s(\Omega)$而表示成

$$g(b)=g_w(b)=\overline{\langle w,b\rangle}. \tag{10}$$

特别,我们有

$$H_0^s(\Omega)'=H_0^{-s}(\Omega), \quad H_0^{-s}(\Omega)'=H_0^s(\Omega). \tag{11}$$

证明 若$b\in H_0^0(\Omega)$,则$\langle w,b\rangle=f_b(w)=(w,b)_0$. 由于$F=\{f_b; b\in H_0^0(\Omega)\}$稠密于 Hilbert 空间$H_0^s(\Omega)'$,由(9)我们知道对一固定的$w\in H_0^s(\Omega)$, $\overline{\langle w,b\rangle}=(b,w)_0$确定了一个在$H_0^s(\Omega)'$的稠

集F上连续的线性泛函．在F上的这个泛函的范数记为$\|g_w\|_s$．则由(6)

$$\|g_w\|_s=\sup_{\|b\|_{-s}\leq 1}|(b,w)_0|=\sup_{\|b\|_{-s}\leq 1}|(w,b)_0|=\|w\|_s. \tag{12}$$

于是我们可以连续延拓F上的泛函g_w为F的（关于负范数）完备化上的一连续线性泛函，亦即g_w能延拓成$H_0^s(\Omega)'=H_0^{-s}(\Omega)$上的一连续线性泛函；我们用同一字母$g_w$记此延拓(泛函)．于是我们有

$$\|g_w\|=\sup_{\|b\|_{-s}\leq 1}|g(b)|=\|w\|_s. \tag{13}$$

因而，由于空间$H_0^s(\Omega)$的完备性，$H_0^{-s}(\Omega)$上的连续线性泛函g_w的全体G按照对应关系$g_w\longleftrightarrow w$可视为$H_0^{-s}(\Omega)'$的一闭线性子空间．如果这个闭线性子空间不在$H_0^{-s}(\Omega)'$中稠密，则存在$H_0^{-s}(\Omega)'$上的连续线性泛函$f\neq 0$使得对一切$g_w\in G$有$f(g_w)=0$．但是因为Hilbert空间$H_0^{-s}(\Omega)$是自反的，这样的一个泛函必由$f(g_w)=g_w(f_0)$给定，其中$f_0\in H_0^{-s}(\Omega)$．故由(3′)f_0必为0，与$f\neq 0$这一事实矛盾．所以我们就证明了$H_0^{-s}(\Omega)'=H_0^s(\Omega)$．

注　负范数的概念是由P. Lax为了把它用于线性偏微分方程的分布解的真正可微性而引入的．我们将在以后的章节中研究这样的可微性．值得注意的是负范数的概念也可通过Fourier变换而自然地引入．这是由J. Leray[1]早于Lax而完成的．我们将在以后关于Fourier变换的一章中阐明这一点．

§11. 广义函数的局部结构

一个广义函数局部地是一个函数的分布导数．较准确地说，我们能证明

定理(L. Schwartz[1])　设T是$\Omega\subseteq R^n$内的一广义函数．则对Ω的任一紧子集K，存在一正整数$m_0=m_0(T,K)$和一函数$f(x)=f(x;T,K,m_0)\in L^2(K)$使得

$$T(\varphi)=\int_K f(x)\frac{\partial^{nm_0}\varphi(x)}{\partial x_1^{m_0}\partial x_2^{m_0}\cdots\partial x_n^{m_0}}dx\quad 只要\ \varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega). \tag{1}$$

证明　由第一章§8中的系，存在一正数C和一正整数m使得

$$|T(\varphi)|\leq C\sup_{|j|\leq m,\,x\in K}|D^j\varphi(x)|\qquad 只要\ \varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega). \tag{2}$$

于是存在一正数δ使得

$$p_m(\varphi)=\sup_{|j|\leq m,\,x\in K}|D^j\varphi(x)|\leq\delta\qquad 必导致|T(\varphi)|\leq 1. \tag{3}$$

我们引入记号

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s}=\frac{\partial^{sn}}{\partial x_1^s\partial x_2^s\cdots\partial x_n^s}, \tag{4}$$

并证明存在一正数ε使得，对$m_0=m+1$

$$\int_\Omega|\partial^{m_0}\varphi(x)/\partial x^{m_0}|^2dx\leq\varepsilon,\ \varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega)\quad 必导致\ p_m(\varphi)\leq\delta. \tag{5}$$

这可由重复使用下列不等式而得证

$$|\psi(x)|\leq\int_{K\cap(-\infty,x_i)}|\partial\psi(x_1,\cdots,x_{i-1},y,x_{i+1},\cdots,x_n)/\partial y|^2dy$$

$$\leq\left(\int_{K\cap(-\infty,x_i)}dy\right)^{1/2}\left(\int_{K\cap(-\infty,x_i)}|\partial\psi(x_1,\cdots,x_{i-1},y,x_{i+1},\cdots,x_n)/\partial y|^2dy\right)^{1/2}$$

$$=t^{1/2}\left(\int_{K\cap(-\infty,x_i)}|\partial\psi(x_1,\cdots,x_{i-1},y,x_{i+1},\cdots,x_n)/\partial y|^2dy\right)^{1/2},$$

其中 t 是K的直径，即紧集K中两点间的最大距离.

考察映 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 入 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 内的映射 $\varphi(x)\longrightarrow\psi(x)=\partial^{m_0}\varphi(x)/\partial x^{m_0}$. 由积分学可知 $\psi(x)=0$ 导致 $\varphi(x)=0$. 因此上面的映射是一对一的. 于是借助于关系 $S(\psi)=T(\varphi)$, $T(\varphi)$ $(\varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega))$, 便确定了一个线性泛函 $S(\psi)$, 其中 $\psi=\partial^{m_0}\varphi(x)/\partial x^{m_0}$. 根据(3)和(5), S 是上述这些 ψ 的全体组成的且用范数$\|\psi\|=\left(\int_K|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}$拓扑化的 pre-Hilbert 空间$X$上的连续线性泛函. 于是由 F. Riesz 表示定理存在一唯一确定的属于X的完备化空间的函数 $f(x)$使得

$$T(\varphi)=S(\psi)=\int_K(\partial^{m_0}\varphi/\partial x^{m_0})\cdot f(x)dx \quad \text{对一切 } \varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega).$$

实际上, X 的完备化空间作为一闭线性子空间而含于 $L^2(K)$内, 故定理得证.

第三章参考文献

对 Hilbert 空间的一般记述请参看 N. I. Achieser-I. M. Glasman[1], N. Dunford-J. Schwartz[2], B. Sz. Nagy[1], F. Riesz-B. Sz. Nagy[3]和 M. H. Stone[1].

第四章　Hahn-Banach 定理

在一个 Hilbert 空间中，我们能通过一个正交基而引入正交坐标的概念，并且这些坐标就是由基矢量定义的有界线性泛函的值．这启示我们在一线性拓扑空间中把连续线性泛函看作这个空间的广义坐标．为确信在一个一般的局部凸线性拓扑空间中非平凡连续线性泛函的存在性，我们必须依赖 Hahn-Banach 延拓定理．

§1. 实线性空间中的 Hahn-Banach 延拓定理

定理(Hahn[2], Banach[1])　设 X 为一实线性空间，$p(x)$ 为定义在 X 上且满足条件

$$p(x+y)\leqq p(x)+p(y)\quad(\text{次可加性}),\tag{1}$$

$$p(\alpha x)=\alpha p(x)\qquad \text{对 } \alpha\geqq 0\tag{2}$$

的实值函数．设 M 为 X 的一实线性子空间，又 f_0 为一个定义在 M 上的实值线性泛函：

$$f_0(\alpha x+\beta y)=\alpha f_0(x)+\beta f_0(y)\quad \text{对 } x,y\in M \text{ 和实数 } \alpha,\beta.\tag{3}$$

假设 f_0 在 M 上满足 $f_0(x)\leqq p(x)$，则存在一个定义在 X 上的线性泛函 F 使得 i) F 是 f_0 的一个延拓，即对一切 $x\in M$，$F(x)=f_0(x)$，且 ii) 在 X 上 $F(x)\leqq p(x)$．

证明　首先假定 X 由 M 和一个元 $x_0\overline{\in}M$ 张成，亦即假定

$$X=\{x=m+\alpha x_0;\ m\in M,\ \alpha \text{ 为实数}\}.$$

因为 $x_0\overline{\in}M$，所以 $x\in X$ 表示成 $x=m+\alpha x_0$ 的方法是唯一的．由此知，若对任一实数 c，置

$$F(x)=F(m+\alpha x_0)=f_0(m)+\alpha c,$$

则 F 是 X 上的实线性泛函，并且是 f_0 的一个延拓．我们必须选取 c 使得 $F(x)\leqq p(x)$，即 $f_0(m)+\alpha c\leqq p(m+\alpha x_0)$．这个条件等价于下列两个条件

$$f_0(m/\alpha)+c\leqq p(x_0+m/\alpha)\qquad \text{对 } \alpha>0,$$

$$f_0(m/(-\alpha))-c\leqq p(-x_0+m/(-\alpha))\quad \text{对 } \alpha<0.$$

为满足这些条件，我们应选取 c 使得

$$f_0(m')-p(m'-x_0)\leqq c\leqq p(m''+x_0)-f_0(m'')\quad \text{对一切 } m',m''\in M.$$

c 的这样一种选取是可能的，因为

$$\begin{aligned}f_0(m')+f_0(m'')&=f_0(m'+m'')\leqq p(m'+m'')=p(m'-x_0+m''+x_0)\\&\leqq p(m'-x_0)+p(m''+x_0);\end{aligned}$$

我们只须选取 c 介于下列二个数之间

$$\sup_{m'\in M}[f_0(m')-p(m'-x_0)] \text{ 和 } \inf_{m''\in M}[p(m''+x_0)-f(m'')].$$

今考察 f_0 的一切那种实线性延拓 g 的族，即对这种延拓，不等式 $g(x)\leqq p(x)$ 应对 g 的定义

域中的一切 x 成立. 利用 h 为 g 的延拓这一关系而定义 $h \succ g$, 我们便将此族变成一部分有序族. 于是 Zorn 引理保证了 f_0 的极大线性延拓 g 的存在性, 且对此延拓不等式 $g(x) \leqq p(x)$ 对 g 的定义域中的一切 x 均成立. 我们需要证明 g 的定义域 $D(g)$ 重合于 X 本身. 如若不然, 取 $D(g)$ 作为 M, 且 g 作为 f_0, 我们便得一个 g 的真延拓 F, 且使 $F(x) \leqq p(x)$ 对 F 的定义域中的一切 x 成立, 这与线性延拓 g 的极大性矛盾.

系 给定一个定义在实线性空间 X 上且满足(1)和(2)的泛函 $p(x)$. 则存在一个定义在 X 上的线性泛函 f 使得

$$-p(-x) \leqq f(x) \leqq p(x). \tag{4}$$

证明 任取一点 $x_0 \in X$, 并定义 $M = \{x; x = \alpha x_0, \alpha \text{ 为实数}\}$. 命 $f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$. 则 f_0 是一个定义在 M 上的实线性泛函. 在 M 上, 我们有 $f_0(x) \leqq p(x)$. 事实上, 若 $\alpha > 0$ 则 $\alpha p(x_0) = p(\alpha x_0)$; 又若 $\alpha < 0$, 根据 $0 = p(0) \leqq p(x_0) + p(-x_0)$, 我们有 $\alpha p(x_0) \leqq -\alpha p(-x_0) = p(\alpha x_0)$. 因此存在一个定义在 X 上的线性泛函 f 使得在 M 上有 $f(x) = f_0(x)$ 且在 X 上 $f(x) \leqq p(x)$. 由于 $-f(x) = f(-x) \leqq p(-x)$, 我们得到 $-p(-x) \leqq f(x) \leqq p(x)$.

§2. 广义极限

可数个元素 x_n 的序列 $\{x_n\}$ 这个概念可推广到依赖于一个参数的元素的定向集的概念, 此参数可遍历一不可数集合. 元素序列的极限这个概念可推广到元素的定向集的广义极限的概念.

定义 元素 $\alpha, \beta, \cdots$ 的一个部分有序集合 A 称为是一个定向集, 如果它满足条件:

对 A 的任一元素对 α, β, 存在一 $\gamma \in A$ 使得

$$\alpha \prec \gamma, \quad \beta \prec \gamma. \tag{1}$$

设对定向集 A 的每一元素 α, 有一个确定的实数集合 $f(\alpha)$ 联系着. 因此 $f(\alpha)$ 是一个定义在定向集 A 上的不必是单值的实函数. 如果对任一 $\varepsilon > 0$, 存在一 $\alpha_0 \in A$, 使得 $\alpha_0 < \alpha$ 导致对 f 在 α 处的一切可能的值均有 $|f(\alpha) - a| < \varepsilon$ 成立, 则我们记

$$\lim_{\alpha \in A} f(\alpha) = a \quad (a \text{ 为一实数}).$$

在这种情况下, 我们称数值 a 是 $f(\alpha)$ 遍历定向集 A 的广义极限或 Moore-Smith 极限.

例 考察实区间 $[0, 1]$ 的一分割 Δ:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1.$$

$[0, 1]$ 的分割的全体 P 按如下定义的部分序 $\Delta \prec \Delta'$ 关系为一定向集. 若分割 Δ' 由 $0 = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_m = 1$ 给定, 则 $\Delta \prec \Delta'$ 表示 $n \leqq m$, 同时每一 t_i 等于某一 t'_j. 设 $x(t)$ 为一个定义在 $[0, 1]$ 上的实值连续函数, 且令 $f(\Delta)$ 为如下形式的实数的全体:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) x(t'_j), \quad \text{其中 } t'_j \text{ 为} [t_j, t_{j+1}] \text{中的任一点}.$$

因此 $f(\Delta)$ 是函数 $x(t)$ 关于分割 Δ 的 Riemann 和的全体. Riemann 积分 $\int_0^1 x(t)dt$ 的值不是别的, 而正是 $f(\Delta)$ 遍历 P 的广义极限.

至于广义极限的存在性，我们有

定理(S. Banach) 设 $x(\alpha)$ 是一个定义在定向集 A 上的实值有界函数. 这样的函数的全体按运算

$$(x+y)(\alpha)=x(\alpha)+y(\alpha),\quad (\beta x)(\alpha)=\beta x(\alpha),$$

构成一实线性空间 X. 则我们能确定一个定义在 X 上的线性泛函，我们记它为 $\underset{\alpha\in A}{\mathrm{LIM}}\,x(\alpha)$，使它满足条件

$$\underline{\lim_{\alpha\in A}}\,x(\alpha)\leq\underset{\alpha\in A}{\mathrm{LIM}}\,x(\alpha)\leq\overline{\lim_{\alpha\in A}}\,x(\alpha).$$

其中

$$\underline{\lim_{\alpha\in A}}\,x(\alpha)=\sup_{\alpha}\ \inf_{\alpha\prec\beta}x(\beta),\quad \overline{\lim_{\alpha\in A}}\,x(\alpha)=\inf_{\alpha}\ \sup_{\alpha\prec\beta}x(\beta).$$

故 $\underset{\alpha\in A}{\mathrm{LIM}}\,x(\alpha)=\lim_{\alpha\in A}x(\alpha)$，只要后一广义极限存在.

证明 置 $p(\alpha)=\overline{\lim_{\alpha\in A}}\,x(\alpha)$. 易知此 $p(x)$ 满足 Hahn-Banach 延拓定理的条件. 于是存在一个定义在 X 上的线性泛函 f 使得 $-p(-x)\leqq f(x)\leqq p(x)$. 容易证明 $\underline{\lim_{\alpha\in A}}\,x(\alpha)=-p(-x)$，故命 $\underset{\alpha\in A}{\mathrm{LIM}}\,x(\alpha)=f(x)$ 即得定理.

§3. 局部凸的完备线性拓扑空间

定义 如同在数值情况一样，我们可以在一个线性拓扑空间 X 中定义一个定向集 $\{x_\alpha\}$. 设 x 是 X 的一元，如果对 x 的每一邻域 $U(x)$，存在一指标 α_0 使得对一切 $\alpha\succ\alpha_0$ 均有 $x_\alpha\in U(x)$，则 $\{x_\alpha\}$ 称为收敛于 X 的一个元 x. X 的定向集 $\{x_\alpha\}$ 称为基本的，如果对 X 的 0 矢量的每一邻域 $U(0)$，总有一个指标 α_0，使得对一切指标 $\alpha,\beta\succ\alpha_0$ 均有 $(x_\alpha-x_\beta)\in U(0)$. 线性拓扑空间 X 称为完备的，如果 X 的每一定向基本集合在上面意义下收敛于某个元 $x\in X$.

注 我们能够减弱完备性的条件，而仅只要求 X 的作为定向集看待的每一基本序列收敛于一个元 $x\in X$；满足这个条件的空间 X 称为序列完备的. 对赋范空间而言，完备性的这二个定义是等价的. 尽管如此，在一般情况下，并非每一序列完备的空间是完备的.

一个局部凸的序列完备线性拓扑空间的例 设 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 的一个序列 $\{f_h(x)\}$ 在 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 中满足条件 $\lim\limits_{h,k\to\infty}(f_h-f_k)=0$. 根据第一章§1之命题7的系，这就是说我们假设存在 Ω 的一个紧集 K 使 $\mathrm{supp}(f_h)\subseteqq K\ (h=1,2,\cdots)$ 且对任一微分算子 D^s 在 K 上一致地成立 $\lim\limits_{h,k\to\infty}(D^sf_h(x)-D^sf_k(x))=0$. 于是利用 Ascoli-Arzelà 定理易知，存在函数 $f\in\mathfrak{D}(\Omega)$ 使得对任一微分算子 D^s 在 K 上一致地成立 $\lim\limits_{h\to\infty}D^sf_h(x)=D^sf(x)$. 因此在 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 中 $\lim\limits_{h\to\infty}f_h=f$，所以 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 是序列完备的. 相仿，我们能证明 $\mathfrak{E}(\Omega)$ 也是序列完备的.

象在赋范线性空间的情形一样，我们能证明

定理 每一局部凸的线性拓扑空间 X 能被嵌入到一个局部凸的完备线性拓扑空间之中，使

X 组成其中的一个稠密子集.

我们略去定理的证明. 读者可参阅列于 J. A. Dieudonné[1] 中的文献. 也可参看 G. Köthe[1].

§4. 复线性空间中的 Hahn-Banach 延拓定理

定理(Bohneblust-Sobczyk) 设 X 为一复线性空间, p 为一定义在 X 上的半范数. 设 M 为 X 的一个复线性子空间, 又 f 是一个定义在 M 上且在 M 上 $|f(x)|\leq p(x)$ 的复线性泛函. 则存在一个定义在 X 上的复线性泛函 F 使得 i) F 是 f 的一个延拓, 且 ii) 在 X 上 $|F(x)|\leq p(x)$.

证明 我们注意, 如果数乘被限制在实数中, 则一个复线性空间也是一个实线性空间. 如果 $f(x)=g(x)+ih(x)$, 其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 分别是 $f(x)$ 的实部和虚部, 则 g 和 h 是定义在 M 上的实线性泛函. 因此

在 M 上 $\qquad |g(x)|\leq|f(x)|\leq p(x)$ 和 $|h(x)|\leq|f(x)|\leq p(x)$.

由于对每一 $x\in M$

$$g(ix)+ih(ix)=f(ix)=if(x)=i(g(x)+ih(x))=-h(x)+ig(x),$$

所以我们有

$$h(x)=-g(ix) \qquad \text{对一切 } x\in M.$$

根据第四章 §1 中的定理, 我们能延拓 g 成为一个定义在 X 上的实线性泛函 G, 使得在 X 上恒有 $G(x)\leq p(x)$. 我们定义

$$F(x)=G(x)-iG(ix).$$

则根据 $F(ix)=G(ix)-iG(-x)=G(ix)+iG(x)=iF(x)$, 易知 F 是定义在 X 上的一个复线性泛函. F 是 f 的一个延拓. 因 $x\in M$ 导致

$$F(x)=G(x)-iG(ix)=g(x)-ig(ix)=g(x)+ih(x)=f(x).$$

为证明 $|F(x)|\leq p(x)$, 我们记 $F(x)=re^{-i\theta}$, 故 $|F(x)|=e^{i\theta}F(x)=F(e^{i\theta}x)$ 是正实数; 因而 $|F(x)|=|G(e^{i\theta}x)|\leq p(e^{i\theta}x)=|e^{i\theta}|p(x)=p(x)$.

§5. 赋范线性空间中的 Hahn-Banach 延拓定理

定理 1 设 X 为一赋范线性空间, M 为 X 的一个线性子空间, 且 f_1 为一个定义在 M 上的连续线性泛函. 则存在一个定义在 X 上的连续线性泛函 f 使得 i) f 是 f_1 的一个延拓, 且 ii) $\|f_1\|=\|f\|$.

证明 命 $p(x)=\|f_1\|\cdot\|x\|$. 则 p 是一个定义在 X 上的连续半范数, 且使得在 M 上 $|f_1(x)|\leq p(x)$. 根据前面 §4 的定理, 存在 f_1 的一个线性延拓 f, 它定义在全空间 X 上且使得 $|f(x)|\leq p(x)$. 因此 $\|f\|\leq\sup\limits_{\|x\|\leq1}p(x)=\|f_1\|$. 另一方面, 因 f 是 f_1 的一个延拓, 必有 $\|f\|\geq\|f_1\|$, 所以我们得到 $\|f_1\|=\|f\|$.

对矩量问题的一个应用

定理 2 设 X 为一赋范线性空间. 给定一序列的元素 $\{x_n\}\subseteq X$, 一序列的复数 $\{\alpha_n\}$ 和一个正数 γ. 则存在一个在 X 上的连续线性泛函 f 使得 $f(x_i)=\alpha_i\ (i=1, 2, \cdots)$ 且 $\|f\|\leq\gamma$ 的充要条件是不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i\right|\leq\gamma\left\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right\|$$

对正整数 n 和复数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的任一选取均成立.

证明 必要性由 $\|f\|$ 的定义自明. 我们来证明充分性. 考察集合

$$X_1=\{z: z=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\quad 其中\ n\ 和\ \beta\ 均为任意\}.$$

对同一元素 $z\in X_1$ 的二个表示 $z=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i=\sum_{i=1}^{m}\beta_{i'}x_{i'}$, 根据定理条件, 我们有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i-\sum_{i=1}^{m}\beta_{i'}\alpha_{i'}\right|\leq\gamma\left\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i-\sum_{i=1}^{m}\beta_{i'}x_{i'}\right\|=0.$$

因此按 $f_1\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i$, 便在 X_1 上确定了一个连续线性泛函 f_1. 根据前面的定理 1, 我们只需延拓 f_1 成为一个在 X 上的适合 $\|f\|=\|f_1\|$ 的连续线性泛函 f.

注 在本章 § 9 中将要证明, $C[0, 1]$ 上的任一连续线性泛函 f 可表示成

$$f(x)=\int_0^1 x(t)m(dt),$$

其中 m 是一个在区间 $[0, 1]$ 上唯一确定的 Baire 测度. 因此若我们取 $x_j(t)=t^{j-1}\ (j=1, 2, \cdots)$, 则定理 2 给出了**矩量问题**

$$\int_0^1 t^{j-1}m(dt)=\alpha_j\quad (j=1, 2, \cdots)$$

的可解性条件.

§ 6. 非平凡连续线性泛函的存在性

定理 1 设 X 为一个实或复的线性拓扑空间, x_0 为 X 的一个点, 又 $p(x)$ 为 X 上的一个连续半范数. 则存在一个在 X 上的连续线性泛函 F 使得 $F(x_0)=p(x_0)$, 且在 X 上有 $|F(x)|\leq p(x)$.

证明 设 M 为一切元素 αx_0 的集合, 在 M 上按 $f(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$ 定义 f. 则 f 在 M 上是线性的, 且 $|f(\alpha x_0)|=|\alpha p(x_0)|=p(\alpha x_0)$. 于是根据第四章 § 4 中的定理, 存在 f 的一个延拓 F 使得在 X 上有 $|F(x)|\leq p(x)$. 故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处随着 $p(x)$ 的连续而连续. 且由于 F 的线性性质, 故 $F(x)$ 在 X 的任一点连续.

系 1 设 X 为一局部凸空间, 又 $x_0\neq 0$ 为 X 的一元. 则存在一个在 X 上的连续半范数 p 使得

$p(x_0)\neq 0$. 从而由定理 1,存在一个在 X 上的连续线性泛函 f_0 使得

$$f_0(x_0)=p(x_0)\neq 0 \quad 且在 X 上有 |f_0(x)|\leq p(x).$$

系 2 设 X 为一赋范线性空间,又 $x_0\neq 0$ 为 X 的任一元. 则存在一个在 X 上的连续线性泛函 f_0 使得

$$f_0(x_0)=\|x_0\| \quad 且 \quad \|f_0\|=1.$$

证明 取 $\|x\|$ 作为系 1 中的 $p(x)$. 因此由 $|f_0(x)|\leq\|x\|$ 有 $\|f_0\|\leq 1$. 但因 $f_0(x_0)=\|x_0\|$,必有等式 $\|f_0\|=1$.

注 同上面的论证那样,根据第四章 § 1 中定理,我们可证明下面的定理.

定理 1′ 设 X 为一实线性拓扑空间, x_0 为 X 的一个点, 又 $p(x)$ 为 X 上的一个实连续泛函使得

$$p(x+y)\leq p(x)+p(y) \quad 且对 \alpha\geqq 0 有 p(\alpha x)=\alpha p(x).$$

则存在一个在 X 上的实连续线性泛函 F 使得 $F(x_0)=p(x_0)$ 且在 X 上有 $-p(-x)\leqq F(x)\leqq p(x)$.

定理 2 设 X 为一局部凸线性拓扑空间. 设 M 为 X 的一线性子空间, 又 f 为 M 上的一个连续线性泛函. 则存在一个在 X 上的连续线性泛函 F,它是 f 的一个延拓.

证明 由于 f 在 M 上连续且 X 为局部凸,故存在 X 上的 0 点的一个平衡的开凸邻域,例如说是 U,使得 $x\in M\cap U$ 导致 $|f(x)|\leqq 1$. 令 p 为 U 的 Minkowski 泛函. 则 p 是 X 上的一个连续半范数且 $U=\{x; p(x)<1\}$. 对任一 $x\in M$ 选取 $\alpha>0$ 使 $\alpha>p(x)$. 此时 $p(x/\alpha)<1$, 故 $|f(x/\alpha)|\leqq 1$, 此即 $|f(x)|\leqq\alpha$. 因此令 $\alpha\downarrow p(x)$ 即知在 M 上有 $|f(x)|\leqq p(x)$. 于是根据第四章 § 4 中的定理,我们得到一个在 X 上的连续线性泛函 F,使得 F 是 f 的一个延拓且在 X 上有 $|F(x)|\leqq p(x)$.

定理 3 (S. Mazur) 设 X 为一个实或复的局部凸线性拓扑空间, M 为 X 的一平衡的闭凸子集. 则对任一 $x_0\bar{\in} M$, 存在一个在 X 上的连续线性泛函 f_0 使得 $f_0(x_0)>1$ 同时在 M 上有 $|f_0(x)|\leqq 1$.

证明 由于 M 为闭, 存在 0 点的一个平衡的凸邻域 V 使得 $M\cap(x_0+V)=\varnothing$. 因 V 是平衡且凸的,我们有 $\left(M+\frac{V}{2}\right)\cap\left(x_0+\frac{V}{2}\right)=\varnothing$. 由于集合 $\left(x_0+\frac{V}{2}\right)$ 系 x_0 的一个邻域,故 $\left(M+\frac{V}{2}\right)$ 的闭包 U 不包含 x_0. 由于 $M\ni 0$, 平衡的闭凸集 U 是 0 的一个邻域, 这是因为 U 包含 $\frac{V}{2}$ 作为它的子集. 令 p 为 U 的 Minkowski 泛函. 由于 U 是闭的, 因此对任一 $x_0\bar{\in} U$, 我们有 $p(x_0)>1$, 且若 $x\in U$ 则 $p(x)\leqq 1$.

因此根据定理 1 的系 1, 存在一个在 X 上的连续线性泛函 f_0 使 $f(x_0)=p(x_0)>1$ 且在 X 上有 $|f_0(x)|\leqq p(x)$,因而尤其在 M 上有 $|f_0(x)|\leqq 1$.

系 设 M 为局部凸线性拓扑空间 X 的一个闭线性子空间. 则对任一 $x_0\in X-M$,存在一个在 X 上的连续线性泛函 f_0 使得 $f_0(x_0)>1$ 且在 M 上有 $f_0(x)=0$. 此外若 X 是一赋范线性空间并且 $\mathrm{dis}(x_0, M)>d$, 则可取 $\|f_0\|\leqq 1/d$.

证明 第一部分由 M 的线性性质而显然. 第二部分可利用在定理 3 的证明中取 $U=\{x;$

$\operatorname{dis}(x, M) \leqq d\}$而得证.

注 同前面的论证那样, 利用定理 1′ 我们可证明下面的定理:

定理 3′ (S. Mazur) 设 X 为一实的局部凸线性拓扑空间, M 为 X 的一凸闭子集使得 $M \ni 0$. 则对任一$x_0 \overline{\in} M$, 存在一个在 X 上连续的实线性泛函 f_0 使得 $f_0(x_0) > 1$ 且在 M 上有 $f_0(x) \leqq 1$.

定理 4 (S. Mazur) 设 X 为一局部凸线性拓扑空间, M 为 X 的 0 点的一个平衡的凸邻域. 则对任一 $x_0 \overline{\in} M$, 存在一个在 X 上的连续线性泛函 f_0 使得

$$f_0(x_0) \geqq \sup_{x \in M} |f_0(x)|.$$

证明 设 p 为 M 的 Minkowski 泛函. 则 $p(x_0) \geqq 1$ 且在 M 上 $p(x) \leqq 1$. 由于 M 是 X 的 0 的邻域, 故 p 是连续的. 于是根据定理 1 的系 1, 存在一个在 X 上的连续线性泛函 f_0 使得

$$f_0(x_0) = p(x_0) \geqq 1 \quad \text{且在} M \text{上} \quad |f_0(x)| \leqq p(x) \leqq 1.$$

定理 5 (E. Helly) 设 X 为一 B-空间, 又 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 X 上的有界线性泛函的一个有限组. 给定 n 个数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 则使得对每一 $\varepsilon > 0$ 存在一元 $x_\varepsilon \in X$ 满足

$$f_i(x_\varepsilon) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad \text{且} \quad \|x_\varepsilon\| \leqq \gamma + \varepsilon$$

的充要条件为不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| \leqq \gamma \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\right\|$$

对 n 个数 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的任一选取均成立.

证明 必要性由连续线性泛函的范数的定义而显然. 我们来证明充分性. 不失一般性, 我们可假设诸 f 是线性无关的; 因否则我们可对 $\{f_i\}$ 的线性无关的子组进行讨论, 而此子组与原组张成相同的子空间.

考察 X 到 Hilbert 空间 $l^2(n)$ 上的映射 $x \to \varphi(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$, 这里 $l^2(n)$ 表示由一切矢量 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 按范数 $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2\right)^{1/2}$ 组成的 Hilbert 空间. 根据第二章 § 5 的开映射定理, 对每一 $\varepsilon > 0$, 球 $S_\varepsilon = \{x \in X; \|x\| \leqq \gamma + \varepsilon\}$ 的象 $\varphi(S_\varepsilon)$ 包含 $l^2(n)$ 的 0 点作为其内点. 今假设 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 不属于 $\varphi(S_\varepsilon)$, 则根据上面给出的 Mazur 定理, 存在一个在 $l^2(n)$ 上的连续线性泛函 F 使得

$$F((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)) \geqq \sup_{\|x\| \leqq \gamma + \varepsilon} |F(\varphi(x))|.$$

由于 $l^2(n)$ 为一Hilbert空间, 从而泛函 F 按 $F((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j$ 这样的方式由一个元素 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \in l^2(n)$ 所给定. 故

$$\text{对} \|x\| \leqq \gamma + \varepsilon \text{ 有 } \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \geqq \left|\sum_{j=1}^n f_j(x) \beta_j\right|.$$

但右端当 $\|x\| \leqq \gamma + \varepsilon$ 时的上确界是 $= (\gamma + \varepsilon) \times \left\|\sum_{j=1}^n f_j \beta_j\right\|$, 这与定理的假设矛盾.

§ 7. 线性映射的拓扑

设 X, Y 为同一数域(实或复数域)上的局部凸线性拓扑空间. 以 $L(X,Y)$ 记映X入Y内的连续线性算子的全体. $L(X,Y)$按关系

$$(\alpha T+\beta S)x=\alpha Tx+\beta Sx,\quad 其中\ T,S\in L(X,Y)\ 且\ x\in X,$$

成一线性空间. 我们将对这个线性空间 $L(X,Y)$引入种种拓扑.

i) **简单收敛拓扑** 这是一种在X的每一个点收敛的拓扑, 因此它是由形如

$$p(T)=p(T;x_1,x_2,\cdots,x_n;q)=\sup_{1\leq j\leq n}q(Tx_j)$$

的半范数族确定的, 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为X的元素的任一有限组, 又 q 为 Y 上的一个任意的连续半范数. 赋予这种拓扑的 $L(X,Y)$将记为 $L_s(X,Y)$. 显然它是局部凸线性拓扑空间.

ii) **有界收敛拓扑** 这是一种在X的有界集上一致收敛的拓扑. 因此它是由形如

$$p(T)=p(T;B;q)=\sup_{x\in B}q(Tx)$$

的半范数族确定的, 其中 B 是 X 的一任意有界集, q 是 Y 上的一个任意的连续半范数. 赋予这种拓扑的 $L(X,Y)$将记为 $L_b(X,Y)$. 它显然是一个局部凸线性拓扑空间.

由于X的任一有限集合是有界的, 故简单收敛拓扑弱于有界收敛拓扑, 即 $L_s(X,Y)$ 的诸开集均是 $L_b(X,Y)$的开集, 但反之不真.

定义 1 若 X,Y 均为赋范线性空间, 则 $L_s(X,Y)$的拓扑通常称为(算子的)强拓扑; $L_b(X,Y)$的拓扑称为(算子的)一致拓扑.

对偶空间. 弱及弱*拓扑

定义 1′ 在Y为按通常意义下拓扑化了的实或复数域这一特殊情况下, $L(X,Y)$ 称为X的对偶空间, 并记为 X'. 因此 X' 是 X 上的连续线性泛函的全体的集合. 此时简单收敛拓扑称为 X' 的弱*拓扑; 倘若 X' 具有这种拓扑, X' 有时将记为 X'_{w^*}, 并称为 X 的弱*对偶. 对 X' 的有界收敛拓扑, 称为 X' 的强拓扑; 倘若 X' 具有这种拓扑, X' 有时记为 X'_s, 且称为 X 的强对偶.

定义 2 对任一 $x\in X$ 及 $x'\in X'$, 我们将以$\langle x,x'\rangle$或 $x'(x)$ 记泛函 x' 在点 x 处的数值. 因此 X' 的弱*拓扑, 即 X'_{w^*} 的拓扑, 由形如

$$p(x')=p(x';x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sup_{1\leq j\leq n}|\langle x_j,x'\rangle|$$

的半范数族确定, 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的元素的一个任意有限组. X' 的强拓扑, 即 X'_s 的拓扑, 由形如

$$p(x')=p(x';B)=\sup_{x\in B}|\langle x,x'\rangle|$$

的半范数族确定, 其中 B 是 X 的一个任意有界集合.

定理 1 若 X 为一赋范线性空间, 则强对偶空间 X'_s 是具有范数

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)|$$

的一个 B-空间.

证明 设 B 为 X 的任一有界集合. 则 $\sup\limits_{b\in B}\|b\|=\beta<\infty$. 于是 $\|f\|\leq\alpha$ 导致 $p(f;B)=\sup\limits_{x\in B}|f(x)|\leq\sup\limits_{\|x\|\leq\beta}|f(x)|\leq\alpha\beta$. 另一方面, X 的单位球 $S=\{x;\|x\|\leq1\}$ 是一有界集合, 所以 $\|f\|=p(f;S)$. 这就证明了 X'_s 的拓扑等价于由范数定义的拓扑.

X'_s 的完备性证明如下. 设 X'_s 的一个序列 $\{f_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$. 则对任一 $x\in X$, $|f_n(x)-f_m(x)|\leq\|f_n-f_m\|\cdot\|x\|\to0$(当 $n, m\to\infty$). 因而有限的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 存在. f 的线性性质是显然的. 注意到在单位球 S 上一致地有 $\lim f_n(x)=f(x)$, f 的连续性便得证. 在此我们已顺便证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$.

相仿我们能证明

定理 2 若 X, Y 为赋范线性空间, 则 $L_b(X,Y)$ 的(算子的)一致拓扑由算子范数

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leq1}\|Tx\|$$

确定.

定义 3 我们用形如

$$p(x)=p(x;x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)=\sup_{1\leq j\leq n}|\langle x,x'_j\rangle|$$

的半范数族定义局部凸线性拓扑空间 X 的弱拓扑, 其中 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ 为 X' 的元素的一个任意有限组. 赋予这种拓扑后, X 有时记为 X_w.

§8. 嵌 X 入它的重对偶空间 X''

首先证明

定理 1(S. Banach) 设 X 为一局部凸线性拓扑空间, X' 为它的对偶空间. X' 上的一个线性泛函 $f(x')$ 是一个形如

$$f(x')=\langle x_0,x'\rangle$$

的线性泛函(其中 x_0 是 X 中某固定元), 当且仅当 $f(x')$ 在 X' 的弱*拓扑下连续.

证明 由于 $|\langle x_0,x'\rangle|$ 是一个定义 X' 的弱*拓扑的半范数, 故"仅当"部分自明."当"的部分证明如下. $f(x')$ 在 X' 的弱*拓扑下的连续性导致存在点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个有限组使得 $|f(x')|\leq\sup\limits_{1\leq j\leq n}|\langle x_j,x'\rangle|$. 因此

$$f_i(x')=\langle x_i,x'\rangle=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \text{ 导致 } f(x')=0.$$

考察由

$$L(x')=(f_1(x'),f_2(x'),\cdots,f_n(x'))$$

定义的线性映射 L: $X'\to l^2(n)$. $L(x'_1)=L(x'_2)$ 导致 $L(x'_1-x'_2)=0$, 故 $f_i(x'_1-x'_2)=0(i=1,2,\cdots,n)$, 于是 $f(x'_1-x'_2)=0$. 因而我们可以由

$$F(L(x'))=F(f_1(x'),f_2(x'),\cdots,f_n(x'))=f(x')$$

确定一个定义在 $l^2(n)$ 的线性子空间 $L(X')$ 上的连续线性映射 F. 这个映射可延拓成定义在整

个空间 $l^2(n)$ 上的一个连续线性泛函；由于 $l^2(n)$ 是有限维的，此延拓是可能的(较之利用无限维线性空间中的 Hahn-Banach 延拓定理更为容易)．我们以同一字母 F 记此延拓．记

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \quad 其中\ e_j = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots, 0)$$

1 在第 j 个坐标上，

易知

$$F(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j, \quad \alpha_j = F(e_j).$$

所以

$$f(x') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x_j, x' \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, x' \rangle.$$

系 每一 $x_0 \in X$，通过 $f_0(x') = \langle x_0, x' \rangle$，定义了一个在 X'_s 上的连续线性泛函 f_0．X 入 $(X'_s)'_s$ 中的映射

$$x_0 \to f_0 = Jx_0$$

满足条件

$$J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2), \quad J(\alpha x) = \alpha J(x).$$

定理 2 若 X 为一赋范线性空间，则映射 J 是等距的，即 $\|Jx\| = \|x\|$.

证明 我们有 $|\langle f_0(x') \rangle| = |\langle x_0, x' \rangle| \leqq \|x_0\| \cdot \|x'\|$，故 $\|f_0\| \leqq \|x_0\|$．另一方面，若 $x_0 \neq 0$，则根据第四章 § 6 中定理 1 的系 2，存在元 $x'_0 \in X'$ 使得 $\langle x_0, x'_0 \rangle = \|x_0\|$ 且 $\|x'_0\| = 1$．因而 $f_0(x'_0) = \langle x_0, x'_0 \rangle = \|x_0\|$，故 $\|f_0\| \geqq \|x_0\|$．因此我们便证明了 $\|Jx\| = \|x\|$.

注 作为 X'_s 的强对偶空间，空间 $(X'_s)'_s$ 为一 B-空间．因而赋范线性空间 X 借助于嵌入 $x \to Jx$，可看成是 B-空间 $(X'_s)'_s$ 的一线性子空间．所以 JX 在 B-空间 $(X'_s)'_s$ 中的强闭包给出了 X 的完备化的一个具体结构.

定义 4 赋范线性空间 X 称为自反的，若借助于上面的对应 $x \leftrightarrow Jx$，X 可等同于它的第二对偶或重对偶 $(X'_s)'_s$．我们已经知道(见第三章 § 6) Hilbert 空间是自反的．正如上面指出的，$(X'_s)'_s$ 为一 B-空间，所以任一自反赋范线性空间必为一 B-空间.

定理 3 设 X 为一 B-空间，又 x''_0 为 X'_s 上的任一有界线性泛函，则对任一 $\varepsilon > 0$ 和 X'_s 的元素 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的任一有限组，存在一 $x_0 \in X$ 使得

$$\|x_0\| \leqq \|x''_0\| + \varepsilon \ 且\ f_j(x_0) = x''_0(f_j) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

证明 我们使用第四章 § 6 中的 Helley 的定理 5．对任一数组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$，我们有

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j x''_0(f_j) \right| = \left| x''_0\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j \right) \right| \leqq \gamma \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j \right\|,$$

$$其中\ \gamma = \|x''_0\|, \quad \alpha_j = x''_0(f_j),$$

因而由 Helley 定理，我们得到一 $x_0 \in X$，它适合估计 $\|x_0\| \leqq \gamma + \varepsilon = \|x''_0\| + \varepsilon$，同时 $f_j(x_0) = \alpha_j$ ($j = 1, 2, \cdots, n$).

系 B-空间X的单位球$S=\{x\in X;\ \|x\|\leqq 1\}$在$(X'_s)'$的弱*拓扑下稠密于$(X'_s)'_s$的单位球.

§9. 对偶空间的例

例 1 $(c_0)'=(l^1)$.

对任一$f\in(c_0)'$, 对应一个唯一确定的$y_f=\{\eta_n\}\in(l^1)$使得, 对一切$x=\{\xi_n\}\in(c_0)$

$$\langle x, f\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n \quad \text{且} \quad \|f\|=\|y_f\|. \tag{1}$$

反之, 任一$y=\{\eta_n\}\in(l^1)$定义了一个$f_y\in(c_0)'$使得, 对一切$x=\{\xi_n\}\in(c_0)$

$$\langle x, f_y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n \quad \text{且} \quad \|f_y\|=\|y\|. \tag{1'}$$

证明 让我们借助于

$$e_k=(\overbrace{0, 0, \cdots, 0}^{k-1}, 1, 0, 0, \cdots) \quad (k=1, 2, \cdots)$$

而定义单位矢量e_k. 对任一$x=\{\xi_n\}\in(c_0)$和$f\in(c_0)'$, 根据$\operatorname*{s-lim}_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\xi_n e_n=x$, 我们有

$$\langle x, f\rangle=\lim_{k\to\infty}\left\langle\sum_{n=1}^{k}\xi_n e_n,\ f\right\rangle=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\xi_n\eta_n, \quad \eta_n=f(e_n).$$

当$\eta_n\neq0$时令$\eta_n=\varepsilon_n|\eta_n|$, 而$\eta_n=0$时令$\varepsilon_n=\infty$. 作$x^{(n_0)}=\{\xi_n\}\in(c_0)$, 使$n\leqq n_0$时$\xi_n=\varepsilon_n^{-1}$, 而$n>n_0$时$\xi_n=0$. 于是$\|x^{(n_0)}\|\leqq1$, 因而

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leq1}|\langle x, f\rangle|\geqq|\langle x^{(n_0)}, f\rangle|=\sum_{n=1}^{n_0}|\eta_n|.$$

因此令$n_0\to\infty$, 即知$y_f=\{\eta_n\}\in(l^1)$且$\|y_f\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|\leqq\|f\|$.

反之, 若$y=\{\eta_n\}\in(l^1)$, 则对一切$x=\{\xi_n\}\in(c_0)$有$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n\right|\leqq\|x\|\cdot\|y\|$, 故$y$定义了一个$f_y\in(c_0)'$且$\|f_y\|\leqq\|y\|$.

例 2 $(c)'=(l^1)$.

对任一$x=\{\xi_n\}\in(c)$, 我们有表示式

$$x=\xi_0 e_0+\operatorname*{s-lim}_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(\xi_n-\xi_0)e_n, \text{其中} \xi_0=\lim_{n\to\infty}\xi_n, \quad e_0=(1, 1, 1, \cdots).$$

因此对任一$f\in(c)'$, 我们有

$$\langle x, f\rangle=\xi_0\langle e_0, f\rangle+\lim_{k\to\infty}\left\langle\sum_{n=1}^{k}(\xi_n-\xi_0)e_n, f\right\rangle=\xi_0\eta'_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_0)\eta_n, \tag{2}$$

其中$\eta'_0=\langle e_0, f\rangle$, 又$\eta_n=\langle e_n, f\rangle$ $(n=1, 2, \cdots)$. 像前面一样, 我们可取$x^{(n_0)}=\{\xi_n\}\in(c_0)\subseteq(c)$, 它满足

$$\|x^{(n_0)}\|\leqq 1,\quad \xi_0=\lim_{n\to\infty}\xi_n=0 \text{ 且 } \langle x^{(n_0)}, f\rangle=\sum_{n=1}^{n_0}|\eta_n|.$$

因而，根据 $|\langle x^{(n_0)}, f\rangle|\leqq\|x^{(n_0)}\|\,\|f\|$, 我们知 $\{\eta_n\}_1^\infty\in(l^1)$. 令 $\eta_0'-\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n=\eta_0$. 则由(2)有

$$\langle x, f\rangle=\xi_0\eta_0+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n,\ \text{其中 } x=\{\xi_n\}\in(c),\ \text{又 } \xi_0=\lim_{n\to\infty}\xi_n. \tag{2'}$$

对 $\eta_n\neq0$ 令 $\eta_n=\varepsilon_n|\eta_n|$, 而 $\eta_n=0$ 时令 $\varepsilon_n=\infty$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. 取 $x=\{\xi_n\}\in(c)$ 使得

$$\xi_n=\varepsilon_n^{-1} \text{ 当 } n\leqq n_0,\quad \xi_n=\varepsilon_0^{-1} \text{ 当 } n>n_0.$$

则 $\|x\|\leqq1$, $\xi_0=\lim_{n\to\infty}\xi_n=\varepsilon_0^{-1}$, 且 $\langle x, f\rangle=|\eta_0|+\sum_{n=1}^{n_0}|\eta_n|+\varepsilon_0^{-1}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\eta_n$. 因而我们必有

$$|\eta_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|\leqq\|f\|.$$

反之，若 $y=\{\eta_n\}_0^\infty$ 为满足 $\|y\|=|\eta_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|<\infty$ 的一个元，则

$$\eta_0\cdot\lim_{n\to\infty}\xi_n+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n,\quad \text{其中 } x=\{\xi_n\}_1^\infty\in(c)$$

确定了一元 $f_y\in(c)'$ 使得 $\|f_y\|\leqq|\eta_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|$.

所以，如上论述，我们已证明了 $(c)'=(l^1)$.

例 3 $L^p(S, \mathfrak{B}, m)'=L^q(S, \mathfrak{B}, m)$ $(1\leqq p<\infty$ 且 $p^{-1}+q^{-1}=1)$. 对任一 $f\in L^p(S)'$, 对应有一个 $y_f\in L^q(S)$ 使得

对一切 $\qquad x\in L^p(S)$ 成立 $\langle x, f\rangle=\int_S x(s)y_f(s)m(ds)$ 且 $\|f\|=\|y_f\|$, $\qquad$ (3)

反之，任一 $y\in L^q(S)$ 定义了一 $f_y\in L^p(S)'$ 使

对一切 $\qquad x\in L^p(S)$ 成立 $\langle x, f_y\rangle=\int_S x(s)y(s)m(ds)$ 且 $\|f_y\|=\|y\|$. $\qquad$ (3')

证明 设 $S=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$, 其中 $0<m(B_j)<\infty$, 并令 $B^{(n)}=\bigcup_{j=1}^{n}B_j$. 对固定的 n, 集合 $B\subseteqq B^{(n)}$ 的特征函数 $C_B(s)$ 是 $\in L^p(S)$. 因此集合函数 $\psi(B)=\langle C_B, f\rangle$ 在 $B\subseteqq B^{(n)}$ 内是 σ-可加并 m-绝对连续的. 根据 Lebesgue-Nikodym 的微分定理(见第三章 § 8), 存在 $y_n(s)\in L^1(B^{(n)}, \mathfrak{B}^{(n)}, m)$ 使得

$$\psi(B)=\int_B y_n(s)m(ds) \quad \text{当} \quad B\subseteqq B^{(n)},$$

集合族 $\mathfrak{B}^{(n)}$ 由 $\mathfrak{B}^{(n)}=\{B\cap B^{(n)}; B\in\mathfrak{B}\}$ 确定. 所以，通过令 $y(s)=y_n(s)$ (对 $s\in B^{(n)}$), 即有

$$\langle C_B, f\rangle=\int_B y(s)m(ds) \quad \text{对 } B\in\mathfrak{B}^{(n)} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

因而对任一支集在某个 $B^{(n)}$ 内的有限值函数 x, 有

$$\langle x, f\rangle = \int_S x(s)y(s)m(ds). \tag{4}$$

设 $x \in L^p(S)$，置

$$x_n(s) = x(s) \quad 若 |x(s)| \leq n 且 s \in B^{(n)},$$
$$= 0 \quad 其它情况.$$

我们把复平面上的集合 $\{z, |z| \leq n\}$ 分成有限个直径 $\leq \frac{1}{k}$ 的不相交的 Baire 集 $M_{n,k,t}(t=1, 2, \cdots, d_{k,n})$. 对上述的 $x_n(s) \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$，令

$x_{n,k}(s)$ = 这样的常数 z，它适合 $z \in$ (闭包 $M^a_{n,k,t}$) 且 $|z| = \inf\limits_{w \in M_{n,k,t}} |w|$ 只要 $x_n(s) \in M_{n,k,t}$.

于是 $|x_{n,k}(s)| \leq |x_n(s)|$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k}(s) = x_n(s)$，故由 Lebesgue-Fatou 引理，有 $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k} = x_n$ $(n=1, 2, \cdots)$. 因此，再次使用 Lebesgue-Fatou 引理

$$\langle x_n, f\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle x_{n,k}, f\rangle = \lim_{k\to\infty}\int_S x_{n,k}(s)y(s)m(ds)$$
$$= \int_S \lim_{k\to\infty} x_{n,k}(s)y(s)m(ds) = \int_S x_n(s)y(s)m(ds). \tag{5}$$

由于 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，知 $\langle x, f\rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n, f\rangle$. 对任一复数 z，$z = re^{i\theta}$，我们令 $a(z) = e^{-i\theta}$，并令 $a(0) = 0$. 则 $\|x\| \geq \|(|x_n| \cdot a(y))\|$，故

$$\|f\|\|x\| \geq \langle |x_n| a(y), f\rangle = \int_S |x_n(s)| \cdot |y(s)| m(ds),$$

因此由 Lebesgue-Fatou 引理，可得 $\|f\| \cdot \|x\| \geq \int_S |x(s)|\,|y(s)| m(ds)$，故函数 $x(s)y(s)$ 属于 $L^1(s)$. 所以在(5)中令 $n \to \infty$，我们得到

$$\langle x, f\rangle = \int_S x(s)y(s)m(ds) \quad 只要 x \in L^p(S).$$

我们来证明 $y \in L^q(S)$. 为此令

$$y_n(s) = y(s) \quad 若 |y(s)| \leq n 且 s \in B^{(n)},$$
$$= 0 \quad 其它情况.$$

则 $y_n \in L^q(S)$，且如前所证

$$\|f\| \cdot \|x\| \geq \langle |x| \cdot a(y), f\rangle = \int_S |x(s)|\,|y(s)| m(ds)$$
$$\geq \int_S |x(s)|\,|y_n(s)| m(ds).$$

若我们取 $x(s) = |y_n(s)|^{q/p}$ 并利用 Hölder 的等式，我们得

$$\int_S |x(s)|\,|y_n(s)| m(ds) = \left(\int_S |x(s)|^p m(ds)\right)^{1/p} \cdot \left(\int_S |y_n(s)|^q m(ds)\right)^{1/q}.$$

因而 $\|f\| \geq \|y_n\| = \left(\int_S |y_n(s)|^q m(ds)\right)^{1/q}$，此处当 $p=1$ 时，我们约定 $\|f\| \geq \|y_n\|$ = 本质的(essential)$\sup\limits_{s\in S} |y_n(s)|$.

所以, 令 $n\to\infty$ 且应用 Lebesgue-Fatou 引理, 我们知 $y\in L^q(S)$ 及 $\|f\|\geqq\|y\|$. 另一方面, 任一 $y\in L^q(S)$ 按 $\langle x, f\rangle=\int_S x(s)y(s)m(ds)$ 定义了一个 $f\in L^p(S)'$, 这一点可由 Hölder 不等式而知, 并且 Hölder 不等式表明 $\|f\|\leqq\|y\|$.

注 我们已附带证明了

$$(l^p)'=(l^q)\quad(1\leqq p<\infty \text{ 而 } p^{-1}+q^{-1}=1).$$

例 4 设适合 $m(S)<\infty$ 的测度空间 $(S, \mathfrak{B}, m)$ 具有性质: 对适合 $0<m(B)=\delta<\infty$ 的任一 $B\in\mathfrak{B}$ 和正整数 n, 都存在 B 的一子集 B_n 使得 $\delta(n+1)^{-1}\leqq m(B_n)\leqq\delta n^{-1}$, 则不可能存在非零连续线性泛函 $\in M(S, \mathfrak{B}, m)'$.

证明 任一 $x\in L^1(S, \mathfrak{B}, m)'$ 属于 $M(S, \mathfrak{B}, m)$, 且 $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 的拓扑强于 $M(S, \mathfrak{B}, m)$ 的拓扑. 因此任一 $f\in M(S, \mathfrak{B}, m)'$, 当限制在 $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 的函数上时, 它定义了一个连续线性泛函 $f_0\in L^1(S, \mathfrak{B}, m)'$. 于是存在一 $y\in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ 使得

$$\langle x, f\rangle=\langle x, f_0\rangle=\int_S x(s)y(s)m(ds)\quad \text{只要 } x\in L^1(S, \mathfrak{B}, m).$$

由于在 $M(S, \mathfrak{B}, m)$ 的拓扑下, $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 在 $M(S, \mathfrak{B}, m)$ 内稠密, 条件 $f\neq 0$ 导致 $f_0\neq 0$. 因此存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B=\{s; |y(s)|\geqq\varepsilon\}$ 有测度 $m(B)=\delta>0$. 设 $B_n\subseteq B$ 为假设条件中的集合, 并对 $s\in B$ 设 $y(s)=re^{i\theta}$, 今当 $s\in B_n$ 时令 $x_n(s)=e^{-i\theta}$, 在其它情况时令 $x_n(s)=0$. 此时 $z_n(s)=nx_n(s)$ 渐近收敛于 0, 亦即在 $M(S, \mathfrak{B}, m)$ 中成立 $s\text{-}\lim_{n\to\infty} z_n=0$. 但

$$\lim_{n\to\infty}\langle z_n, f\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle z_n, f_0\rangle=\lim_{n\to\infty}\int_S z_n(s)y(s)m(ds)\geqq\delta\varepsilon>0,$$

这与泛函 f 的连续性矛盾.

例 5 $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$.

设给定一 $f\in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$, 对任一 $B\in\mathfrak{B}$ 令 $f(C_B)=\psi(B)$, 其中 C_B 为集合 B 的特征函数. 于是我们有:

$B_1\cap B_2=\varnothing$ 导致 $\psi(B_1+B_2)=\psi(B_1)+\psi(B_2)$, (6)

即 ψ 是有限可加的,

$\psi(B)$ 的实部 $\psi_1(B)$ 和虚部 $\psi_2(B)$ 是完全有界变差函数,

即 $\sup_B|\psi_i(B)|<\infty\quad(i=1, 2)$, (7)

ψ 是 m-绝对连续的, 即 $m(B)=0$ 导致 $\psi(B)=0$. (8)

条件(6)是 f 的线性性质的推论, 又(7)和(8)由 $|\psi(B)|\leqq\|f\|\cdot\|C_B\|$ 而自明.

对任一 $x\in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$, 我们考察一个把复平面的球 $\{z; |z|\leqq\|x\|\}$ 分成有限个直径 $\leqq\varepsilon$ 的不相交的 Baire 集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的分割. 若我们令 $B_i=\{s\in S; x(s)\in A_i\}$, 则无论我们从 A_i 中选取什么样的点 α_i, 我们都有

$$\|x-\sum_{i=1}^n \alpha_i C_{B_i}\|\leqq\varepsilon,$$

故

$$|f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi(B_i)|\leqq\|f\|\cdot\varepsilon.$$

因此，若我们令 $n\to\infty$ 并使 $\varepsilon\to 0$，我们便得

$$f(x)=\lim\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\psi(B_i), \tag{9}$$

此关系与分割 $\{z;|z|\leqslant\|x\|\}=\sum_{i=1}^{n}A_i$ 的方式和诸 α 点的选择无关. (9)式右端的极限称为 $x(s)$ 关于有限可加测度 ψ 的 Radon 积分. 因此

$$f(x)=\int_S x(s)\psi(ds)\quad(\text{Radon 积分})\qquad \text{只要 } x\in L^\infty(S,\mathfrak{B},m), \tag{10}$$

故

$$\|f\|=\sup_{\text{ess.}\sup|x(s)|\leq 1}\left|\int x(s)\psi(ds)\right|. \tag{11}$$

反之，易知任一满足(6)，(7)和(8)的 ψ，通过(10)定义了一个 $f\in L^\infty(S,\mathfrak{B},m)$，且(11)为真.

所以，我们已证明：$L^\infty(S,\mathfrak{B},m)'$ 是满足(6)，(7)和(8)且按(11)的右端(即所谓 ψ 的**全变差**)赋范的全体集合函数的空间.

注 迄今我们已证明，当 $1<p<\infty$ 时，$L^p(S,\mathfrak{B},m)$ 是自反的. 然而在一般情况下空间 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 不是自反的.

例 6 $C(S)'$.

设 S 为一紧拓扑空间. 则 S 上复值连续函数空间 $C(S)$ 的对偶空间 $C(S)'$ 如下给定. 对任一 $f\in C(S)'$，对应着在 S 上唯一确定的复 Baire 测度 μ 使得

$$f(x)=\int_S x(s)\mu(ds)\qquad \text{只要 } x\in C(S), \tag{12}$$

因而

$$\|f\|=\sup_{\sup|x(s)|\leq 1}\left|\int_S x(s)\mu(ds)\right|=\mu \text{ 在 } S \text{ 上的全变差}. \tag{13}$$

反之，S 上的任一使(13)的右端为有限的 Baire 测度 μ，通过(12)定义了一连续线性泛函 $f\in C(S)'$，且有(13)成立. 此外，若我们限于实 B-空间 $C(S)$ 上的实泛函 f，则相应的测度 μ 是实值的；又若 f 在下述意义下是正的：即对非负函数 $x(s)$ 恒有 $f(x)\geqq 0$，则相应的测度 μ 是正的，即对一切 $B\in\mathfrak{B}$ 恒有 $\mu(B)\geqq 0$.

注 上面叙述的结果是众所周知的 F. Riesz-A. Markov-S. Kakutani 定理，它是拓扑测度论中的基本定理之一. 至于证明，读者可参看关于测度论的标准教科书，例如 P. R. Halmos[1] 和 N. Dunford-J. Schwartz[1].

第四章参考文献

关于 Hahn-Banach 定理及有关的论题见 Banach[1]，Bourbaki[2]及 Köthe[1]. 正是 Mazur[2]注意到了赋范线性空间中凸集的重要性. 本书中给出的 Helly 定理的证明是属于 Y. Mimura 的(未发表).

第五章　强收敛和弱收敛

在这一章中，我们将要叙述有关强收敛、弱收敛和弱*收敛的某些基本事实，其中包括强概念同弱概念，例如强、弱可测性以及强、弱解析性的对比．我们也讨论了值域含于 B-空间的函数的积分理论，即 Bochner 积分论．至于在局部凸的线性拓扑空间中的弱拓扑和对偶性的一般理论，将在本章附录中予以叙述．

§1. 弱收敛和弱*收敛

弱　收　敛

定义 1　赋范线性空间 X 内的序列 $\{x_n\}$ 叫做弱收敛的，如果对于每一个 $f\in X_s'$，有限的 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在；$\{x_n\}$ 叫做弱收敛于某元素 $x_\infty\in X$，如果对所有的 $f\in X_s'$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_\infty)$．对于后一情形，由 Hahn-Banach 定理（第四章 §6 系 2）可知，x_∞ 是唯一确定的；我们把它记为 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_\infty$ 或简记为 $x_n\to x_\infty$（弱）．X 叫做序列弱完备的，如果 X 的每个弱收敛序列均弱收敛于 X 中的一个元素．

例　设 $\{x_n(s)\}$ 是 $C[0,\ 1]$ 的一个等度有界的连续函数序列且它收敛于 $[0,\ 1]$ 上的一个不连续函数 $z(s)$．这时，由于 $C[0,1]'$ 是 $[0,1]$ 上的有界全变差 Baire 测度组成的空间，所以我们容易看出，$\{x_n\}$ 给出了一个这样的例子，它是 $C[0,1]$ 的一个弱收敛序列但并不弱收敛于 $C[0,\ 1]$ 的元素．

定理 1　i) $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_\infty$ 必导致 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_\infty$，但是逆命题不真．ii) 弱收敛序列 $\{x_n\}$ 是强有界的，并且特别地，如果 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_\infty$，则 $\{\|x_n\|\}$ 有界且 $\|x_\infty\|\leqq\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$．

证明　i) 第一部分可由 $|f(x_n)-f(x_\infty)|\leqq\|f\|\cdot\|x_n-x_\infty\|$ 明显地看出来．第二部分可以这样来证明，即考虑 Hilbert 空间 (l^2) 中的序列 $\{x_n\}$：

$$x_n=\{\xi_m^{(n)}\},\ \text{其中}\ \xi_m^{(n)}=\delta_{nm}\ (=1\ \text{或}\ 0,\ \text{当}\ n=m\ \text{或}\ n\neq m\ \text{时}).$$

因为一个 $\in(l^2)'$ 的连续线性泛函在 $x=\{\xi_n\}$ 处的值等于由某个 $\{\eta_n\}\in(l^2)$ 作出的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n\bar{\eta}_n$；因此，$w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，但因 $\|x_n\|=1\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，所以 $\{x_n\}$ 并不强收敛于 0．ii) 考虑定义在 B-空间 X_s' 上且用 $X_n(f)=\langle x_n, f\rangle$ 表示的连续线性泛函 X_n 的序列，然后应用第二章 §1 中的共鸣定理，于是 ii) 得证．

定理 2　(Mazur)　设在赋范线性空间 X 中，有 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_\infty$．于是对任何 $\varepsilon>0$，总存在 x_j

的某个凸组合$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j(\alpha_j\geqq 0,\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1)$使得$\|x_\infty-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\|\leqq\varepsilon$.

证明 考虑$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$这种形式的元素的全体$M_1$, 其中, $\alpha_j\geqq 0$且$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1$. 在分别用$(x_\infty-x_1)$和(x_j-x_1)代替x_∞和x_j之后, 我们就可以认为$0\in M_1$. 假定对每一个$u\in M_1$都有$\|x_\infty-u\|>\varepsilon$. 于是集合$M=\{v\in X; \|v-u\|\leqq\varepsilon/2$ 对某个$u\in M_1$成立$\}$是X的0的一个凸邻域且对所有的$v\in M$都有$\|x_\infty-v\|>\varepsilon/2$. 设$p(y)$是$M$的Minkowski泛函. 因为$x_\infty=\beta^{-1}u_0$, 其中, $p(u_0)=1$且$0<\beta<1$, 所以必定有$p(x_\infty)=\beta^{-1}>1$. 考虑实线性子空间$X_1=\{x\in X; x=\gamma u_0,\ -\infty<\gamma<\infty\}$并且对于$x=\gamma u_0\in X_1$令$f_1(x)=\gamma$. 于是$X_1$上的这个实线性泛函$f_1$在$X_1$上满足$f_1(x)\leqq p(x)$. 因此, 由第四章§1的Hahn-Banach延拓定理可知, f_1有一个定义在实线性空间X上的实线性延拓f, 它在X上满足$f(x)\leqq p(x)$. 因为M是0的一个邻域, 所以Minkowski泛函$p(x)$对x是连续的. 从而f是一个定义在实的赋范线性空间X上的实连续线性泛函. 此外, 我们还有

$$\sup_{x\in M_1}f(x)\leqq\sup_{x\in M}f(x)\leqq\sup_{x\in M}p(x)=1<\beta^{-1}=f(\beta^{-1}u_0)=f(x_\infty).$$

所以, 容易看出x_∞不可能是M_1的弱聚点, 这同$x_\infty=w\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n$相矛盾.

定理 3 赋范线性空间X的序列$\{x_n\}$弱收敛于某元素$x_\infty\in X$, 当且仅当下面两个条件都成立: i) $\sup_{n\geq 1}\|x_n\|<\infty$ 和 ii)对于X'_s的任一强稠密子集D'内的每一个f都有$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=x_\infty$.

证明 我们只须证明充分性. 对于任何一个$g\in X'_s$和$\varepsilon>0$, 总存在某个$f\in D'$使得$\|g-f\|<\varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned}|g(x_n)-g(x_\infty)|&\leqq|g(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_\infty)|+|f(x_\infty)-g(x_\infty)|\\&\leqq\varepsilon\|x_n\|+|f(x_n)-f(x_\infty)|+\varepsilon\|x_\infty\|,\end{aligned}$$

从而$\overline{\lim}|g(x_n)-g(x_\infty)|\leqq 2\varepsilon\sup_{\infty\geq n\geq 1}\|x_n\|$. 这就证明了$\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x_\infty)$.

定理 4 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$中的序列$\{x_n\}$弱收敛于某元素$x\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$, 当且仅当$\{\|x_n\|\}$是有界的且对于每一个$B\in\mathfrak{B}$都存在有限的$\lim_{n\to\infty}\int_B x_n(s)m(ds)$.

证明 "仅当"那部分的证明是显然的, 因为$B\in\mathfrak{B}$的特征函数$C_B(s)$属于$L^\infty(S,\mathfrak{B},m)=L^1(S,\mathfrak{B},m)'$.

"当"的部分的证明. 对于$B\in\mathfrak{B}$, 根据Vitali-Hahn-Saks定理, 集合函数

$$\psi(B)=\lim_{n\to\infty}\int_B x_n(s)m(ds)$$

是σ-可加且m-绝对连续的. 于是由Lebesgue-Nikodym微分定理可知, 存在着某个$x_\infty\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_B x_n(s)m(ds)=\int_B x_\infty(s)m(ds)\text{对所有的}B\in\mathfrak{B}\text{都成立.}$$

因此, 对任何一种分解$S=\sum_{j=1}^{k}B_j$, 其中$B_j\in\mathfrak{B}$, 我们都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_S x_n(s)y(s)m(ds)=\int_S x_\infty(s)y(s)m(ds),\quad y(s)=\sum_{j=1}^k \alpha_j C_{B_j}(s).$$

因为 $y(s)$ 这样的函数组成了空间 $L^\infty(S,\mathfrak{B},m)=L^1(S,\mathfrak{B},m)'$ 的一个强稠密子集，所以由定理 3 可知，“当”的部分是正确的.

定理 5 设 $\{x_n\}$ 在 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 中弱收敛于 x_∞. 这时，$\{x_n\}$ 强收敛于 x_∞，当且仅当 $\{x_n\}$ 在每一个满足 $m(B)<\infty$ 的 $\mathfrak{B}$-可测集 B 上，都依 m-测度收敛于 $x_\infty(s)$.

注 $\{x_n(s)\}$ 叫做在 B 上依 m-测度收敛于 $x_\infty(s)$，如果对任何 $\varepsilon>0$，集合

$$\{s\in B;\ |x_n(s)-x_\infty(s)|\geq\varepsilon\}$$

的 m-测度，当 $n\to\infty$ 时，都趋于 0(见第一章 §4 的命题). $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 的一个特殊情形是空间 (l^1)，这时 $S=\{1,2,\cdots\}$ 并且对 $n=1,2,\cdots$ 都有 $m(\{n\})=1$. 对这种情形，我们有 $(l^1)'=(l^\infty)$ 并且对于 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)$，如果 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_\infty=(\xi_1^{(\infty)},\xi_2^{(\infty)},\cdots,\xi_k^{(\infty)},\cdots)$ 则必能导致 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k^{(\infty)}$ $(k=1,2,\cdots)$，这个结论可以这样来得出，对于 $x=\{\xi_j\}\in(l^1)$，我们把 $f\in(l^1)'$ 取为 $f(x)=\langle x,f\rangle=\xi_k$. 因此，在这种情形下，$\{x_n\}$ 在每一个 $\mathfrak{B}$-可测的并且具有有限 m-测度的集合 B 上依 m-测度收敛于 x_∞. 这样一来，我们就得到

系 (I. Schur) 在空间 (l^1) 中，如果序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_\infty\in(l^1)$，则 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_\infty$.

定理 5 的证明 因为在 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 内的强收敛能导致依 m-测度的收敛. 所以“仅当”那一部分是显然的. 我们来证明“当”的部分. 由于序列 $\{x_n-x_\infty\}$ 弱收敛于 0，从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_B(x_n(s)-x_\infty(s))m(ds)=0\quad 对每个\ B\in\mathfrak{B}\ 都成立. \tag{1}$$

考虑非负测度序列

$$\psi_n(B)=\int_B|x_n(s)-x_\infty(s)|m(ds),\quad B\in\mathfrak{B}.$$

这时，对于 $\mathfrak{B}$ 的集合所组成的任何递减序列 $\{B_k\}$，其中 $\bigcap\limits_{k=1}^\infty B_k=\varnothing$，均有

$$\lim_{k\to\infty}\psi_n(B_k)=0\quad 对\ n\ 一致成立. \tag{2}$$

事实上，如果(2)不成立，则存在 $\varepsilon>0$ 使得对每个 k 都存在某个 n_k，并且对于它们，有 $\lim\limits_{k\to\infty}n_k=\infty$ 和 $\psi_{n_k}(B_k)>\varepsilon$. 因此必定有

$$\int_{B_k}|Re(x_{n_k}(s)-x_\infty(s))|m(ds)>\varepsilon/\sqrt{2}\ 或\ \int_{B_k}|Im(x_{n_k}(s)-x_\infty(s))|m(ds)>\varepsilon/\sqrt{2},$$

从而必存在某个 $B'_k\subseteq B_k$ 使得

$$\left|\int_{B'_k}(x_{n_k}(s)-x_\infty(s))m(ds)\right|>\varepsilon/2\sqrt{2}\qquad(k=1,2,\cdots),$$

由于(1)，上式与测度序列 $\varphi_n(B)=\int_B(x_n(s)-x_\infty(s))m(ds)$ 的 m-绝对连续性对 n 是一致的(见第二章 §2 的 Vitali-Hahn-Saks 定理的证明)这个事实矛盾

其次，设 B_0 是满足 $m(B_0)<\infty$ 的任何一个集合. 我们要证明

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(B_0)=0. \tag{3}$$

假定存在某个 $\varepsilon>0$ 和$\{\psi_n\}$的某子序列$\{\psi_{n'}\}$使得

$$\psi_{n'}(B_0)>\varepsilon\quad(n=1,2,\cdots). \tag{4}$$

根据假设，$\{x_n(s)-x_\infty(s)\}$在 B_0 上依 m-测度收敛于 0，所以存在$\{x_{n'}(s)-x_\infty(s)\}$的某子序列$\{x_{n''}(s)-x_\infty(s)\}$和某些集合 $B''_n\subseteq B_0$ 使得 $m(B''_n)\leqq 2^{-n}$ 以及在$(B_0-B''_n)$上有$|x_{n''}(s)-x_\infty(s)|<\varepsilon/m(B_0)$. 我们令 $B_k=\bigcup_{n=k}^{\infty}B''_n$. 于是$\{B_k\}$是一个递减序列且有

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\right)\leqq\sum_{n=k}^{\infty}m(B''_n)\leqq 2^{-k+1}(k=1,2,\cdots),\ \text{从而}\ m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\right)=0.$$

因此，由(1)和前面提到过的 Vitali-Hahn-Saks 定理的系可知，$\lim_{k\to\infty}\psi_n(B_k)=0$ 对 n 一致成立. 所以，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\psi_{n''}(B_0)\leqq\psi_{n''}(B''_n)+\varepsilon m(B_0)^{-1}\cdot m(B_0-B''_n)\to(\leqq\varepsilon),$$

它同(4)矛盾. 这就证明了(3).

现在我们选取 $\mathfrak{B}$ 的集合的序列$\{B'_k\}$使得 $m(B'_k)<\infty\,(k=1,2,\cdots)$和 $S=\bigcup_{k=1}^{\infty}B'_k$. 于是

$$\int_S|x_n(s)-x_\infty(s)|m(ds)=\int_{\bigcup_{k=1}^{t}B'_k}+\int_{S-\bigcup_{k=1}^{t}B'_k}.$$

由(3)可知，右端第一项对于固定的 t，当 $n\to\infty$ 时，趋于零，而由(2)可知右端第二项当 $t\to\infty$时，对 n 一致趋于零. 所以我们就证明了，在 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 中 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x_\infty$.

关于空间 $\mathfrak{D}(\Omega)'$，有一个类似的结果，即

定理 6 设$\{T_n\}$是 $\mathfrak{D}(\Omega)'$ 中的广义函数的序列. 如果在 $\mathfrak{D}(\Omega)'$ 的弱*拓扑下有 $\lim_{n\to\infty}T_n=T$，则在 $\mathfrak{D}(\Omega)'$ 的强拓扑下仍有 $\lim_{n\to\infty}T_n=T$.

证明 空间 $\mathfrak{D}(\Omega)'$ 的强拓扑是通过下述半范数族来定义的(见第四章 § 7 的定义 1)，即

$$p_B(T)=\sup|T(\varphi)|\quad(\varphi\in\mathfrak{B}),\ \text{这里}\ \mathfrak{B}\ \text{是}\ \mathfrak{D}(\Omega)\ \text{的任何有界集}.$$

空间 $\mathfrak{D}(\Omega)'$ 的弱*拓扑是通过下述半范数族来定义的，即

$$p_F(T)=\sup|T(\varphi)|\quad(\varphi\in\mathfrak{F}),\ \text{这里}\ \mathfrak{F}\ \text{是}\ \mathfrak{D}(\Omega)\ \text{的任何有限集}.$$

因此，在 $\mathfrak{D}(\Omega)'$ 的弱*拓扑下，$\lim T_n=T$ 刚好就是第二章 § 3 中定义的 $\lim_{n\to\infty}T_n=T(\mathfrak{D}(\Omega)')$.

设 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{D}(\Omega)$ 的任何一个有界集. 于是存在 Ω 内的某紧子集 K 使得，对任何 $\varphi\in\mathfrak{B}$，有$\text{supp}(\varphi)\subseteq K$ 并且对任何微分算子 D^j，有 $\sup|D^j\varphi(x)|<\infty\quad(x\in K,\varphi\in\mathfrak{B})$(第一章 § 8 定理 1). 因此，由 Ascoli-Arzelà 定理可知，$\mathfrak{B}$ 在 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$内是紧的. 我们把一致有界性定理应用到序列

$\{T_n-T\}$上，于是得知，对任何 $\varepsilon>0$ 都存在 $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 的 0 的某个邻域 U 使得

$$\sup_{n,\varphi\in U}|(T_n-T)(\varphi)|<\varepsilon.$$

$\mathfrak{D}_K(\Omega)$ 的紧子集 $\mathfrak{B}$ 可以被有限个 φ_i-U 这种形式的集合所复盖，这里，$\varphi_i\in\mathfrak{B}(i=1,2,\cdots,k)$. 于是对任何 $u\in U$ 都有

$$|(T_n-T)(\varphi_i+u)|\leq|(T_n-T)(\varphi_i)|+|(T_n-T)(u)|\leq|(T_n-T)(\varphi_i)|+\varepsilon.$$

因为对于 $i=1,2,\cdots,k$, $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n-T)(\varphi_i)=0$, 所以我们有

$$\lim_{n\to\infty}(T_n-T)(\varphi)=0 \quad 对\ \varphi\in\mathfrak{B}\ 一致成立.$$

这就证明了我们的定理.

定理 7 自反的 B-空间 X 是序列弱完备的.

证明 设 X 的序列 $\{x_n\}$ 是弱收敛的. 每一个 x_n 都可用 $X_n(x')=\langle x_n,x'\rangle$ 定义 X'_s 上的一个连续线性泛函 X_n. 因为 X'_s 是一个 B-空间(第四章 §8 定理 1), 所以我们可以应用共鸣定理. 因此可以用有限的 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n(x')$ 来定义 X'_s 上的一个连续线性泛函. 根据假设, 此极限是存在的. 因为 X 是自反的, 所以存在某个 $x_\infty\in X$ 使得 $\langle x_\infty,x'\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}X_n(x')=\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n,x'\rangle$, 这就是说 $x_\infty=w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

定理 8 设 X 是一个 Hilbert 空间. 如果 X 的某序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_\infty\in X$, 那么, 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x_\infty\|$ 时, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_\infty$.

证明 由范数的连续性可知, "仅当"部分是显然的. "当"的那一部分, 由等式

$$\|x_n-x_\infty\|^2=(x_n-x_\infty,x_n-x_\infty)=\|x_n\|^2-(x_n,x_\infty)-(x_\infty,x_n)+\|x_\infty\|^2$$

可以明显地看出来. 事实上当 $n\to\infty$ 时, 右端的极限是 $\|x_\infty\|^2-\|x_\infty\|^2-\|x_\infty\|^2+\|x_\infty\|^2=0$.

弱* 收 敛

定义 2 赋范线性空间 X 的对偶空间 X'_s 中的某序列 $\{f_n\}$ 叫做是**弱*收敛的**, 如果对每个 $x\in X$ 都存在有限的 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$; $\{f_n\}$ 叫做弱*收敛于某元素 $f_\infty\in X'_s$, 如果对所有的 $x\in X$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f_\infty(x)$. 对后一情形, 我们记 $w^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f_\infty$ 或简记为 $f_n\to f_\infty$(弱*).

定理 9 i) $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f_\infty$ 必导致 $w^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f_\infty$, 但不是可逆的. ii) 如果 X 是 B-空间, 则弱*收敛序列 $\{f_n\}\subseteq X'_s$ 必弱*收敛于某个元素 $f_\infty\in X'_s$ 且 $\|f_\infty\|\leq\varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|$.

证明 i) 第一部分从 $|f_n(x)-f_\infty(x)|\leq\|f_n-f_\infty\|\cdot\|x\|$ 可以明显地看出来. 第二部分可以用定理 1 的证明中给出的反例予以说明. ii) 根据共鸣定理, 我们知道 $f_\infty(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 是 X 上的一个连续线性泛函且 $\|f_\infty\|\leq\varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|$.

定理 10 如果 X 是一个 B-空间, 这时, 某序列 $\{f_n\}\subseteq X'_s$ 弱*收敛于某个元素 $f_\infty\in X'_s$, 当且仅当 i) $\{\|f_n\|\}$ 是有界的并且 ii) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f_\infty(x)$ 在 X 的某个强稠密子集上成立.

证明 其证明类似于定理 3 的证明.

强闭包和弱闭包

定理 11 设X是一个局部凸的线性拓扑空间,而M是X的一个闭的线性子空间, 则M在X的弱拓扑下是闭的.

证明 如果不是这样, 则存在某个点$x_0\in X-M$使得x_0是集合M在X的弱拓扑下的一个聚点. 于是由第四章§6定理3的系可知,存在X上的一个连续线性泛函f_0使得,$f_0(x)=1$且在M上有$f_0(x)=0$. 因此,x_0不可能是集合M在X的弱拓扑下的一个聚点.

§2. 自反B-空间的局部弱列紧性. 一致凸性

定理 1 设X是一个自反B-空间,又设$\{x_n\}$是任何一个范数有界的序列. 则我们可以选出一个子序列$\{x_{n'}\}$,它弱收敛于X的某个元素.

我们将在X是可分的这个假设条件下来证明此定理, 因为应用这个定理的那些具体空间大多数都是可分的. 对于一般的不可分空间的情形将在附录中论述.

引理 如果赋范线性空间X的强对偶空间X'_s是可分的,则X也是可分的.

证明 设$\{x'_n\}$是某个可数序列, 它在X'_s的单位球面$\{x'\in X'_s; \|x'\|=1\}$上是强稠密的. 选取$x_n\in X$使得$\|x_n\|=1$且$|\langle x_n, x'_n\rangle|\geqq 1/2$. 设$M$是由序列$\{x_n\}$生成的、$X$的线性闭子空间. 假定$M\neq X$而$x_0\in X-M$. 根据第四章§6中的 Mazur 定理3的系, 存在某个$x'_0\in X'_s$使得, $\|x'_0\|=1$、$\langle x_0, x'_0\rangle\neq 0$以及当$x\in M$时总有$\langle x, x'_0\rangle=0$. 因此$\langle x_n, x'_0\rangle=0\,(n=1, 2, \cdots)$,从而$1/2\leqq|\langle x_n, x'_n\rangle|\leqq|\langle x_n, x'_n\rangle-\langle x_n, x'_0\rangle|+|\langle x_n, x'_0\rangle|$, 由此可得$1/2\leqq\|x_n\|\|x'_n-x'_0\|=\|x'_n-x'_0\|$. 这同$\{x'_n\}$在$X'_s$的单位球面上是强稠密的这一事实相矛盾. 因此$M=X$, 从而$\{x_n\}$的具有有理系数的线性组合在$X$内是稠密的. 这就证明了我们的引理.

定理 1 的证明 前面我们已经说明过, 在证明定理1时, 我们要假设X是可分的, 从而$(X'_s)'_s=X$也是可分的. 由上述引理可知, X'_s也是可分的. 设$\{x'_n\}$是一个可数序列,它在X'_s内是强稠密的. 因为$\{x_n\}$是范数有界的,所以序列$\{\langle x_n, x'_1\rangle\}$是有界的. 于是存在某个子序列$\{x_{n_1}\}$,使得相应的序列$\{\langle x_{n_1}, x'_1\rangle\}$是收敛的. 因为序列$\{\langle x_{n_1}, x'_2\rangle\}$是有界的, 所以存在$\{x_{n_1}\}$的某个子序列$\{x_{n_2}\}$使得$\{\langle x_{n_2}, x'_2\rangle\}$是收敛的. 继续这样作下去,我们就可以选出序列$\{x_{n_i}\}$的某个子序列$\{x_{n_{i+1}}\}$使得数值序列$\{\langle x_{n_{i+1}}, x'_j\rangle\}$对于$j=1, 2, \cdots, i+1$是收敛的. 因此, 原序列的对角子序列$\{x_{n_n}\}$满足这种条件,即序列$\{\langle x_{n_n}, x'_j\rangle\}$当$j=1, 2, \cdots$时是收敛的. 因此, 由上一节的定理3可知,对于每一个$x'\in X'$, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_{n_n}, x'\rangle$都存在且是有限的. 于是由上一节的定理7可以看出$w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_n}$存在.

Milman 定理

下述定理应归功于 D. P. Milman, 即一个B-空间如果在以下的意义下是**一致凸**的,则它是自反的; 所谓一致凸是指,对于任何$\varepsilon>0$,总存在某个$\delta=\delta(\varepsilon)>0$使得,当$\|x\|\leqq 1$、$\|y\|\leqq 1$以及$\|x-y\|\geqq\varepsilon$时就有$\|x+y\|\leqq 2(1-\delta)$. 一个 pre-Hilbert 空间是一致凸的,这可以从公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

在该空间内成立这个事实看出来. 我们知道, 对于 $1<p<\infty$, 空间 L^p 和 (l^p) 是一致凸的 (见 J. A. Clarkson[1]).

定理 2 (Milman[1]) 一致凸的 B-空间是自反的.

证明(S. Kakutani 作出的) 给定一个 $x_0''\in(X_s')_s'$ 且 $\|x_0''\|=1$. 这时, 存在序列 $\{f_n\}\subseteq X_s'$, 它满足 $\|f_n\|=1$ 和 $x_0''(f_n)\geqq 1-n^{-1}(n=1, 2, \cdots)$. 由第四章 §6 定理 5 可知, 对每一个 n 都存在某个 $x_n\in X$ 使得

$$f_i(x_n)=x_0''(f_i)\ (i=1, 2, \cdots, n) \text{ 和 } \|x_n\|\leqq\|x_0''\|+n^{-1}=1+n^{-1}.$$

因为有

$$1-n^{-1}\leqq x_0''(f_n)=f_n(x_n)\leqq\|f_n\|\|x_n\|=\|x_n\|\leqq 1+n^{-1},$$

所以必然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=1$.

如果序列 $\{x_n\}$ 不是强收敛的, 则存在 $\varepsilon>0$ 和 $n_1<m_1<n_2<m_2<\cdots<n_k<m_k<\cdots$ 使得 $\varepsilon\leqq\|x_{n_k}-x_{m_k}\|$ $(k=1, 2, \cdots)$. 因此, 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=1$ 和 X 的一致凸性, 我们就得到 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\|x_{n_k}+x_{m_k}\|\leqq 2(1-\delta(\varepsilon))<2$. 但因 $n_k<m_k$, $f_{n_k}(x_{n_k})=f_{n_k}(x_{m_k})=x_0''(f_{n_k})$, 所以

$$2(1-n_k^{-1})\leqq 2x_0''(f_{n_k})=f_{n_k}(x_{n_k}+x_{m_k})\leqq\|f_{n_k}\|\cdot\|x_{n_k}+x_{m_k}\|.$$

由于 $\|f_{n_k}\|=1$, 于是我们得到一个矛盾 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\|x_{n_k}+x_{m_k}\|\geqq 2$.

因此, 我们证明了 $s\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=x_0$ 的存在性以及 x_0 满足

$$\|x_0\|=1, \quad f_i(x_0)=x_0''(f_i) \quad (i=1, 2, \cdots). \tag{1}$$

我们指出, 上述(1)中的方程的解 x_0 是唯一的. 否则, 存在某个 $\hat{x}_0\neq x_0$, 它满足同一个方程. 由一致凸性可知, $\|\hat{x}_0+x_0\|<2$. 此外还有 $f_i(\hat{x}_0+x_0)=2x_0''(f_i)$, $(i=1, 2, \cdots)$. 因此

$$2(1-i^{-1})\leqq 2x_0''(f_i)=f_i(\hat{x}_0+x_0)\leqq\|f_i\|\|\hat{x}_0+x_0\|=\|\hat{x}_0+x_0\|,$$

从而 $\|\hat{x}_0+x_0\|\geqq\lim\limits_{n\to\infty}2(1-i^{-1})=2$, 这是一个矛盾.

最后, 令 f_0 是 X_s' 的任何一点. 如果我们能证明 $f_0(x_0)=x_0''(f_0)$, 则 $(X_s')_s'\subseteq X$, 而这就证明了 X 的自反性. 为了证明 $f_0(x_0)=x_0''(f_0)$, 我们用 $f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$ 来代替前面讲的 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$, 从而我们得到这样的 $\hat{x}_0\in X$, 即

$$\|\hat{x}_0\|=1, \ f_i(\hat{x}_0)=x_0''(f_i) \quad (i=0, 1, \cdots, n, \cdots);$$

利用上面刚刚证明过的唯一性, 必定有 $\hat{x}_0=x_0$, 这就完成了定理 2 的证明.

§3. Dunford 定理和 Gelfand-Mazur 定理

定义 1 设 Z 是复平面的一个开域. 定义在 Z 内而取值在 B-空间 X 内的某映射 $x(\zeta)$ 称为在域 Z 内关于 ζ 是弱全纯的, 如果对于每一个 $f\in X'$, ζ 的数值函数

$$f(x(\zeta))=\langle x(\zeta), f\rangle$$

在 Z 内都是全纯的.

定理 1(N. Dunford[2]) 如果 $x(\zeta)$ 在 Z 内是弱全纯的，则存在定义在 Z 内而取值在 X 内的某个映射 $x'(\zeta)$ 使得对每一个 $\zeta_0\in Z$ 都有

$$s\text{-}\lim_{h\to 0} h^{-1}(x(\zeta_0+h)-x(\zeta_0))=x'(\zeta_0).$$

换句话说，即弱全纯性蕴涵强全纯性.

证明 设 C 是一条可求长的这种 Jordan 曲线使得由 C 围成的有界闭域 $\bar{C}$ 完全含于 Z 内并且 $\zeta_0\in\bar{C}-C$. 设 Z_0 是任何一个含有 ζ_0 的这种开的复域使得它的闭包含于 $\bar{C}$ 的内部. 因此，根据 Cauchy 积分表示式，我们有

$$f(x(\zeta_0))=\int_C \frac{f(x(\zeta))}{\zeta-\zeta_0}d\zeta.$$

因此，如果 ζ_0+h 和 ζ_0+g 都属于 Z_0，则

$$(h-g)^{-1}\left\{\frac{f(x(\zeta_0+h))-f(x(\zeta_0))}{h}-\frac{f(x(\zeta_0+g)-f(x(\zeta_0))}{g}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(x(\zeta))\left\{\frac{1}{(\zeta-\zeta_0-h)(\zeta-\zeta_0-g)(\zeta-\zeta_0)}\right\}d\zeta.$$

根据假设，Z_0 到 C 的距离是正的. 因此，对于固定的 $f\in X'$，当 ζ_0、ζ_0+h 以及 ζ_0+g 在 Z_0 内变动时，右端的绝对值是一致有界的. 于是由共鸣定理可知

$$\sup_{\zeta_0,\zeta_0+h,\zeta_0+g\in Z_0}\frac{1}{|h-g|}\left\|\left\{\frac{x(\zeta_0+h)-x(\zeta_0)}{h}-\frac{x(\zeta_0+g)-x(\zeta_0)}{g}\right\}\right\|<\infty.$$

所以，由空间 X 的完备性可知，$x(\zeta)$ 在每一点 $\zeta_0\in Z$ 都是强可微的.

系 1 (Cauchy 积分定理) 由 $x(\zeta)$ 的强可微性可以得出它对 ζ 的强连续性. 因此我们可以定义其值在 X 内的曲线积分 $\int_C x(\zeta)d\zeta$. 实际上，我们可以证明 $\int_C x(\zeta)d\zeta=0$，即等于 X 的零向量.

证明 根据 $f\in X'$ 的连续性和线性性质，我们有

$$f\left(\int_C x(\zeta)d\zeta\right)=\int_C f(x(\zeta))d\zeta.$$

由通常的 Cauchy 积分定理可知，上式右端为零. 因为 $f\in X'$ 是任意的，所以根据第四章 § 6 定理 1 的系 2，必定有 $\int_C x(\zeta)d\zeta=0$.

根据上述的系 1，我们可以得到另外一些系，其作法同通常复变函数论中的作法一样.

系 2 (Cauchy 积分表示式) 对 $\bar{C}$ 的任何内点 ζ_0，总有

$$x(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta.$$

系 3 (Taylor 展式) 对闭域 $\bar{C}$ 内部的任何一点 ζ_0，$x(\zeta)$ 在 $\zeta=\zeta_0$ 处的 Taylor 展式在以 ζ_0 为中心且含于 $\bar{C}$ 的圆的内部强收敛. 这里

$$x(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-1}(\zeta-\zeta_0)^n x^{(n)}(\zeta_0),\ \text{其中}\ x^{(n)}(\zeta_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{x(\zeta)}{(\zeta-\zeta_0)^{n+1}}d\zeta.$$

系 4 (Liouville 定理) 如果 $x(\zeta)$ 在整个有限平面：$|\zeta|<\infty$ 内，是（强）全纯的并且

$\sup_{|\zeta|<\infty}|x(\zeta)|<\infty$, 则 $x(\zeta)$ 必定是一个常向量 $x(0)$.

证明 如果我们把曲线 C 取为 $|\zeta|=r$, 则当 $r\to\infty$ 时, 有

$$\|x^{(n)}(0)\|=\frac{n!}{2\pi}\sup_{|\zeta|<\infty}\|x(\zeta)\|\int_C\frac{|d\zeta|}{r^n}\to 0\ (n=1, 2, \cdots).$$

因此, $x(\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 处的 Taylor 展式蜕化为仅仅一个常数项 $x(0)$.

现在我们要用系 4 去证明 Gelfand-Mazur 定理. 首先我们给出

定义 2 复数域上的交换域 X 叫做一个赋范域, 如果它还是一个 B-空间且满足以下条件:

$$\begin{cases}\|e\|=1, \text{ 这里, } e \text{ 是 } X \text{ 内的乘法单位;}\\ \|xy\|\leq\|x\|\|y\|, \text{ 这里, } xy \text{ 是 } X \text{ 内的乘法.}\end{cases}\tag{1}$$

定理 2 (Gelfand[2]-Mazur[1]) 赋范域 X 等距同构于复数域. 换言之, X 的每一个元素 x 都是 $x=\xi e$ 这种形式的元素, 这里, ξ 是一个复数.

证明 如果是相反的情形, 那么设有 $x\in X$ 使得对任何复数 ξ 都有 $(x-\xi e)\neq 0$. 因为 X 是一个域, 所以非零元素 $(x-\xi e)$ 有逆元素 $(x-\xi e)^{-1}\in X$.

我们要证明 $(x-\lambda e)^{-1}$ 在 $|\lambda|<\infty$ 内对 λ 是(强)全纯的. 事实上, 我们有

$$h^{-1}((x-(\lambda+h)e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1})=h^{-1}(x-(\lambda+h)e)^{-1}\{e-(x-(\lambda+h)e)(x-\lambda e)^{-1}\}$$
$$=h^{-1}(x-(\lambda+h)e)^{-1}\{e-e+h(x-\lambda e)^{-1}\}=(x-(\lambda+h)e)^{-1}(x-\lambda e)^{-1}.$$

另一方面, 对于充分小的 $|h|$, 考虑级数 $y^{-1}(e+\sum_{n=1}^{\infty}(hy^{-1})^n)$, 其中 $y=(x-\lambda e)$, 由 (1) 可知它是收敛的并且它表示元素 $(y-he)^{-1}=y^{-1}(e-hy^{-1})^{-1}$, 这可从该级数乘以 $(y-he)$ 直接看出来. 于是利用该级数对 h 的强连续性, 我们可以证明 $(x-\lambda e)^{-1}$ 关于 λ 是 (强) 全纯的并且具有强导数 $(x-\lambda e)^{-2}$.

现在, 如果 $|\lambda|\geqq 2\|x\|$, 那么如上所述, $(x-\lambda e)^{-1}=-\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}x)^{-1}=-\lambda^{-1}(e+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^{-1}x)^n)$, 从而当 $|\lambda|\to\infty$ 时

$$\|(x-\lambda e)^{-1}\|\leq|\lambda|^{-1}(1+\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n)\to 0.$$

此外, 对 λ 连续的函数 $(x-\lambda e)^{-1}$ 在 λ 的紧域: $|\lambda|\leqq 2\|x\|$ 上是有界的. 因此, 根据 Liouville 定理, $(x-\lambda e)^{-1}$ 必定是常向量 $x^{-1}=(x-0e)^{-1}$. 但由于前面已经证明了 $s\text{-}\lim_{|\lambda|\to\infty}(x-\lambda e)^{-1}=0$, 所以我们就得出了一个矛盾 $x^{-1}=0$, $e=x^{-1}x=0$.

§ 4. 弱可测性和强可测性. Pettis 定理

定义 1 设 $(S, \mathfrak{B}, m)$ 是一个测度空间, 而 $x(s)$ 是一个定义在 S 上且取值在 B 空间 X 内的某个映射. $x(s)$ 叫做弱 $\mathfrak{B}$-可测的, 如果对任何一个 $f\in X'$, s 的数值函数 $f(x(s))=\langle x(s), f\rangle$ 都是 $\mathfrak{B}$-可测的. $x(s)$ 叫做有限值的, 如果对于有限个不相交的 $\mathfrak{B}$-可测集 B_j, 这里, $m(B_j)<\infty$,

$x(s)$ 在每一个 B_j 上都是不等于零的常数而在 $S-\bigcup_j B_j$ 上 $x(s)=0$. $x(s)$ 叫做**强 $\mathfrak{B}$-可测的**，如果存在有限值函数的某个序列，它在 S 上 m-a. e. 强收敛于 $x(s)$.

定义 2 $x(s)$ 叫做**可分值的**，如果它的值域 $\{x(s); s\in S\}$ 是可分的. $x(s)$ 叫做是 **m-几乎可分值的**，如果存在一个 $\mathfrak{B}$-可测集 B_0，其 m-测度为零且使得 $\{x(s); s\in S-B_0\}$ 是可分的.

定理 (B. J. Pettis[1]) $x(s)$ 是强 $\mathfrak{B}$-可测的，当且仅当它是弱 $\mathfrak{B}$-可测的，同时又是 m-几乎可分值的.

证明 "仅当"部分证明如下. 因为有限值函数是弱 $\mathfrak{B}$-可测的，所以强 $\mathfrak{B}$-可测性蕴涵着弱 $\mathfrak{B}$-可测性，又根据 $x(s)$ 的强 $\mathfrak{B}$-可测性，所以存在有限值函数 $x_n(s)$ 的序列使得除了一个 m-测度为零的集合 $B_0\in\mathfrak{B}$ 之外，有 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n(s)=x(s)$. 因此，$x_n(s)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的值域的并集是一个可数集. 从而此集合的闭包是可分的且包含了值域 $\{x(s); s\in S-B_0\}$.

证明"当"的部分. 不失一般性，我们可以认为值域 $\{x(s); s\in S\}$ 本身是可分的. 因此，我们就可以假定空间 X 本身是可分的；否则，我们就用含有 $x(s)$ 的值域的最小线性闭子空间来代替 X. 我们首先证明 $\|x(s)\|$ 本身是 $\mathfrak{B}$-可测的. 为此目的，我们将引用一个后面才予以证明的引理，它指出，一个可分 B-空间的对偶空间 X' 必满足以下条件

$$\begin{cases}\text{存在某个序列 } \{f_n\}\subseteq X' \text{ 且 } \|f_n\|\leqq 1,\ \text{使得对}\\ \text{任何一个 } f_0\in X' \text{ 且 } \|f_0\|\leqq 1,\ \text{我们总可以}\\ \text{选出 } \{f_n\} \text{ 的一个子序列 } \{f_{n'}\},\ \text{此子序列}\\ \text{对于每一个 } x\in X \text{ 都有 } \lim\limits_{n\to\infty} f_{n'}(x)=f_0(x).\end{cases} \tag{1}$$

现在，对任何一个实数 a，令

$A=\{s; \|x(s)\|\leqq a\}$ 以及 $A_f=\{s; |f(x(s))|\leqq a\}$，其中，$f\in X'$. 如果我们能够证明 $A=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_{f_j}$，则由 $x(s)$ 的弱 $\mathfrak{B}$-可测性可知，函数 $\|x(s)\|$ 是 $\mathfrak{B}$-可测的. 显然，$A\subseteq\bigcap\limits_{\|f\|\leqq 1} A_f$. 但由第四章 §6 定理 1 的系 2 可知，对于固定的 s，存在某个 $f_0\in X'$，它满足 $\|f_0\|=1$ 和 $f_0(x(s))=\|x(s)\|$. 因此，反包含关系 $A\supseteq\bigcap\limits_{\|f\|\leqq 1} A_f$ 是成立的，从而我们有 $A=\bigcap\limits_{\|f\|\leqq 1} A_f$. 根据引理，我们得到 $\bigcap\limits_{\|f\|\leqq 1} A_f=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_{f_j}$，所以有 $A=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_{f_j}$.

因为值域 $\{x(s); s\in S\}$ 是可分的，所以对任何正整数 n，该值域可以被半径 $\leqq 1/n$ 的可数个开球 $S_{j,n}$ $(j=1, 2, \cdots)$ 所覆盖. 设球 $S_{j,n}$ 的中心是 $x_{j,n}$. 前面已经证明过 $\|x(s)-x_{j,n}\|$ 对 s 是 $\mathfrak{B}$-可测的. 因此，集合 $B_{j,n}=\{s\in S; x(s)\in S_{j,n}\}$ 是 $\mathfrak{B}$-可测的且 $S=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_{j,n}$. 如果 $s\in B'_{i,n}=B_{i,n}-\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} B_{j,n}$，我们就令

$$x_n(s)=x_{i,n}.$$

这时，由于 $S=\sum_{i=1}^{\infty}B'_{i,n}$，所以对每一个 $s\in S$ 我们都有 $\|x(s)-x_n(s)\|<1/n$. 因为 $B'_{i,n}$ 是 $\mathfrak{B}$-可测的，所以容易看出，每一个 $x_n(s)$ 都是强 $\mathfrak{B}$-可测的. 从而序列 $\{x_n(s)\}$ 的强极限 $x(s)$ 也是强 $\mathfrak{B}$-可测的.

引理的证明 设序列 $\{x_n\}$ 在 X 内是强稠密的. 考虑这样一个映射 $f\to\varphi_n(f)=\{f(x_1), f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$，它把 X' 的单位球 $S'=\{f\in X';\|f\|\leq 1\}$ 映入 n 维 Hilbert 空间 $l^2(n)$ 内，而 $l^2(n)$ 中的向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的范数为 $\|(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right)^{1/2}$. 因为 $l^2(n)$ 是可分的，所以对于固定的 n，存在 S' 的某个序列 $\{f_{n,k}\}(k=1,2,\cdots)$，使得 $\{\varphi_n(f_{n,k});k=1,2,\cdots\}$ 在 S' 的象 $\varphi_n(S')$ 中是稠密的.

于是我们就证明了，对任何一个 $f_0\in S'$，总可以选出一个子序列 $\{f_{n,m_n}\}(n=1,2,\cdots)$ 使得 $|f_{n,m_n}(x_i)-f_0(x_i)|<1/n(i=1,2,\cdots,n)$. 因此有 $\lim_{n\to\infty}f_{n,m_n}(x_i)=f_0(x_i)(i=1,2,\cdots)$，从而由第五章 §1 的定理 10 可知，对每一个 $x\in X$ 都有 $\lim_{n\to\infty}f_{n,m_n}(x)=f_0(x)$.

§5. Bochner 积分

设 $x(s)$ 是定义在测度空间 $(S,\mathfrak{B},m)$ 上的一个有限值函数，而其值域含于 B-空间 X 内；又设 $x(s)$ 在 $B_i\in\mathfrak{B}$ 上等于 $x_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，这里，相应于 $i=1,2,\cdots,n$ 的诸 B_i 是不相交的，并且 $m(B_i)<\infty$，此外，在 $(S-\sum_{i=1}^{n}B_i)$ 上还有 $x(s)=0$. 这时，我们可以用 $\sum_{i=1}^{n}x_i m(B_i)$ 来定义 $x(s)$ 在 S 上的 m-积分 $\int_S x(s)m(ds)$. 利用取极限的方法我们可以定义更一般函数的 m-积分. 更确切地说就是

定义 一个定义在测度空间 $(S,\mathfrak{B},m)$ 上且在 B-空间 X 内取值的函数 $x(s)$ 叫做是 **Bochner m-可积的**，如果存在有限值函数的某个序列 $\{x_n(s)\}$，它按下述方式 m-a.e. 强收敛于 $x(s)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_S\|x(s)-x_n(s)\|m(ds)=0. \tag{1}$$

对于任何一个集合 $B\in\mathfrak{B}$，$x(s)$ 在 B 上的 Bochner m-积分定义为

$$\int_B x(s)m(ds)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\int_S C_B(s)x_n(s)m(ds)，\text{这里，}C_B\text{ 是集合 }B\text{ 的特征函数.} \tag{2}$$

为了说明上述定义是合理的，我们尚须说明(2)右端的强极限是存在的以及此强极限的值不依赖于近似函数序列 $\{x_n(s)\}$.

定义的合理性 首先 $x(s)$ 是强 $\mathfrak{B}$-可测的，从而条件(1)有意义，这是因为在 Pettis 定理的证明中曾指出过 $\|x(s)-x_n(s)\|$ 是 $\mathfrak{B}$-可测的. 由不等式

$$\left\|\int_B x_n(s)m(ds)-\int_B x_k(s)m(ds)\right\|=\left\|\int_B(x_n(s)-x_k(s))m(ds)\right\|$$

$$\leq\int_B \|x_n(s)-x_k(s)\| m(ds)\leq\int_S \|x_n(s)-x(s)\| m(ds)+\int_S \|x(s)-x_k(s)\| m(ds)$$

以及空间X的完备性可知，$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\int_B x_n(s)m(ds)$是存在的．还容易看出，此强极限不依赖于此近似序列，这是因为任何两个这样的序列都可以合成为单独一个近似序列．

定理 1 (S. Bochner[1]) 一个强σ-可测函数$x(s)$是Bochner m-可积的，当且仅当$\|x(s)\|$是m-可积的．

证明 "仅当"部分．我们有$\|x(s)\|\leq\|x_n(s)\|+\|x(s)-x_n(s)\|$．根据$\|x_n(s)\|$的$m$-可积性和条件(1)，显然$\|x(s)\|$是$m$-可积的且有

$$\int_B \|x(s)\| m(ds)\leq\int_B \|x_n(s)\| m(ds)+\int_B \|x(s)-x_n(s)\| m(ds).$$

此外，因为

$$\int_B \big|\|x_n(s)\|-\|x_k(s)\|\big| m(ds)\leq\int_B \|x(s)-x_k(s)\| m(ds),$$

所以，由(1)可知$\lim\limits_{n\to\infty}\int_B \|x_n(s)\| m(ds)$存在．从而我们有

$$\int_B \|x(s)\| m(ds)\leq\varliminf_{n\to\infty}\int_B \|x_n(s)\| m(ds).$$

"当"的部分．设$\{x_n(s)\}$是有限值函数的一个m-a. e. 强收敛于$x(s)$的序列．令

$$y_n(s)=x_n(s),\ 当\ \|x_n(s)\|\leq\|x(s)\|(1+2^{-1})时,$$
$$y_n(s)=0,\ 当\ \|x_n(s)\|>\|x(s)\|(1+2^{-1})时.$$

于是有限值函数的序列$\{y_n(s)\}$满足$\|y_n(s)\|\leq\|x(s)\|\cdot(1+2^{-1})$并且$\lim\limits_{n\to\infty}\|x(s)-y_n(s)\|=0$ m-a. e. 成立．因此，利用$\|x(s)\|$的m-可积性，我们可以把 Lebesgue-Fatou 引理应用于函数$\|x(s)-y_n(s)\|\leq\|x(s)\|(2+2^{-1})$，从而得到

$$\lim\int_S \|x(s)-y_n(s)\| m(ds)=0,$$

这就是说$x(s)$是 Bochner m-可积的．

系 1 上述证明指出

$$\int_B \|x(s)\| m(ds)\geqq\left\|\int_B x(s)m(ds)\right\|,$$

从而$\int_B x(s)m(ds)$在如下意义下是m-绝对连续的：

$$s\text{-}\lim_{m(B)\to 0}\int_B x(s)m(ds)=0.$$

有限可加性$\int_{\sum\limits_{j=1}^n B_j} x(s)m(ds)=\sum\limits_{j=1}^n\int_{B_j} x(s)m(ds)$显然是成立的，而由$\int_B \|x(s)\| m(ds)$的$\sigma$-可加性可知，$\int_B x(s)m(ds)$是$\sigma$-可加的，亦即

$B=\sum_{j=1}^{\infty}B_j$ 而 $m(B_j)<\infty$，必导致 $\int_{\sum_{j=1}^{\infty}B_k}x(s)m(ds)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{B_j}x(s)m(ds)$.

系 2　设 T 是 B-空间 X 上的一个有界线性算子，它映 X 入 B-空间 Y 内. 如果 $x(s)$ 是值域在 X 内的一个 Bochner m-可积函数，则 $Tx(s)$ 是值域在 Y 内的一个 Bochner m-可积函数，并且

$$\int_B Tx(s)m(ds)=T\int_B x(s)m(ds).$$

证明　设有限值函数的某个序列 $\{y_n(s)\}$ 满足

$$\|y_n(s)\|\leq\|x(s)\|(1+n^{-1}) \text{ 和 } s\text{-}\lim_{n\to\infty}y_n(s)=x(s)\quad m\text{-a.e. 成立.}$$

于是利用 T 的线性性和连续性，我们有 $\int_B Ty_n(s)m(ds)=T\int_B y_n(s)m(ds)$. 此外，由 T 的连续性可以得出

$$\|Ty_n(s)\|\leq\|T\|\cdot\|y_n(s)\|\leq\|T\|\cdot\|x(s)\|\cdot(1+n^{-1}) \text{ 和 } s\text{-}\lim_{n\to\infty}Ty_n(s)=Tx(s)\quad m\text{-a.e. 成立.}$$

因此，$Tx(s)$ 也是 Bochner m-可积的并且还有

$$\int_B Tx(s)m(ds)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\int_B Ty_n(s)m(ds)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}T\int_B y_n(s)m(ds)=T\int_B x(s)m(ds).$$

定理 2 (S. Bochner[1])　设 S 是一个 n 维欧儿里得空间，$\mathfrak{B}$ 是 S 的 Baire 集族而 $m(B)$ 是 B 的 Lebesgue 测度. 如果 $x(s)$ 是 Bochner m-可积的，又如果 $P(s_0;\alpha)$ 是以 $s_0\in S$ 为中心、以 2α 为边长的平行正多面体，于是我们有微分定理

$$s\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0}(2\alpha)^{-n}\int_{P(s_0,\alpha)}x(s)m(ds)=x(s_0)\quad \text{对 } m\text{-a.e. } s_0 \text{ 成立.}$$

证明　令

$$(2\alpha)^{-n}\int_{P(s_0,\alpha)}x(s)m(ds)=D(x;s_0,\alpha).$$

如果 $\{x_n(s)\}$ 是某有限值函数序列，它使得 $\|x_n(s)\|\leq\|x(s)\|\cdot(1+n^{-1})$ 和 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n(s)=x(s)$ m-a.e. 成立，则

$$D(x;s_0,\alpha)-x(s_0)=D(x-x_k;s_0,\alpha)+D(x_k;s_0,\alpha)-x(s_0),$$

从而

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{\alpha\downarrow 0}}\|D(x;s_0,\alpha)-x(s_0)\|&\leq\overline{\lim_{\alpha\downarrow 0}}D(\|x-x_k\|;s_0,\alpha)\\&+\overline{\lim_{\alpha\downarrow 0}}\|D(x_k;s_0,\alpha)-x_k(s_0)\|+\|x_k(s_0)-x(s_0)\|.\end{aligned}$$

由数值函数的 Lebesgue 微分定理可知，右端第一项 m-a.e. 等于 $\|x(s_0)-x_k(s_0)\|$. 由于 $x_k(s)$ 是有限值的，所以右端第二项 m-a.e. $=0$. 因此

$$\overline{\lim_{\alpha\downarrow 0}}\|D(x;s_0,\alpha)-x(s_0)\|\leq 2\|x_k(s_0)-x(s_0)\|\quad \text{对 } m\text{-a.e. } s_0 \text{ 成立.}$$

所以，令 $k\to\infty$，我们就得到定理 2.

注 同数值函数的情形相反，一个在 B-空间取值的 σ-可加且 m-绝对连续的函数不一定能够表示为一个 Bochner 积分．这可以通过一个反例来说明．

反例 令 $S=[0,1]$且 $\mathfrak{B}$ 是$[0,1]$上的 Baire 集族，而 $m(B)$是 $B\in\mathfrak{B}$ 的 Lebesgue 测度．考虑定义在闭区间 $[1/3, 2/3]$ 上的有界实值函数 $\xi=\xi(\theta)$ 的全体 $m[1/3, 2/3]$，并引入范数$\|\xi\|=\sup\limits_{\theta}|\xi(\theta)|$．我们按以下方式作出一个定义在 $[0,1]$ 上且在 $m[1/3,2/3]$ 内取值的函数 $x(s)=\xi(\theta; s)$：

$$\begin{cases}\text{用实值函数 } y=y_\theta(s) \text{ 表示 } \xi(\theta;s) \text{ 在 } \theta \text{ 处的值，而 } y=y_\theta(s) \text{ 在 } s\text{-}y\\ \text{平面内的图形是依次连结三点}(0,0)\text{、}(\theta,1)\text{ 和 }(1,0)\text{ 的折线.}\end{cases}$$

这时，如果 $s\neq s'$，则我们有 Lipschitz 条件：

$$\|(s-s')^{-1}(x(s)-x(s'))\|=\sup_{\theta}|(s-s')^{-1}(\xi(\theta;s)-\xi(\theta;s'))|<3.$$

因此，利用值域含于 $m[1/3, 2/3]$内的区间函数$(x(s)-x(s'))$，我们可以对$[0,1]$的 Baire 集 B 定义一个集合函数 $x(B)$，且它是 σ-可加的和 m-绝对连续的．

如果此函数可以表示为一个 Bochner m-积分，则由上面的定理 2 可知，函数 $x(s)$ 关于 s 必定是 m-a.e. 强可微的．我们把相应的强导数 $x'(s)$ 记为 $\eta(\theta; s)$，它在 $m[1/3, 2/3]$内取值．因此，对每一个 $\theta\in[1/3, 2/3]$和 m-a.e. 的 s 都有

$$0=\lim_{h\to 0}\|h^{-1}(x(s+h)-x(s))-x'(s)\|\geq\lim_{h\to 0}|h^{-1}(\xi(\theta;s+h)-\xi(\theta;s))-\eta(\theta;s)|.$$

这表明对于所有的 $\theta\in[1/3, 2/3]$，$\xi(\theta; s)$ 对 s 必定是 m-a.e. 可微的．这同 $\xi(\theta; s)$ 的定义相矛盾．

第五章参考文献

S. Banach[1], N. Dunford-J. Schwartz[1]和 E. Hille-R. S. Phillips[1].

第五章附录 局部凸线性拓扑空间中的弱拓扑和对偶性

本书的安排使得读者在读第一遍时可以不看此附录而直接进入后面各章．

§1. 极 集

定义 设 X 是一个局部凸的线性拓扑空间．对任何一个集合 $M\subseteq X$，我们定义它的(右)**极集** M^0 为

$$M^0=\{x'\in X';\ \sup_{x\in M}|\langle x, x'\rangle|\leq 1\}. \tag{1}$$

类似地，对任何一个集合 $M'\subseteq X'$，我们定义它的(左)**极集** ${}^0M'$ 为

$${}^0M'=\{x\in X;\ \sup_{x'\in M'}|\langle x, x'\rangle|\leq 1\}=X\cap(M')^0, \tag{2}$$

这里，我们认为X已被嵌入它的重对偶空间$(X'_s)'_s$中.

在X的弱拓扑下，0的一个基本邻域系可由形如${}^0M'$的集合组成的集合系给出，这里，M'遍取X'的任何有限集. 在X'的弱*拓扑下，0的一个基本邻域系可由形如M^0的集合组成的集合系给出，这里，M遍取X的任何有限集. 在X'的强拓扑下，0的一个基本邻域系可由形如M^0的集合组成的集合系给出，这里，M遍取X的任何有界集.

命题 在X'的弱*拓扑下，M^0是一个平衡的凸闭集.

证明 对任何一个固定的$x\in X$，线性泛函$f(x')=\langle x, x'\rangle$在$X'$的弱*拓扑下是连续的. 因此$M^0=\bigcap_{m\in M}\{m\}^c$在$X'$的弱*拓扑下是闭的. 至于$M^0$的平衡的凸性则是显然的.

Tychonov 定理的应用

定理 1 设X是一个局部凸的线性拓扑空间，而A是X的0的一个平衡的凸邻域. 则A^0在X'的弱*拓扑下是紧的.

证明 设$p(x)$是A的 Minkowski 泛函. 对于每一个$x\in X$，考虑球$S_x=\{z\in C; |z|<p(x)\}$和拓扑乘积$S=\prod_{x\in X}S_x$. 由 Tychonov 定理可知，S是紧的. 我们知道任何一个元素$x'\in X'$都可以用$x'(x)=\langle x, x'\rangle$，$x\in X$给出的值的集合来确定. 因为对任何一个$\varepsilon>0$都有$x\in(p(x)+\varepsilon)A$，所以我们看出，对于$x'\in X'$，必存在某个$a\in A$使得$\langle x, x'\rangle=\langle(p(x)+\varepsilon)a, x'\rangle$. 因此，由$x'\in A^0$可得$|x'(x)|\leq p(x)+\varepsilon$，这就是说，$x'(x)\in S_x$. 所以我们可以把$A^0$看作$S$的一个子集. 此外，容易证实$A^0$关于$X'$的弱*拓扑的诱导拓扑同$A^0$关于笛卡尔乘积$S=\prod_{x\in X}S_x$的拓扑的诱导拓扑是相同的.

因此，只需证明A^0是S的闭子集就行了. 假定$y=\prod_{x\in X}y(x)$是A^0在S内的弱*闭包的一个元素. 考虑任一$\varepsilon>0$和任何$x_1, x_2\in X$. 如果$u=\prod_{x\in X}u(x)\in S$满足

$$|u(x_1)-y(x_1)|<\varepsilon,\ |u(x_2)-y(x_2)|<\varepsilon \text{ 和 } |u(x_1+x_2)-y(x_1+x_2)|<\varepsilon,$$

则所有这种u组成的集合是y在S内的一个邻域. 此邻域含有某个点$x'\in A^0$，但因x'是X上的一个连续线性泛函，所以我们有

$$|y(x_1+x_2)-y(x_1)-y(x_2)|\leq|y(x_1+x_2)-\langle x_1+x_2, x'\rangle|+|\langle x_1, x'\rangle-y(x_1)|$$
$$+|\langle x_2, x'\rangle-y(x_2)|<3\varepsilon.$$

这就证明了$y(x_1+x_2)=y(x_1)+y(x_2)$. 类似地，我们可以证明$y(\beta x)=\beta y(x)$，从而y定义了X上的一个线性泛函. 利用$y=\prod_{x\in X}y(x)\in S$这一事实，我们知道$|y(x)|\leq p(x)$. 因为$p(x)$是连续的，所以$y(x)$是一个连续线性泛函，亦即$y\in X'$. 另一方面，因为$y$是$A^0$的一个弱*聚点，所以对任何$\varepsilon>0$和$a\in A$，都存在$x'\in A^0$使得$|y(a)-\langle a, x'\rangle|\leq\varepsilon$. 因此，$|y(a)|\leq|\langle a, x'\rangle|+\varepsilon$

$\leqq 1+\varepsilon$, 从而 $|y(a)|\leqq 1$, 这就是说, $y\in A^0$.

系 赋范线性空间 X 的对偶空间 X_s 的单位球 $S^*=\{x'\in X';\ \|x'\|\leqq 1\}$ 在 X' 的弱*拓扑下是紧的.

Mazur 定理的应用

定理 2 设 M 是局部凸的线性拓扑空间 X 的一个平衡的凸闭集. 则 $M={}^0(M^0)$.

证明 显然, $M\subseteqq{}^0(M^0)$. 如果存在一个 $x\in{}^0(M^0)-M$, 则由第四章 §6 的Mazur 定理 3 可知, 存在 $x_0'\in X'$ 使得, $\langle x_0,\ x_0'\rangle>1$, 且对所有的 $x\in M$ 都有 $|\langle x, x_0'\rangle\leqq 1$. 最后这个不等式表明 $x_0'\in M^0$; 从而 x_0 不可能属于 ${}^0(M^0)$.

§2. 桶 空 间

定义 局部凸的线性拓扑空间 X 中的任何一个平衡且吸收的凸闭集都叫做桶 (barrel) (Bourbaki 称之为桶状体(tonneau)). 如果 X 的每一个桶都是 0 的一个邻域, 则 X 称为桶空间.

定理 1 局部凸的线性拓扑空间 X 如果不是第一纲的, 则它必定是一个桶空间.

证明 设 T 是 X 内的一个桶. 因为 T 是吸收集, 所以 X 是闭集 $nT=\{nt;\ t\in T\}$ 的并集, 这里, n 取遍正整数. 因为 X 不是第一纲的, 所以诸 nT 中至少有一个含有一个内点. 因此 T 本身含有一个内点 x_0. 如果 $x_0=0$, 则 T 是 0 的一个邻域. 如果 $x_0\neq 0$, 则由 T 是平衡集这一事实可知, $-x_0\in T$. 于是 $-x_0$ 同 x_0 一样, 也是 T 的一个内点. 这就表明凸集 T 含有内点 $0=(x_0-x_0)/2$.

系 1 所有局部凸的 F-空间, 特别地, 所有的 B-空间和 $\mathfrak{E}(R^n)$ 空间, 都是桶空间.

系 2 度量线性空间 $\mathfrak{D}_k(R^n)$ 是一个桶空间.

证明 设 $\{\varphi_k\}$ 是关于距离

$$\operatorname{dis}(\varphi,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m}\frac{p_m(\varphi-\psi)}{1+p_m(\varphi-\psi)},\text{其中,}p_m(\varphi)=\sup_{|j|\leq m,\ x\in K}|D^j\varphi(x)|$$

的一个 Cauchy 序列. 对任何一个微分算子 D^j, 序列 $\{D^j\varphi_k(x)\}$ 都是等度连续和等度有界的, 即

$$\lim_{|x^1-x^2|\downarrow 0,\ k\geq 1}\sup|D^j\varphi_k(x^1)-D^j\varphi_k(x^2)|=0\ \text{和}\ \sup_{x\in K,\ k\geq 1}|D^j\varphi_k(x)|<\infty.$$

这可以从下述事实看出来, 即对于任何一个坐标 x_s 有 $\sup\limits_{x\in K,\ k\geq 1}\left|\dfrac{\partial}{\partial x_s}D^j\varphi_k(x)\right|<\infty$. 因此, 由 Ascoli-Arzelà 定理可知, 存在某个子序列 $\{D^j\varphi_{k'}(x)\}$, 它在 K 上一致收敛. 利用对角线法, 我们可以选出 $\{\varphi_k(x)\}$ 的某个子序列 $\{\varphi_{k''}(x)\}$, 使得对任何一个微分算子 D^j, 序列 $\{D^j\varphi_{k''}(x)\}$ 都在 K 上一致收敛. 因此有

$$\lim_{k''\to\infty}D^j\varphi_{k''}(x)=D^j\varphi(x),\ \text{其中,}\ \varphi(x)=\lim_{k''\to\infty}\varphi_{k''}(x),$$

并且这些极限关系式在 K 上是一致成立的. 因此, 度量空间 $\mathfrak{D}(R^n)$ 是完备的, 从而它不是第一纲的.

注 (i) 上述证明表明, $\mathfrak{D}(R^n)$ 的有界集在 $\mathfrak{D}(R^n)$ 的拓扑下是相对紧的. 这是因为 $\mathfrak{D}(R^n)$ 的有界集 B 是含于某个 $\mathfrak{D}_k(R^n)$ 内的, 这里, K 是 R^n 的某个紧集, 此外, 由 B 的有界性条件还可得

出，对于每一个 D^j，$\{D^j\varphi; \varphi\in B\}$都是等度有界和等度连续的．(ii)类似地，我们看见，$\mathfrak{E}(R^n)$的任何一个有界集都是$\mathfrak{E}(R^n)$的相对紧集．

系 3 $\mathfrak{D}(R^n)$是一个桶空间．

证明 由于$\mathfrak{D}(R^n)$是$\{\mathfrak{D}_K(R^n)\}$的一个归纳极限，这里，K 遍取 R^n的紧子集，所以系 3 是下述命题的一个推论．

命题 如果局部凸的线性拓扑空间X是它的子桶空间 X_α，$\alpha\in A$的一个归纳极限，则X本身也是一个桶空间．

证明 设V是X的一个桶．由于V是闭集，所以，根据由X_α到X内的恒等映射$T_\alpha: x\to x$的连续性，$T_\alpha^{-1}(V)=V\cap X_\alpha$也是闭集．因此，$V\cap X_\alpha$是$X_\alpha$的一个桶．因为$X_\alpha$是一个桶空间，所以$V\cap X_\alpha$是$X_\alpha$的0的一个邻域．又因为$X$是诸$X_\alpha$的一个归纳极限，所以$V$必定是$X$的0的一个邻域．

定理 2 设X是一个桶空间．这时，第四章§8所定义的由X入$(X_s')_s'$内的映射$x\to Jx$是一个由X到JX上的拓扑映射，这里，JX的拓扑是JX作为$(X_s')_s'$的一个子集的相对拓扑．

证明 设B'是X_s'的一个有界子集．于是B'的极集$(B')^0=\{x''\in(X_s')'; \sup\limits_{x'\in B'}|\langle x', x''\rangle|\leq 1\}$是$(X_s')_s'$的0的一个邻域，且它还是$(X_s')_s'$内的一个平衡吸收的凸闭集．因此，$(B')^0\cap X={}^0(B')$是$X$的一个平衡吸收的凸集．作为一个(左)极集的${}^0(B')$，它在$X$的弱拓扑下是闭的，从而${}^0(B')$在$X$原来的拓扑下也是闭的．于是${}^0(B')=(B')^0\cap X$是$X$的一个桶，从而它是$X$的0的一个邻域．因此，由$X$入$(X_s')_s'$内的映射$x\to Jx$是连续的，这是因为$(X_s')_s'$的拓扑是由0的形如$(B')^0$的邻域组成的基本邻域系所确定的，这里，$B'$遍取$X'$的有界集．

反之，设U是X的0的一个平衡的凸闭邻域．则由上一节可知，$U={}^0(U^0)$．于是，$JU=JX\cap(U^0)^0$．另一方面，U^0是X_s'的一个有界集，这是因为，对X的任一有界集B，总存在某个$\alpha>0$使得$\alpha B\subseteq U$，从而$(\alpha B)^0\supseteq U^0$．于是$(U^0)^0$是$(X_s')_s'$的0的一个邻域．因此，$X$的0的邻域$U$的象$JU$是$JX$的0的一个邻域，这里，$JX$的拓扑是$JX$作为$(X_s')_s'$的一个子集的相对拓扑．

§3. 半自反性和自反性

定义 1 设X是一个局部凸线性拓扑空间．如果X_s'上的每一个连续线性泛函都可以由某一个$x\in X$表示为

$$\langle x, x'\rangle, \tag{1}$$

则X称为半自反的．因此，X是半自反的，当且仅当

$$X_w=(X_s')_w'^*. \tag{2}$$

定义 2 设X是一个局部凸线性拓扑空间．如果

$$X=(X_s')_s', \tag{3}$$

则X称为自反的．

根据上一节的定理 2，我们有

命题 1 设X是一个半自反空间．如果X又是桶空间，则它必是自反的．

显然，由定义 2 我们又有

命题 2 自反空间的强对偶空间也是自反的.

定理 1 一个局部凸线性拓扑空间 X 是半自反的，当且仅当，X 的每一个平衡的有界凸闭集在 X 的弱拓扑下都是紧的.

证明 设 X 是半自反的，而 T 是 X 的一个平衡的有界凸闭集. 于是，由本附录 §1 的定理 2 可知 $T={}^0(T^0)$. 因为 T 是 X 的有界集，所以 T^0 是 X'_s 的 0 的一个邻域. 因此，由本附录 §1 的定理 1 可知，$(T^0)^0$ 在 $(X'_s)'$ 的弱*拓扑下是紧的. 于是，再由 X 的半自反性可以看出，$T={}^0(T)^0$ 在 X 的弱拓扑下是紧的.

下面，我们证明定理 1 的充分性. 任取一个 $x''\in(X'_s)'$. x'' 在 X'_s 上的强连续性意味着存在 X 的一个有界集 B 使得

$|\langle x', x''\rangle|\leqq 1$ 对每个 $x'\in B^0$ 都成立，这就是说，$x''\in(B^0)^0$. 我们可以假定 B 是 X 的一个平衡的凸闭集. 于是，根据定理 1 的假设条件，B 在 X 的弱拓扑下是一个紧集. 因此，$B=B^{wa}$，这里 B^{wa} 表示 B 在 X 的弱拓扑下的闭包. 因为 X_w 是作为 $(X'_s)'_{w^*}$ 的一个线性拓扑子空间而嵌入 $(X'_s)'_{w^*}$ 内的，所以必定有 $(B^0)^0\supseteq B^{wa}=B$. 因此，我们只需证明 x'' 是 B 在 $(X'_s)'_{w^*}$ 内的一个聚点. 考虑由 X 入 $l^2(n)$ 内的映射 $x\to\varphi(x)=\{\langle x, x'_1\rangle, \cdots, \langle x, x'_n\rangle\}$，这里，$x'_1, \cdots, x'_n\in X'$. 因为 B 是平衡且凸的弱紧集，所以，象 $\varphi(B)$ 是平衡且凸的紧集. 如果 $\{\langle x'_1, x''\rangle, \cdots, \langle x'_n, x''\rangle\}$ 不属于 $\varphi(B)$，则由 Mazur 定理可知，必存在一个点 $\{c_1, \cdots, c_n\}\in l^2(n)$ 使得 $\sup\limits_{b\in B}|\sum\limits_i c_i\langle b, x'_i\rangle|\leqq 1$ 和 $(\sum\limits_i c_i\langle x'_i, x''\rangle)>1$，这表明，$\sum\limits_i c_i x'_i\in B^0$ 并且 x'' 不可能属于 $(B^0)^0$.

定理 2 一个局部凸的线性拓扑空间 X 是自反的，当且仅当，它是一个桶空间并且 X 的每个平衡的有界凸闭集在 X 的弱拓扑下都是紧集. 特别地，$\mathfrak{D}(R^n)$ 和 $\mathfrak{E}(R^n)$ 都是自反的.

证明 充分性可由上面的命题 1 和定理 1 得出来. 今证定理 2 的第一个条件是必要的.

设 T 是 X 的一个桶. 我们要证明 T 能吸收 X 的任何一个有界集 B，从而 $B^0\supseteq\alpha T^0, \alpha>0$. 因为 B^0 是 X'_s 的 0 的一个邻域，所以 T^0 是 X'_s 的一个有界集. 根据本附录 §1 的命题和定理 2，我们知道 $T={}^0(T^0)$. 由于假设了 X 是自反的，所以我们有 ${}^0(T^0)=(T^0)^0$，从而有 $T=(T^0)^0$. 于是我们就证明了桶 T 是 $X=(X'_s)'_s$ 的 0 的一个邻域，所以 X 是一个桶空间.

根据假设条件，平衡的凸闭集 $K=\mathrm{Conv}(\bigcup\limits_{|\alpha|=1}\alpha B)^a$ 在 X 的弱拓扑下是紧的. 这里，我们用 $\mathrm{Conv}(N)^a$ 表示 N 的凸包 $\mathrm{Conv}(N)$（见第一章 §1 注）在 X 内的闭包. 令 $Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}nK$，又令 $p(x)$ 是 K 的 Minkowski 泛函. 这时，由于 K 在 Y 内是弱紧的，所以 $p(x)$ 是 Y 的一个范数. 这就是说，对于 $\alpha>0$，$\{\alpha K\}$ 给出了赋范线性空间 Y 的一个基本邻域系，并且由于 K 是弱紧的，所以 Y 是一个 B-空间. 因此，Y 是一个桶空间. 另一方面，因为 K 是 X 的一个有界集，所以用范数 $p(x)$ 定义的 Y 的拓扑强于 Y 作为 X 的子集的相对拓扑. 由于 T 是 X 的一个桶，所以 T 在 X 内是闭的. 因此，$T\cap Y$ 在 Y 内对于用范数 $p(x)$ 定义的拓扑是闭的. 所以，$T\cap Y$ 是 B-空间 Y 的一个桶，从而

$T\cap Y$ 是 B-空间 Y 的 0 的一个邻域. 因此, 我们就证明了 $T\cap Y$, 不用说还有 T 都吸收了 $K\supseteq B$.

§ 4. Eberlein-Shmulyan 定理

这个定理, 鉴于它的应用, 是十分重要的.

定理 (Eberlein-Shmulyan) B-空间 X 是自反的, 当且仅当它是局部弱列紧的; 这就是说, X 是自反的, 当且仅当 X 的每一个强有界序列都含有一个子序列, 它弱收敛于 X 的某个元素.

为了证明此定理, 我们需要两个引理:

引理 1 如果 B-空间 X 的强对偶 X'_s 是可分的, 则 X 本身也是可分的.

引理 2 (S. Banach) B-空间 X 的对偶空间 X' 的线性子空间 M' 是弱*闭的, 当且仅当 M' 是有界弱*闭的, 这就是说, M' 是弱*闭的, 当且仅当 M' 含有 M' 的每一个强有界子集的所有弱*聚点.

引理 1 就是第五章 § 2 中那个已经证明过的引理. 至于引理 2, 我们只需证明它的"当"的部分. 叙述如下.

证明 (E. Hille-R. S. Phillips[1]) 根据假设条件, 我们知道 M' 是强闭的. 设 $x'_0 \overline{\in} M'$. 这时, 我们可以证明, 对每一个满足条件 $0<C<\inf\limits_{x'\in M'}\|x'-x'_0\|$ 的常数 C, 总存在某个 $x_0\in X$, $\|x_0\|\leq 1/C$ 使得

$$\langle x_0, x'_0\rangle=1 \text{ 以及对所有的 } x'\in M' \text{ 都有 } \langle x_0, x'\rangle=0. \tag{1}$$

因此, 强闭集 M' 必含有它的一切弱*聚点.

为了证明 x_0 的存在性, 我们选取一个递增数列 $\{C_n\}$ 使得, $C_1=C$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n=\infty$. 这时, 存在单位球 $S=\{x\in X; \|x\|\leq 1\}$ 的某个有限子集 σ_1 使得

$$\|x'-x'_0\|\leq C_2 \text{ 和 } \sup_{x\in\sigma_1}|\langle x, x'\rangle-\langle x, x'_0\rangle|\leq C_1 \text{ 必导致 } x'\overline{\in} M'.$$

如果不存在这种 σ_1, 则相应于 S 的每一个有限子集 σ, 都应该存在一个 $x'_\sigma\in M'$ 使得

$$\|x'_\sigma-x'_0\|\leq C_2 \text{ 和 } \sup_{x\in\sigma}|\langle x, x'_\sigma\rangle-\langle x, x'_0\rangle|\leq C_1.$$

我们用包含关系来建立诸集合 σ 之间的顺序并用 N'_σ 来表示集合 $\{x'_{\sigma'}; \sigma'\geq\sigma\}$ 的弱*闭包. 显然, N'_σ 具有有限交性质. 另一方面, 因为 M' 是有界弱*闭的, 所以由本附录 § 1 定理 1 的系, 可以肯定集合

$$M'_{C'}=\{x'\in M'; \|x'\|\leq C'\}$$

是弱*紧的. 因此, 对于 $C'=C_2+\|x'_0\|$ 有 $N'_\sigma\subseteq M'_{C'}$, 从而存在某个 $x'_1\in\bigcap\limits_\sigma N'_\sigma\subseteq M'$. 因此有 $\sup\limits_{x\in S}|\langle x, x'_1\rangle-\langle x, x'_0\rangle|\leq C_1$, 从而 $\|x'_1-x'_0\|\leq C_1$, 这同假设条件 $0<C_1<\inf\limits_{x'\in M'}\|x'-x'_0\|$ 相矛盾.

根据类似的推理, 我们可以相继证明, 存在 S 的有限子集的序列 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ 使得

$$\begin{cases}\|x'-x'_0\|\leq C_k \text{ 和 } \sup\limits_{x\in\sigma_i}|\langle x, x'\rangle-\langle x, x'_0\rangle|\leq C_i \quad (i=1, 2, \cdots, k-1)\\ \text{必导致 } x'\overline{\in} M'.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{i\to\infty} C_i=\infty$, 所以我们看出, 如果对所有的 $x\in(C/C_j)\sigma_j(j=1,2,\cdots)$ 都有

$$|\langle x,x'\rangle-\langle x,x_0'\rangle|\leqq C,$$

则 $x'\overline{\in}M'$. 设 $\{x_n\}$ 是一个序列, 它依次从集合 $(C/C_j)\sigma_j(j=1,2,\cdots)$ 取出自己的元素 x_n. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ 从而 $L(x')=\{\langle x_n,x'\rangle\}$ 是 X_s' 到 B-空间 (c_0) 内的一个有界线性变换. 我们知道, 点 $\{\langle x_n,x_0'\rangle\}\in(c_0)$ 到线性子空间 $L(M')$ 的距离 $>C$. 因此, 由第四章 § 6 定理 3 的系可知, 存在某个连续线性泛函 $\{\alpha_n\}\in(c_0)'=(l^1)$ 使得

$$\|\{\alpha_n\}\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\leqq 1/C,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\langle x_n,x_0'\rangle=1 \text{ 并且}$$

$$\text{对所有的 } x'\in M' \text{ 都有 } \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\langle x_n,x'\rangle=0.$$

显然, 元素 $x_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ 就满足条件(1).

系 设 $\langle x',x_0''\rangle=F(x')$ 是定义在 B-空间 X 的对偶空间 X' 上的一个线性泛函. 如果 $N(F)=N(x_0'')=\{x'\in X';F(x')=0\}$ 是弱 * 闭的, 则存在某个元素 $x_0\in X$ 使得

$$F(x')=\langle x',x_0''\rangle=\langle x_0,x'\rangle \text{对所有的 } x'\in X' \text{ 都成立.} \tag{2}$$

证明 我们可以假设 $N(F)\neq X'$. 否则, 我们可以就取 $x_0=0$. 设 $x_0'\in X'$ 且 $F(x_0')=1$. 由前面的引理 2 的(1)式可知, 存在某个 $x_0\in X$ 使得

$$\langle x_0,x_0'\rangle=1 \text{ 且对所有的 } x'\in N(F) \text{ 都有} \langle x_0,x'\rangle=0. \tag{3}$$

因此, 对任何一个 $x'\in X'$, 泛函

$$x'-F(x')x_0'=y'\in X'$$

都满足 $F(y')=0$, 亦即 $y'\in N(F)$. 所以由(3), 我们就得到(2).

定理的证明 “仅当”部分. 令 $\{x_n\}$ 是 X 的一个满足 $\|x_n\|=1$ 的序列. 由 $\{x_n\}$ 生成的子空间的强闭包 X_0 是一个可分的 B-空间. 因为 X_0 是 B-空间, 所以它是一个桶空间. 我们要证明 X_0 是自反的. X_0 的任何强有界闭集 B_0, 也是 X 的一个强有界闭集, 因此, 由 X 的自反性可知, B_0 在 X 的弱拓扑下是紧的. 但由于 X_0 是 X 的一个强线性闭子空间, 所以 X_0 在 X 的弱拓扑下是闭的(见第四章 § 6 的定理 3). 于是 B_0 在 X_0 的弱拓扑下是紧的. 因此, 由上一节的定理 2 可知, X_0 是自反的. 所以我们有 $X_0=((X_0)_s')_s'$. 根据前面的引理 1, $(X_0)_s'$ 还是可分的. 设 $\{x_n'\}$ 在 $(X_0)_s'$ 内是强稠密的. 这时, X_0 的弱拓扑可以用可数个半范数 $p_m(x)=|\langle x,x_m'\rangle|\,(m=1,2,\cdots)$ 的序列来定义. 于是容易看出, 在 X_0 的弱拓扑下的紧序列 $\{x_n\}$ 在 X_0 和 X 内都是弱列紧的. 我们只需选出 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n'}\}$, 使得对于 $m=1,2,\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_{n'},x_m'\rangle$ 都存在且为有限的.

“当”的部分. 设 M 是 X 的一个有界集, 又设 M 的每一个无穷序列都含有一个子序列, 它弱收敛于 X 的一个元素. 我们只须证明, 在 X 的弱拓扑下, M 在 X 内的闭包 $\overline{M}$ 在 X 内是弱紧的. 因为这时, 由上一节的定理 2 可知, 桶空间 X 是自反的.

因为 $X_w\subseteq(X_s')_{w^*}'$, 所以我们有 $\overline{M}=\overline{\overline{M}}\cap X_w$, 这里, $\overline{\overline{M}}$ 是 $\overline{M}$ 在 $(X_s')'$ 的弱 * 拓扑下的闭包. 令

S'_r 是 X'_s 的球，其半径为 $r>0$ 而球心在 0. 由于有对应关系

$$\overline{\overline{M}}\ni m\leftrightarrow\{\langle x',\ m\rangle;\ \|x'\|\leq 1\}\in\prod_{x'\in S'_1}I_{x'},\ \text{这里}$$

$$I_{x'}=\{z;\ |z|\leq\sup_{m\in\overline{\overline{M}}}|\langle x',\ m\rangle|\},$$

所以$\overline{\overline{M}}$可以等同于拓扑乘积$\prod_{x'\in S'_1}I_{x'}$ 的某个闭子集. 由 Tychonov 定理可知, $\prod_{x'\in S'_1}I_{x'}$ 是紧的, 从而$\overline{\overline{M}}$在$(X'_s)'$的弱*拓扑下是紧的. 因此, 我们只需要证明$\overline{\overline{M}}\subseteq X_w$.

令 $x''_0\in(X'_s)'$ 是集合 $\overline{M}$ 在$(X'_s)'$的弱*拓扑下的一个聚点. 为了证明$x''_0\in X_w$, 我们只需要证明集合 $N(x''_0)=\{x'\in X';\langle x',x''_0\rangle=0\}$是弱*闭的. 这是因为, 由上面的系可知, 存在某个$x_0\in X$ 使得对所有的 $x'\in X'$ 都有$\langle x',x''_0\rangle=\langle x_0,x'\rangle$. 我们首先来证明

$$\text{对 } X' \text{ 的每一个有限集 } x'_1,x'_2,\cdots,x'_n \text{ 都存在一个}$$
$$z\in\overline{M}\ \text{使得}\langle x'_j,x''_0\rangle=\langle z,x'_j\rangle\ \ (j=1,2,\cdots,n).\tag{4}$$

证法如下. 因为 x''_0 是含于 $\overline{M}$ 的弱*闭包内的, 所以存在某个元素 $z_m\in\overline{M}$ 使得

$$|\langle z_m,x'_j\rangle-\langle x'_j,x''_0\rangle|\leq 1/m\ \ (j=1,2,\cdots,n).$$

由假设条件可知$\{z_m\}$必存在一个子序列, 它弱收敛于某个元素 $z\in X$, 但因 $\overline{M}$ 的序列弱闭包是含于 $\overline{M}$ 内的, 所以 $z\in\overline{M}$. 于是我们就得出了(4).

现在由引理 2 可知, 如果对每一个 $r>0$, 集合 $N(x''_0)\cap S'_r$ 都是弱*闭的, 则 $N(x''_0)$也是弱*闭的. 令 y'_0 含于 $N(x''_0)\cap S'_1$ 的弱*闭包内. 我们须证 $y'_0\in N(x''_0)\cap S'_1$. 为此目的, 我们任取 $\varepsilon>0$ 并这样来作出三个序列$\{z_n\}\subseteq\overline{M}$、$\{x_n\}\subseteq M$ 和$\{y'_n\}\subseteq N(x''_0)\cap S'_1$: 利用(4), 我们可以选出一个 $z_1\in\overline{M}$ 使得$\langle z_1,y'_0\rangle=\langle y'_0,x''_0\rangle$. 因为 z_1 含于 M 的弱闭包内, 所以存在某个 $x_1\in M$ 使得$|\langle x_1,y'_0\rangle-\langle z_1,y'_0\rangle|\leq\varepsilon/4$. 因为 y'_0 含于 $N(x''_0)\cap S'_1$ 的弱*闭包内, 所以存在某个 $y'_1\in N(x''_0)\cap S'_1$ 使得 $|\langle x_1,y'_1\rangle-\langle x_1,y'_0\rangle|\leq\varepsilon/4$. 重复这一推理并联想到(4), 我们就得到$\{z_n\}\subseteq\overline{M}$、$\{x_n\}\subseteq M$ 和$\{y'_n\}\subseteq N(x''_0)\cap S'_1$ 使得

$$\begin{cases}\langle z_1,y'_0\rangle=\langle y'_0,x''_0\rangle,\\ \langle z_n,y'_m\rangle=\langle y'_m,x''_0\rangle=0\ \ (m=1,2,\cdots,n-1),\\ |\langle x_n,y'_m\rangle-\langle z_n,y'_m\rangle|\leq\varepsilon/4\ \ (m=0,1,\cdots,n-1),\\ |\langle x_i,y'_n\rangle-\langle x_i,y'_0\rangle|\leq\varepsilon/4\ \ (i=1,2,\cdots,n).\end{cases}\tag{5}$$

于是我们有

$$|\langle y'_0,x''_0\rangle-\langle x_i,y'_n\rangle|\leq\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2\ \ (i=1,2,\cdots,n).\tag{6}$$

因为$\{x_n\}\subseteq M$, 所以$\{x_n\}$必含有某个子序列, 它弱收敛于某个元素 $x\in\overline{M}$. 不失一般性, 我们可以假设序列$\{x_n\}$本身弱收敛于 $x\in\overline{M}$. 于是由(5)可知, $|\langle x,y'_m\rangle|\leq\varepsilon/4$. 由 $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 和第五章 §1 的 Mazur 定理 2 可知, 存在某个凸组合 $u=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_jx_j\ (\alpha_j\geq 0,\ \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j=1)$ 使得$\|x-u\|\leq\varepsilon/4$. 因此, 由(6)可得

$$|\langle y_0', x_0''\rangle - \langle u, y_n'\rangle| \leq \sum_{j=1}^{h} \alpha_j |\langle y_0', x_0''\rangle - \langle x_j, y_n'\rangle| \leq \varepsilon/2,$$

从而有

$$\begin{aligned} |\langle y_0', x_0''\rangle| &\leq |\langle y_0', x_0''\rangle - \langle u, y_n'\rangle| + |\langle u, y_n'\rangle - \langle x, y_n'\rangle| + |\langle x, y_n'\rangle| \\ &\leq \varepsilon/2 + \|u-x\| \|y_n'\| + \varepsilon/4 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 是任意的，所以有 $\langle y_0', x_0''\rangle = 0$ 从而 $y_0' \in N(x_0'')$. 结合 S_1' 是弱*闭集这个事实，我们就最终得出了 $y_0' \in N(x_0'') \cap S_1'$.

注 关于 B-空间中的弱拓扑和对偶性这方面的内容，有大量的参考文献. 例如，可以参看 N. Dunford-J. Schwartz[1]. 本附录的 §1、§2 和 §3 取材于 N. Bourbaki[1]和 A. Grothendieck[1]，并作了适当的修改. 值得注意的是，在 Eberlein[1]-Shmulyan[1]得出上述定理时，其证明中所用到的那些必要的工具，早在 S. Banach 的书[1]中就以这种或那种形式出现过.

第六章　Fourier 变换和微分方程

Fourier 变换是古典分析和现代分析的最有效的工具之一．它的应用范围，由于 S. L. Sobolev[1]和 L. Schwartz[1]引入了广义函数的概念，近年来已经惊人地扩大了．随后，L. Ehrenpreis、B. Malgrange 而特别是 L. Hörmander [6] 更进一步把它成功地应用于线性偏微分方程论之中．

§1. 速降函数的 Fourier 变换

定义 1　我们用 $\mathfrak{S}(R^n)$ 表示这种函数 f 的全体，即 $f\in C^\infty(R^n)$ 且对于非负整数 α_j 和 β_k 所成的每一个 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 和 $\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 均满足

$$\sup_{x\in R^n}|x^\beta D^\alpha f(x)|<\infty \qquad \left(x^\beta=\prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j}\right). \tag{1}$$

这种函数叫做(在 ∞ 邻近)是速降的．

例　$\exp(-|x|^2)$ 和函数 $f\in C_0^\infty(R^n)$ 都是速降的．

命题 1　在 $\mathfrak{S}(R^n)$ 中引入了函数的和以及函数同复数的乘法的代数运算并且还引入了用下述形式的半范数族

$$p(f)=\sup_{x\in R^n}|P(x)D^\alpha f(x)|,\ \text{其中 } P(x) \text{表示多项式}, \tag{2}$$

确定的拓扑之后，$\mathfrak{S}(R^n)$ 就成了一个局部凸的线性拓扑空间．

命题 2　$\mathfrak{S}(R^n)$ 在具有多项式系数的线性偏微分算子的作用下是封闭的．

命题 3　对于 $\mathfrak{S}(R^n)$ 的拓扑来说，$C_0^\infty(R^n)$ 是 $\mathfrak{S}(R^n)$ 的一个稠密子集．

证明　令 $f\in\mathfrak{S}(R^n)$，而选取 $\psi(x)\in C_0^\infty(R^n)$ 使得当 $|x|\leq 1$ 时，$\psi(x)=1$．于是对任何 $\varepsilon>0$，$f_\varepsilon(x)=f(x)\psi(\varepsilon x)\in C_0^\infty(R^n)$．利用关于函数乘积的微分的 Leibniz 公式，我们看出

$$D^\alpha(f_\varepsilon(x)-f(x))=D^\alpha\{f(x)(\psi(\varepsilon x)-1)\}$$

是下述形式的项

$$D^\beta f(x)\cdot(\varepsilon)^{|\gamma|}\{D^\gamma\psi(y)\}_{y=\varepsilon x},\ \text{其中} |\beta|+|\gamma|=|\alpha| \text{而} |\gamma|>0,$$

以及形式为 $D^\alpha f(x)\cdot(\psi(\varepsilon x)-1)$ 的项的有限线性组合．因此容易看出当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，在 $\mathfrak{S}(R^n)$ 的拓扑下，$f_\varepsilon(x)$ 趋于 $f(x)$．

定义 2　对任何一个 $f\in\mathfrak{S}(R^n)$，我们定义它的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 为

$$\hat{f}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{-i\langle\xi,x\rangle}f(x)dx, \tag{3}$$

其中 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$、$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$、$\langle\xi, x\rangle=\sum_{j=1}^n\xi_j x_j$ 和 $dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$．我们把 $g\in$

$\mathfrak{S}(R^n)$ 的逆 Fourier 变换 $\check{g}$ 定义为

$$\check{g}(x)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}g(\xi)d\xi. \tag{4}$$

命题 4. Fourier 变换: $f\to\hat{f}$ 把 $\mathfrak{S}(R^n)$ 线性连续地映入 $\mathfrak{S}(R^n)$ 内. 逆 Fourier 变换: $g\to\check{g}$ 也把 $\mathfrak{S}(R^n)$ 线性连续地映入 $\mathfrak{S}(R^n)$ 内.

证明 在积分号下形式地微分, 我们得到

$$D^\alpha\hat{f}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi,x\rangle}(-i)^{|\alpha|}x^\alpha f(x)dx. \tag{5}$$

这里, 作形式微分是容许的, 因为根据(1), 上式右端对 ξ 是一致收敛的. 因此 $\hat{f}\in C^\infty(R^n)$. 类似地, 利用分部积分, 我们得到

$$(i)^{|\beta|}\xi^\beta\hat{f}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi,x\rangle}D^\beta f(x)dx. \tag{6}$$

因此, 我们有

$$(i)^{|\beta|+|\alpha|}\xi^\beta D^\alpha\hat{f}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi,x\rangle}D^\beta(x^\alpha f(x))dx, \tag{7}$$

而(7)就证明了映射 $f\to\hat{f}$ 在 $\mathfrak{S}(R^n)$ 的拓扑下是连续的.

定理 1 (**Fourier 积分定理**) 下面的 Fourier 反演定理成立:

$$\check{\hat{f}}=(2\pi)^{-n/2}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)d\xi=f(x), \tag{8}$$

亦即我们有

$$\check{\hat{f}}=f. \text{ 而类似地, 我们有 } \hat{\check{f}}=f. \tag{8'}$$

因此容易看出, Fourier 变换双方线性连续地把 $\mathfrak{S}(R^n)$ 映到 $\mathfrak{S}(R^n)$ 上, 而逆 Fourier 变换给出了 Fourier 变换的逆映射.

证明 我们有

$$\int g(\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi=\int\hat{g}(y)f(x+y)dy \quad (f \text{ 和 } g\in\mathfrak{S}(R^n)). \tag{9}$$

事实上, 左端等于

$$\int g(\xi)\left\{(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi,y\rangle}f(y)dy\right\}e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi=(2\pi)^{-n/2}\int\left\{\int g(\xi)e^{-i\langle\xi,y-x\rangle}d\xi\right\}f(y)dy$$

$$=\int\hat{g}(y-x)f(y)dy=\int\hat{g}(y)f(x+y)dy.$$

对于 $\varepsilon>0$, 如果我们把 $g(\xi)$ 取为 $g(\varepsilon\xi)$, 则

$$(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle y,\xi\rangle}g(\varepsilon\xi)d\xi=(2\pi)^{-n/2}\varepsilon^{-n}\int g(z)e^{-i\langle y,z/\varepsilon\rangle}dz=\varepsilon^{-n}\hat{g}(y/\varepsilon).$$

于是根据(9), 得

$$\int g(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi=\int\hat{g}(y)f(x+\varepsilon y)dy.$$

按照 F. Riesz 的作法, 我们取 $g(x)=e^{-|x|^2/2}$ 并令 $\varepsilon\downarrow0$. 于是得到

$$g(0)\int\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi=f(x)\int\hat{g}(y)dy.$$

因为 $g(0)=1$, 并且根据众所周知的事实:

$$(2\pi)^{-n/2}\int e^{-|x|^2/2}e^{-i\langle y,x\rangle}dx=e^{-|y|^2/2}, \tag{10}$$

$$(2\pi)^{-n/2}\int e^{-|x|^2/2}dx=1, \tag{10'}$$

亦即 $\int\hat{g}(y)dy=(2\pi)^{n/2}$, 从而(8)得证.

注 为了完满起见, 我们还是给出(10)的证明. 显然有

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-t^2/2}e^{-iut}dt=e^{-u^2/2}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-(t+iu)^2/2}dt.$$

令 $u>0$, 并对 $z=t+iu$ 的全纯函数 $e^{-z^2/2}$, 沿有向线段

$\overrightarrow{-\lambda,\lambda}$、$\overrightarrow{\lambda,\lambda+iu}$、$\overrightarrow{\lambda+iu,-\lambda+iu}$ 和 $\overrightarrow{-\lambda+iu,-\lambda}$

所组成的曲线, 按上述次序进行积分. 根据 Cauchy 积分定理, 该积分等于零. 因此

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-1/2}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-(t+iu)^2/2}dt\\&=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-t^2/2}dt+(2\pi)^{-1/2}\int_{u}^{0}e^{-(-\lambda+iu)^2/2}i\,du+(2\pi)^{-1/2}\int_{0}^{u}e^{-(\lambda+iu)^2/2}i\,du.\end{aligned}$$

当 $\lambda\to\infty$ 时, 右端的第二项和第三项趋于 0, 从而由(10′)可知

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}e^{-itu}dt=e^{-u^2/2}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=e^{-u^2/2}.$$

于是我们对 $n=1$ 的情形证明了(10), 这时要证明一般 n 的情形是容易的, 办法是把它转化为 $n=1$ 的情形.

系(Parseval 关系式) 我们有

$$\int\hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi=\int f(x)\hat{g}(x)dx, \tag{11}$$

$$\int f(\xi)\bar{g}(\xi)d\xi=\int\hat{f}(x)\bar{\hat{g}}(x)dx, \tag{12}$$

$$(\widehat{f*g})=(2\pi)^{n/2}\hat{f}\cdot\hat{g} \ \text{和} \ (2\pi)^{n/2}(\widehat{f\cdot g})=\hat{f}*\hat{g}, \tag{13}$$

其中, 卷积 $f*g$ 的定义是

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)dy=\int g(x-y)f(y)dy. \tag{14}$$

证明 在(9)中, 令 $x=0$ 就得出了(11). 只要注意到 $\bar{\hat{g}}$ 的 Fourier 变换是 $\bar{g}$ 就可以从(11)得出(12). 其次, 我们指出

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n/2}\int(f*g)(x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}dx&=(2\pi)^{-n/2}\int g(y)e^{-i\langle\xi,y\rangle}\left\{\int f(x-y)e^{-i\langle\xi,x-y\rangle}dx\right\}dy\\&=(2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned} \tag{15}$$

由于 $\mathfrak{S}(R^n)$ 内的函数 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$ 的乘积 $\hat{f}\cdot\hat{g}$ 仍是 $\mathfrak{S}(R^n)$ 内的函数, 所以, 我们知道(15)的右端属于

$\mathfrak{S}(R^n)$. 容易看出, $\mathfrak{S}(R^n)$内的两个函数的卷积 $f*g$ 也属于 $\mathfrak{S}(R^n)$. 因此, 我们就证明了(13)的第一个公式. 第二个公式可以利用类似于(9)式的证明方法由(15)予以证明.

定理 2 (Poisson 求和公式) 设 $\varphi\in\mathfrak{S}(R^1)$, 又设 $\hat{\varphi}\in\mathfrak{S}(R^1)$是 φ 的 Fourier 变换. 则我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(n). \tag{16}$$

证明 令 $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)$. 根据 $\varphi(x)$在 ∞ 邻近是速降的这一事实可以证明, 此级数绝对收敛、$\in C^\infty$ 以及 $f(x+2\pi)=f(x)$. 特别地, (16)的两端都是收敛的. 我们只需证明二者相等.

$f(x)$关于 $L^2(0,2\pi)$的完全标准正交系$\{(2\pi)^{-1/2}e^{-ikx};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$的 Fourier 系数 c_k 为

$$c_k=(2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-ikx}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\varphi(x+2\pi n)e^{-ikx}dx$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}\varphi(x)e^{-ikx}dx=\hat{\varphi}(k).$$

因此, 由 $f\in L^2(0,2\pi)$可知, 有

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)=\operatorname*{l.i.m.}_{s\uparrow\infty}\sum_{k=-s}^{s}\hat{\varphi}(k)e^{ikx}.$$

然而, 因为 $\hat{\varphi}(x)\in\mathfrak{S}(R^n)$, 所以级数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(k)e^{ikx}$ 绝对收敛. 因此

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(k)e^{ikx},$$

令 $x=0$, 我们就得到(16).

例 由(10), 我们有

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tx^2}e^{-ixy}dx=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}e^{-ixy/\sqrt{2t}}(2t)^{-1/2}dx=(2t)^{-1/2}e^{-y^2/4t},\ t>0.$$

利用(16), 我们就得到所谓 θ-公式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-4t\pi^2n^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2t)^{-1/2}e^{-n^2/4t},\quad t>0. \tag{17}$$

§2. 缓和分布的 Fourier 变换

定义 1 定义在 $\mathfrak{S}(R^n)$上的一个连续线性泛函 T 就叫做 (R^n 内的) 一个缓和分布. 缓和分布的全体用 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 来表示. 作为 $\mathfrak{S}(R^n)$ 的对偶空间, $\mathfrak{S}(R^n)'$是一个关于强对偶拓扑而言的局部凸线性拓扑空间.

命题 1 因为 $C_0^\infty(R^n)$ 作为一个抽象集合是包含在 $\mathfrak{S}(R^n)$ 内的, 又因为 $\mathfrak{D}(R^n)$内的拓扑强

于 $\mathfrak{S}(R^n)$ 内的拓扑，所以一个缓和分布在 $C_0^\infty(R^n)$ 上的限制是 R^n 内的一个分布. 两个不同的缓和分布在 $C_0^\infty(R^n)$ 上的限制确定 R^n 内的两个不同的分布，这是因为对于 $\mathfrak{S}(R^n)$ 的拓扑而言，$C_0^\infty(R^n)$ 在 $\mathfrak{S}(R^n)$ 内是稠密的，从而一个 $\in\mathfrak{S}(R^n)'$ 的分布，当它在 $C_0^\infty(R^n)$ 上为零时，它必定也在 $\mathfrak{S}(R^n)$ 上为零. 所以

$$\mathfrak{S}(R^n)'\subseteqq\mathfrak{D}(R^n)'. \tag{1}$$

例 1 R^n 内具有紧支集的分布必定属于 $\mathfrak{S}(R^n)'$. 所以

$$\mathfrak{E}(R^n)'\subseteqq\mathfrak{S}(R^n)'. \tag{2}$$

例 2 一个 σ-有限且在 R^n 的 Baire 集系上是 σ-可加的非负测度 $\mu(dx)$ 称为一个**缓增测度**，如果对于某个非负的 k，有

$$\int_{R^n}(1+|x|^2)^{-k}\mu(dx)<\infty. \tag{3}$$

这样的一个测度 μ 确定了一个缓和分布

$$T_\mu(\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x)\mu(dx),\quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n). \tag{4}$$

事实上，由条件 $\varphi\in\mathfrak{S}(R^n)$ 可知，对于充分大的 $|x|$，我们有 $\varphi(x)=0((1+|x|^2)^{-k})$.

例 3 作为例 2 的一个特殊情形，任何一个函数 $f\in L^p(R^n)$，$p\geqq1$，均确定了一个缓和分布

$$T_f(\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x)f(x)dx,\quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n). \tag{4'}$$

一个 $f\in L^p(R^n)$ 能产生一个缓增测度 $\mu(dx)=|f(x)|dx$，要证实这一点，只须把 Hölder 不等式应用于

$$\int_{R^n}(1+|x|^2)^{-k}|f(x)|dx.$$

定义 2 函数 $f\in C^\infty(R^n)$ 叫做(在 ∞ 邻近)是**缓增的**，如果对于任何阶的微分运算 D^j，都存在某个非负整数 N 使得

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^{-N}|D^jf(x)|=0. \tag{5}$$

缓增函数的全体用 $\mathfrak{D}_M(R^n)$ 来表示. 在 $\mathfrak{D}_M(R^n)$ 中引入了函数的和、函数同复数的乘积的代数运算以及由下述形式的半范数族

$$p(f)=p_{h,D^j}(f)=\sup_{x\in R^n}|h(x)D^jf(x)|,\quad f\in\mathfrak{D}_M(R^n) \tag{6}$$

确定的拓扑之后，$\mathfrak{D}_M(R^n)$ 就成为一个局部凸的线性拓扑空间，这里，(6)中的 $h(x)$ 是任何一个 $\in\mathfrak{S}(R^n)$ 函数，而 D^j 是任何阶的微分运算. 利用关于函数乘积的微分的 Leibniz 公式，容易看出，对于每一个 $f\in\mathfrak{D}_M(R^n)$ 都有 $h(x)D^jf(x)\in\mathfrak{S}(R^n)$，从而 $p_{h,D^j}(f)$ 是有限的. 此外，如果对于所有的 $h\in\mathfrak{S}(R^n)$ 和 D^j 都有 $p_{h,D^j}(f)=0$，则 $f(x)\equiv0$；其实，这可以用选取 $D=I$ 和 $h\in\mathfrak{D}(R^n)$ 看出来.

命题 2 对于 $\mathfrak{D}_M(R^n)$ 的拓扑来说，$C_0^\infty(R^n)$ 在 $\mathfrak{D}_M(R^n)$ 内是稠密的.

证明 令 $f\in\mathfrak{D}_M(R^n)$，并选取 $\psi\in C_0^\infty(R^n)$ 使得当 $|x|\leqq1$ 时，$\psi(x)=1$. 于是对任何 $\varepsilon>0$ 都有 $f_\varepsilon(x)=f(x)\psi(\varepsilon x)\in C_0^\infty(R^n)$. 同在第六章 §1 的命题 3 中一样，容易证明，当 $\varepsilon\downarrow0$ 时，$f_\varepsilon(x)$ 在

$\mathfrak{D}_M(R^n)$的拓扑下收敛于 $f(x)$.

命题 3 任何一个函数 $f\in\mathfrak{D}_M(R^n)$ 都确定了一个缓和分布

$$T_f(\varphi)=\int_{R^n}f(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n).\tag{7}$$

定义 3 同在 R^n 内的分布的情形一样,我们可以把缓和分布 T 的广义导数定义为

$$D^jT(\varphi)=(-1)^{|j|}T(D^j\varphi),\quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n),\tag{8}$$

这是因为由 $\mathfrak{S}(R^n)$ 入 $\mathfrak{S}(R^n)$ 内的映射 $\varphi(x)\to D^j\varphi(x)$, 在 $\mathfrak{S}(R^n)$ 的拓扑下, 是线性连续的. 我们也可以把函数 $f\in\mathfrak{D}_M(R^n)$ 与分布 $T\in\mathfrak{S}(R^n)'$ 的乘法定义为

$$(fT)(\varphi)=T(f\varphi),\quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n),\tag{9}$$

这是因为由 $\mathfrak{S}(R^n)$ 入 $\mathfrak{S}(R^n)$ 内的映射 $\varphi(x)\to f(x)\varphi(x)$, 在 $\mathfrak{S}(R^n)$ 的拓扑下,是线性连续的.

缓和分布的 Fourier 变换

定义 4 因为 $\mathfrak{S}(R^n)$ 到 $\mathfrak{S}(R^n)$ 上的映射 $\varphi(x)\to\hat{\varphi}(x)$, 在 $\mathfrak{S}(R^n)$ 的拓扑下, 是线性连续的, 所以我们可以把缓和分布 T 的 Fourier 变换 $\hat{T}$ 定义为由下面等式所确定的缓和分布 $\hat{T}$, 即

$$\hat{T}(\varphi)=T(\hat{\varphi}),\quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n).\tag{10}$$

例 1 如果 $f\in L^1(R^n)$, 则

$$\hat{T}_f=T_{\hat{f}},\ \text{其中}\ \hat{f}(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(\xi)d\xi,\tag{11}$$

事实上, 只要在 $\hat{T}_f(\varphi)=\int_{R^n}f(x)\hat{\varphi}(x)dx=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}f(x)\left\{\int_{R^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(\xi)d\xi\right\}dx$ 中交换积分次序就可以看出(11)是正确的.

注 在上述意义下,缓和分布的 Fourier 变换是通常函数的 Fourier 变换的推广.

命题 4 如果我们定义

$$\check{f}(x)=f(-x),\tag{12}$$

则前面的 §1 中的 Fourier 积分定理可以表示为

$$\hat{\hat{f}}=\check{f},\quad f\in\mathfrak{S}(R^n).\tag{13}$$

系 1 (Fourier 积分定理) Fourier 积分定理推广到缓和分布的情形是这样的:

$$\hat{\hat{T}}=\check{T},\quad \text{其中}\ \check{T}(\varphi)=T(\check{\varphi}).\tag{14}$$

特别地, Fourier 变换 $T\to\hat{T}$ 把 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 线性地映射到 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 上.

证明 由定义可知

$$\hat{\hat{T}}(\varphi)=T(\hat{\hat{\varphi}})=T(\check{\varphi})=\check{T}(\varphi)\ \text{对一切}\ \varphi\in\mathfrak{S}(R^n)\ \text{成立}.$$

系 2 Fourier 变换 $T\to\hat{T}$ 以及它的逆变换, 对于 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 的弱* 拓扑而言, 是 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 到 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 上的连续线性变换:

$$\begin{cases}\text{对所有的}\ \varphi\in\mathfrak{S}(R^n)\ \text{都有}\ \lim T_h(\varphi)=T(\varphi)\ \text{必导致}\\ \text{对所有的}\ \varphi\in\mathfrak{S}(R^n)\ \text{都有}\ \lim \hat{T}_h(\varphi)=\hat{T}(\varphi).\end{cases}\tag{15}$$

这里, 映射 $T\to\hat{T}$ 的逆映射是用下面给出的逆 Fourier 变换 $T\to\tilde{T}$ 定义的, 即

$$\widetilde{T}(\varphi)=T(\widetilde{\varphi}),\quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n). \tag{10'}$$

例 2

$$\hat{T}_\delta=(2\pi)^{-n/2}T_1,\quad \hat{T}_1=(2\pi)^{n/2}T_\delta. \tag{16}$$

证明 $\hat{T}_\delta(\varphi)=T_\delta(\hat{\varphi})=\hat{\varphi}(0)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}1\cdot\varphi(y)dy=(2\pi)^{-n/2}T_1(\varphi)$,

同时 $T_\delta=\check{\hat{T}}_\delta=\hat{\hat{T}}_\delta=(2\pi)^{-n/2}\hat{T}_1$.

例 3

$$\widehat{(\partial T/\partial x_j)}=ix_j\hat{T}, \tag{17}$$

$$\widehat{(ix_jT)}=-(\partial\hat{T}/\partial x_j). \tag{18}$$

证明 根据第六章§1的(5), 我们有

$$\begin{aligned}\widehat{(\partial T/\partial x_j)}(\varphi)&=(\partial T/\partial x_j)(\hat{\varphi})=-T(\partial\hat{\varphi}/\partial x_j)=-T(-\widehat{ix_j\varphi(x)})\\&=T(\widehat{ix_j\varphi})=(ix_j\hat{T})(\varphi).\end{aligned}$$

再由第六章§1的(6)可知

$$\begin{aligned}\widehat{(ix_jT)}(\varphi)&=(ix_jT)(\hat{\varphi})=T(ix_j\hat{\varphi})=T(\widehat{\partial\varphi/\partial x_j})=\hat{T}(\partial\varphi/\partial x_j)\\&=-(\partial\hat{T}/\partial x_j)(\varphi).\end{aligned}$$

Plancherel 定理 如果 $f\in L^2(R^n)$, 则 T_f 的 Fourier 变换 $\hat{T}_f$ 可以用某一个函数 $\hat{f}\in L^2(R^n)$ 给出, 亦即

$$\hat{T}_f=T_{\hat{f}},\quad 而\ \hat{f}\in L^2(R^n), \tag{19}$$

并且还有

$$\|\hat{f}\|=\left(\int_{R^n}|\hat{f}(x)|^2dx\right)^{1/2}=\left(\int_{R^n}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}=\|f\|. \tag{20}$$

证明 利用 Schwarz 不等式可得

$$|\hat{T}_f(\varphi)|=|T_f(\hat{\varphi})|=\left|\int_{R^n}f(x)\hat{\varphi}(x)dx\right|\leq\|f\|\|\hat{\varphi}\|=\|f\|\|\varphi\|. \tag{21}$$

上面用到的等式 $\|\hat{\varphi}\|=\|\varphi\|$ 是在前一节的(12)中证明过的. 因此, 根据 Hilbert 空间 $L^2(R^n)$ 中的 F. Riesz 表示定理, 存在唯一确定的 $\hat{f}\in L^2(R^n)$ 使得

$$\begin{aligned}&\hat{T}_f(\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x)\hat{f}(x)dx=T_{\hat{f}}(\varphi),\ 这就是说,\\&对一切\ \varphi\in\mathfrak{S}(R^n)\ 都有\ \int_{R^n}\hat{f}(x)\varphi(x)dx=\int_{R^n}f(x)\hat{\varphi}(x)dx.\end{aligned} \tag{22}$$

此外, 由于在 $L^2(R^n)$ 的拓扑下, $\mathfrak{S}(R^n)$ 在 $L^2(R^n)$ 内是稠密的, 所以由(21)和(22)可知, $\|f\|\geq\|\hat{f}\|$. 因此, 我们有 $\|\hat{\hat{f}}\|\leq\|\hat{f}\|\leq\|f\|$. 另一方面, 由(13)和(22)可知

$\int_{R^n}\hat{\hat{f}}(x)\varphi(x)dx=\int_{R^n}\hat{f}(x)\hat{\varphi}(x)dx=\int_{R^n}f(-x)\varphi(x)dx$ 对一切 $\varphi\in\mathfrak{S}(R^n)$ 都成立; 这就是说,

$$\hat{\hat{f}}(x)=f(-x)=\check{f}(x)\ \text{a.e.} \tag{23}$$

因此 $\|\hat{\hat{f}}\|=\|f\|$, 再结合着 $\|\hat{\hat{f}}\|\leq\|\hat{f}\|\leq\|f\|$, 于是我们就得到了(20).

定义 5 上面所得出的 $\hat{f}(x)\in L^2(R^n)$ 就叫做函数 $f(x)\in L^2(R^n)$ 的 Fourier **变换**.

系 1 对于任何一个 $f\in L^2(R^n)$ 都有

$$\hat{f}(x)=\underset{h\uparrow\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ (2\pi)^{-n/2}\int_{|x|\leq h}e^{-i\langle x,y\rangle}f(y)dy. \tag{24}$$

证明 令

$$f_h(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当} |x|\leqq h \text{时},\\ 0\ \ , & \text{当} |x|>h \text{时}.\end{cases}$$

于是 $\lim_{h\to\infty}\|f_h-f\|=0$. 从而由(20)可知 $\lim_{h\to\infty}\|\hat{f}_h-\hat{f}\|=0$, 这就是说, $\hat{f}(x)=\underset{h\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \hat{f}_h(x)$ a.e., 然而,由(22)可知

$$\int_{R^n}\hat{f}_h(x)\varphi(x)dx=\int_{R^n}f_h(x)\hat{\varphi}(x)dx=\int_{|x|\leq h}f(x)\left\{(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{-i\langle x,y\rangle}\varphi(y)dy\right\}dx,$$

交换积分次序后, 它等于

$$\int_{R^n}(2\pi)^{-n/2}\left\{\int_{|x|\leq h}e^{-i\langle x,y\rangle}f(x)dx\right\}\varphi(y)dy,$$

因为由 Schwarz 不等式可以看出, $f_h(x)$ 在 $|x|\leqq h$ 上是可积的, 所以 $\hat{f}_h(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{|x|\leq h}e^{-i\langle x,y\rangle}f(y)dy$ a.e., 从而我们得到(24).

系 2 Fourier 变换 $f\to\hat{f}$ 把 $L^2(R^n)$ 一一对应地映射到 $L^2(R^n)$ 上, 并且

$$(f,g)=(\hat{f},\hat{g})\quad \text{对所有的} f,g\in L^2(R^n) \text{都成立}. \tag{25}$$

证明 象 Fourier 变换 $f\to\hat{f}$ 一样, 由下式确定的逆 Fourier 变换 $f\to\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x)=\underset{h\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ (2\pi)^{-n/2}\int_{|y|\leq h}e^{i\langle x,y\rangle}f(y)dy \tag{26}$$

把 $L^2(R^n)$ 映入 $L^2(R^n)$ 内, 并且有 $\|\tilde{f}\|=\|f\|$. 因此, 我们看见 Fourier 变换 $f\to\hat{f}$ 把 $L^2(R^n)$ 一一对应地映到 $L^2(R^n)$ 上, 并且有 $\|\hat{f}\|=\|f\|$. 因此, 利用 Fourier 变换的线性性质以及

$$(x,y)=4^{-1}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+4^{-1}i(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2),$$

我们就可以得出(25).

Fourier 变换的 Parseval 定理 令 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都属于 $L^2(R^n)$, 又令它们的 Fourier 变换分别是 $\hat{f}_1(u)$ 和 $\hat{f}_2(u)$. 则

$$\int_{R^n}\hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)du=\int_{R^n}f_1(x)f_2(-x)dx, \tag{27}$$

从而有

$$\int_{R^n}\hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)e^{-i\langle u,x\rangle}du=\int_{R^n}f_1(y)f_2(x-y)dy. \tag{28}$$

因此, 如果 $\hat{f}_1(u)$、$\hat{f}_2(u)$ 以及 $\hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)$ 都属于 $L^2(R^n)$, 则 $\hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)$ 是

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}f_1(y)f_2(x-y)dy \tag{29}$$

的 Fourier 变换. 这个结论, 当条件改为 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 以及(29)都属于 $L^2(R^n)$ 时, 也是正确的.

证明 容易看出

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}\overline{f_2(-x)}e^{-i\langle u,x\rangle}dx=\overline{\hat{f}_2(u)},$$

从而利用(25)可得(27). 其次因为 $\overline{f_2(x-y)}$ 作为 y 的函数, 其 Fourier 变换是含有参数 x 的 $\overline{\hat{f}_2(u)e^{i\cdot\langle u,x\rangle}}$, 所以由(25)可得(28). 由(28)和 $\tilde{\hat{f}}=f$ 显然可得出定理的其余结论.

负范数 Sobolev 空间 $W^{k,2}(\Omega)$ 是在第一章 §9 给出过定义的. 令 $f\in W^{k,2}(R^n)$. 因为 $f(x)\in L^2(R^n)$, 所以 f 给出了 R^n 内的一个缓增测度 $|f(x)|dx$. 因此我们可以定义缓和分布 T_f 的 Fourier 变换 $\hat{T}_f$. 由(17)可得

$$\widehat{D^\alpha T_f}=(i)^{|\alpha|}\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}\hat{T}_f.$$

从空间 $W^{k,2}(R^n)$ 的定义可知, 对于 $|\alpha|\leqq k$ 有 $D^\alpha T_f\in L^2(R^n)$. 因此, 利用关于 $L^2(R^n)$ 的 Plancherel 定理可得

$$\|\widehat{D^\alpha T_f}\|_0=\|D^\alpha T_f\|_0,\quad \text{其中的}\|\ \ \|_0\text{是 } L^2(R^n)\text{-范数}.$$

由此, 我们看见 $(1+|x|^2)^{k/2}\hat{T}_f\in L^2(R^n)$, 从而容易证明, 范数 $\|f\|_k=\left(\sum_{|\alpha|\leqq k}\int_{R^n}|D^\alpha T_f|^2dx\right)^{1/2}$ 在下述意义下等价于范数

$$\|(1+|x|^2)^{k/2}\hat{T}_f\|_0=\|f\|_k', \tag{30}$$

即存在两个正的常数 c_1 和 c_2, 使得

$$c_1\leqq\|f\|_k/\|f\|_k'\leqq c_2\quad \text{对每一个 } f\in W^{k,2}(R^n)\text{ 都成立}.$$

因此, 我们可以重新赋予空间 $W^{k,2}(R^n)$ 以范数 $\|f\|_k'$; 这时, $W^{k,2}(R^n)$ 可以定义为这样的 f 的全体, 即 $f\in L^2(R^n)$ 并且 $\|f\|_k'$ 是有限数. $W^{k,2}(R^n)$ 的这种新的说法, 其优点之一是使得我们还可以考虑负指数 k 的情形. 于是, 同 $L^2(R^n)$ 对于通常的 Lebesgue 测度 dx 的情形一样, 我们看见重新赋范后的空间 $W^{k,2}(R^n)$ 的对偶空间是以 $\|f\|_{-k}'$ 作为范数的空间 $W^{-k,2}(R^n)$. 这种想法出自 L. Schwartz[5], 它比 P. Lax[2]引人负范数的时期还要稍微早一点.

§3. 卷　积

对于 $C(R^n)$ 的两个函数 f 和 g, 其中之一具有紧支集, 我们定义其**卷积**(**褶积**)为(参看第六章 §1 对于 $f,g\in\mathfrak{S}(R^n)$ 的情形)

$$(f*g)(x)=\int_{R^n}f(x-y)g(y)dy=\int_{R^n}f(y)g(x-y)dy=(g*f)(x). \tag{1}$$

受到此公式的启发, 我们就把 $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$ 和 $\varphi\in\mathfrak{D}(R^n)$ (或 $T\in\mathfrak{E}(R^n)'$ 和 $\varphi\in\mathfrak{E}(R^n)$) 的**卷积**定义为

$$(T*\varphi)(x)=T_{[y]}(\varphi(x-y)), \tag{2}$$

这里, $T_{[y]}$ 表示我们的分布 T 的检验函数是 y 的函数.

命题 1 $(T*\varphi)(x)\in C^\infty(R^n)$ 并且 $\text{supp}(T*\varphi)\subseteq\text{supp}(T)+\text{supp}(\varphi)$, 这就是说

$$\text{supp}(T*\varphi)\subseteq\{w\in R^n; w=x+y,\ x\in\text{supp}(T),\ y\in\text{supp}(\varphi)\}.$$

此外, 我们还有

$$D^\alpha(T*\varphi)=T*(D^\alpha\varphi)=(D^\alpha T)*\varphi. \tag{3}$$

证明 令 $\varphi\in\mathfrak{D}(R^n)$ (或 $\in\mathfrak{E}(R^n)$). 如果 $\lim\limits_{h\to 0}x^h=x$, 则作为 y 的函数, 在 $\mathfrak{D}(R^n)$ 内 (或在 $\mathfrak{E}(R^n)$内)有 $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(x^h-y)=\varphi(x-y)$. 因此, $T_{[y]}(\varphi(x-y))=(T*\varphi)(x)$对于 x 是连续的. 至于支集的包含关系可用下述事实来证明: 当 T 的支集同 y 的函数 $\varphi(x-y)$ 的支集不相交时, 有 $T_{[y]}(\varphi(x-y))=0$. 下面, 令 e_j 是 R^n 沿 x_j 轴的单位向量并考虑表示式

$$T_{[y]}((\varphi(x+he_j-y)-\varphi(x-y))/h).$$

当 $h\to 0$ 时, 圆括号内的函数作为 y 的函数, 在 $\mathfrak{D}(R^n)$内(或在 $\mathfrak{E}(R^n)$内)收敛于$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x-y)$. 于是, 我们就证明了

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(T*\varphi)(x)=\left(T*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x).$$

此外, 我们还有

$$\left(T*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x)=T_{[y]}\left(-\frac{\partial\varphi(x-y)}{\partial y_j}\right)=\frac{\partial T_{[y]}}{\partial x_j}(\varphi(x-y))=\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}*\varphi\right)(x).$$

命题 2 如果 φ 和 ψ 在 $\mathfrak{D}(R^n)$内, 并且 $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$ (或 $\varphi\in\mathfrak{E}(R^n)$、$\psi\in\mathfrak{D}(R^n)$以及 $T\in\mathfrak{E}(R^n)'$), 则

$$(T*\varphi)*\psi=T*(\varphi*\psi). \tag{4}$$

证明 我们用 Riemann 和

$$f_h(x)=h^n\sum_k\varphi(x-kh)\,\psi(kh)$$

来近似地表示函数$(\varphi*\psi)(x)$, 其中, $h>0$ 而 k 取遍 R^n 中具有整数坐标的点. 这时, 对于每个微分运算 D^α 和每个由 x 组成的紧集,

$$D^\alpha f_h(x)=h^n\sum_k D^\alpha\varphi(x-kh)\,\psi(kh)$$

当 $h\downarrow 0$ 时都对 x 一致收敛于$((D^\alpha\varphi)*\psi)(x)=(D^\alpha(\varphi*\psi))(x)$. 于是我们看见, 在 $\mathfrak{D}(R^n)$内(或在 $\mathfrak{E}(R^n)$内), 有 $\lim\limits_{h\downarrow 0}f_h=\varphi*\psi$. 所以, 根据 T 的线性性质和连续性, 我们有

$$(T*(\varphi*\psi))(x)=\lim_{h\downarrow 0}(T*f_h)(x)=\lim_{h\downarrow 0}h^n\sum_k(T*\varphi)(x-kh)\,\psi(kh)=((T*\varphi)*\psi)(x).$$

定义 设 $\varphi\in\mathfrak{D}(R^n)$ 是非负的且$\int_{R^n}\varphi dx=1$ 和 $\mathrm{supp}(\varphi)\subseteq\{x\in R^n; |x|\leq 1\}$. 例如, 我们可以作

$$\varphi(x)=\exp(1/(|x|^2-1))\Big/\int_{|x|<1}\exp(1/(|x|^2-1))dx, \text{ 如果 } |x|<1;$$
$$=0, \text{ 如果 } |x|\geq 1.$$

记 $\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ 为 $\varphi_\varepsilon(x)$, 其中的 $\varepsilon>0$, 并把 $T*\varphi_\varepsilon$ 叫做 $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$ (或 $\in\mathfrak{E}(R^n)'$) 通过 $\varphi_\varepsilon(x)$实现的正则化(参看第一章 § 1).

定理1 设 $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$ (或 $\mathfrak{E}(R^n)'$). 则在 $\mathfrak{D}(R^n)'$ (或在 $\mathfrak{E}(R^n)'$) 的弱* 拓扑下, 有 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(T*\varphi_\varepsilon)=T$. 在这种意义下, φ_ε 叫做一个**近似单位**.

为了证明这个定理, 我们需要用到

引理 对于任何一个 $\psi\in\mathfrak{D}(R^n)$ (或 $\in\mathfrak{E}(R^n)$), 在 $\mathfrak{D}(R^n)$ 内 (或在 $\mathfrak{E}(R^n)$ 内), 都有 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\psi*\varphi_\varepsilon=\psi$.

证明 首先, 我们注意到 $\mathrm{supp}(\psi*\varphi_\varepsilon)\subseteq\mathrm{supp}(\psi)+\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon)=\mathrm{supp}(\psi)+\varepsilon$. 由(3), 我们有 $D^\alpha(\psi*\varphi_\varepsilon)=(D^\alpha\psi)*\varphi_\varepsilon$. 因此, 我们需要证明, 在 x 的任一紧集上, $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(\psi*\varphi_\varepsilon)(x)=\psi(x)$ 一致地成立. 然而, 由于 $\int\varphi_\varepsilon(y)dy=1$, 从而有

$$(\psi*\varphi_\varepsilon)(x)-\psi(x)=\int_{R^n}\{\psi(x-y)-\psi(x)\}\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

所以, 根据 $\varphi_\varepsilon(x)\geqq 0$, $\int_{R^n}\varphi_\varepsilon(y)dy=1$ 以及 $\psi(x)$ 在 x 的任一紧区间上的一致连续性, 我们就得到了引理.

定理1的证明 由于 $\check{\psi}(x)=\psi(-x)$, 所以有

$$T(\psi)=(T*\check{\psi})(0). \tag{5}$$

因此, 我们需要证明 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}((T*\varphi_\varepsilon)*\check{\psi})(0)=(T*\check{\psi})(0)$. 然而, 在(4)中已经证明过 $(T*\varphi_\varepsilon)*\check{\psi}=T*(\varphi_\varepsilon*\check{\psi})$, 从而由(5)可知 $(T*(\varphi_\varepsilon*\check{\psi}))(0)=T((\varphi_\varepsilon*\check{\psi})^\vee)$. 因此, 根据引理, 我们就得到 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(T*(\varphi_\varepsilon*\check{\psi}))(0)=T((\check{\psi})^\vee)=T(\psi)$.

下面我们要证明一个定理, 它触及了卷积运算的实质.

定理2 (L. Schwartz) 设 L 是由 $\mathfrak{D}(R^n)$ 入 $\mathfrak{E}(R^n)$ 内的一个连续的线性映射, 使得

$$L\tau_h\varphi=\tau_h L\varphi \quad \text{对任何 } h\in R^n \text{ 和 } \varphi\in\mathfrak{D}(R^n) \text{ 都成立}, \tag{6}$$

其中, 平移算子 τ_h 的定义为

$$\tau_h\varphi(x)=\varphi(x-h). \tag{7}$$

这时, 存在唯一确定的 $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$ 使得 $L\varphi=T*\varphi$. 反之, 对于任何一个 $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$ 都可以通过 $L\varphi=T*\varphi$ 来定义一个由 $\mathfrak{D}(R^n)$ 入 $\mathfrak{E}(R^n)$ 内的连续线性映射 L 且 L 还满足(6).

证明 因为 $\varphi\to\check{\varphi}$ 是 $\mathfrak{D}(R^n)$ 到 $\mathfrak{D}(R^n)$ 上的一个连续线性映射, 所以线性映射 $T:\check{\varphi}\to(L\varphi)(0)$ 定义了一个分布 $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$. 于是由(5)可知, $(L\varphi)(0)=T(\check{\varphi})=(T*\varphi)(0)$. 如果我们用 $\tau_h\varphi$ 代替 φ 并利用条件(6), 则我们得到 $(L\varphi)(h)=(T*\varphi)(h)$. 定理2的"反之"那部分, 可以用(2)、命题1和(5)容易地予以证明.

系 令 $T_1\in\mathfrak{D}(R^n)'$ 和 $T_2\in\mathfrak{E}(R^n)'$. 这时, 卷积 T_1*T_2 可以通过下述由 $\mathfrak{D}(R^n)$ 入 $\mathfrak{E}(R^n)$ 内的连续线性映射 L 来定义:

$$(T_1*T_2)*\varphi=L(\varphi)=T_1*(T_2*\varphi), \quad \varphi\in\mathfrak{D}(R^n). \tag{8}$$

证明 由于 $\mathrm{supp}(T_2)$ 是紧的, 所以映射 $\varphi\to T_2*\varphi$ 是由 $\mathfrak{D}(R^n)$ 入 $\mathfrak{D}(R^n)$ 内的连续线性映射.

因此.映射 $\varphi\to T_1*(T_2*\varphi)$ 是由 $\mathfrak{D}(R^n)$ 入 $\mathfrak{E}(R^n)$ 内的连续线性映射. 容易验证,这里,相应的 L 满足条件(6).

注 由(4),我们看见上述卷积 T_1*T_2 的定义同前面关于 T_2 是 $\in\mathfrak{D}(R^n)$ 的函数时的定义是一致的. 需要指出的是,我们也可以把 T_1*T_2 定义为

$$(T_1*T_2)(\varphi)=(T_{1(x)}\times T_{2(y)})(\varphi(x+y)),\quad \varphi\in\mathfrak{D}(R^n), \tag{8'}$$

其中,$T_{1(x)}\times T_{2(y)}$ 是 T_1 同 T_2 的张量积. 见 L. Schwartz[1].

定理 3 令 $T_1\in\mathfrak{D}(R^n)'$ 和 $T_2\in\mathfrak{E}(R^n)'$. 这时,我们可以通过下述由 $\mathfrak{D}(R^n)$ 入 $\mathfrak{E}(R^n)$ 内的连续线性映射 L:

$$\varphi\to T_2*(T_1*\varphi)$$

来定义另一种"卷积"$T_2\boxed{*}T_1$,亦即 $(T_2\boxed{*}T_1)*\varphi=L(\varphi)$, $\varphi\in\mathfrak{D}(R^n)$. 这时,我们可以证明 $T_2\boxed{*}T_1=T_1*T_2$,从而卷积是可交换的,而不论它是定义为 T_1*T_2,还是定义为 $T_2\boxed{*}T_1$.

证明 映射 $\varphi\to T_1*\varphi$ 是由 $\mathfrak{D}(R^n)$ 入 $\mathfrak{E}(R^n)$ 内的连续线性映射. 因此,映射 $\varphi\to T_2*(T_1*\varphi)$ 是由 $\mathfrak{D}(R^n)$ 入 $\mathfrak{E}(R^n)$ 内的连续线性映射. 所以 $T_2\boxed{*}T_1$ 是完全确定的. 其次,对任何 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{D}(R^n)$ 都有

$$\begin{aligned}(T_1*T_2)*(\varphi_1*\varphi_2)&=T_1*(T_2*(\varphi_1*\varphi_2))=T_1*((T_2*\varphi_1)*\varphi_2)\\&=T_1*(\varphi_2*(T_2*\varphi_1))=(T_1*\varphi_2)*(T_2*\varphi_1),\end{aligned}$$

上式利用了函数卷积的可交换性以及命题 2,而可以引用命题 2 的依据是,因为 $T_2\in\mathfrak{E}(R^n)'$,从而 $\operatorname{supp}(T_2*\varphi_1)$ 是紧集. 类似地,我们得到

$$\begin{aligned}(T_2\boxed{*}T_1)*(\varphi_1*\varphi_2)&=T_2*(T_1*(\varphi_1*\varphi_2))=T_2*((T_1*\varphi_2)*\varphi_1)\\&=T_2*(\varphi_1*(T_1*\varphi_2))=(T_2*\varphi_1)*(T_1*\varphi_2).\end{aligned}$$

因此,$(T_1*T_2)*(\varphi_1*\varphi_2)=(T_2\boxed{*}T_1)*(\varphi_1*\varphi_2)$,从而根据(5)以及前面的引理,我们得知,对所有的 $\varphi\in\mathfrak{D}(R^n)$ 都有 $(T_1*T_2)(\varphi)=(T_2\boxed{*}T_1)(\varphi)$,这就是说 $(T_1*T_2)=(T_2\boxed{*}T_1)$.

系 如果所有的 T_j,除一个以外,都具有紧支集,则

$$T_1*(T_2*T_3)=(T_1*T_2)*T_3, \tag{9}$$

此外还有

$$D^\alpha(T_1*T_2)=(D^\alpha T_1)*T_2=T_1*(D^\alpha T_2). \tag{10}$$

证明 根据(5)和 T_1*T_2 的定义,我们有

$$\begin{aligned}(T_1*(T_2*T_3))(\varphi)&=((T_1*(T_2*T_3))*\check{\varphi})(0)=(T_1*((T_2*T_3)*\check{\varphi}))(0)\\&=(T_1*(T_2*(T_3*\check{\varphi})))(0)\end{aligned}$$

以及类似地有

$$((T_1*T_2)*T_3)(\varphi)=(T_1*(T_2*(T_3*\check{\varphi})))(0),$$

因此(9)成立.

(10)的证明如下. 由(3),我们注意到

$$(D^\alpha T_\delta)*\varphi=T_\delta*(D^\alpha\varphi)=D^\alpha(T_\delta*\varphi)=D^\alpha\varphi, \tag{11}$$

由它可得

$$(D^\alpha T)*\varphi = T*(D^\alpha \varphi) = T*((D^\alpha T_\delta)*\varphi) = (T*D^\alpha T_\delta)*\varphi$$

由(5)可知上式表明

$$D^\alpha T = (D^\alpha T_\delta)*T. \tag{12}$$

因此，利用可交换性(定理 3)和可结合性(9)，可得

$$\begin{aligned} D^\alpha(T_1*T_2) &= (D^\alpha T_\delta)*(T_1*T_2) = ((D^\alpha T_\delta)*T_1)*T_2 = (D^\alpha T_1)*T_2 \\ &= (D^\alpha T_\delta)*(T_2*T_1) = ((D^\alpha T_\delta)*T_2)*T_1 = (D^\alpha T_2)*T_1. \end{aligned}$$

卷积的 Fourier 变换 我们首先来证明一个定理，在下一节中它将被改进为 Paley-Wiener 定理.

定理 4 分布 $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$ 的 Fourier 变换是下述函数，即

$$\hat{T}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} T_{[x]}(e^{-i\langle x,\xi\rangle}). \tag{13}$$

证明 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，正则化 $T_\varepsilon = T*\varphi_\varepsilon$，在 $\mathfrak{E}(R^n)'$ 的弱* 拓扑下，趋于 T，当然，在 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 的弱* 拓扑下就更是这样了. 这一事实可由 $(T*\varphi_\varepsilon)(\psi) = (T*(\varphi_\varepsilon*\check{\psi}))(0) = T_{[x]}((\varphi_\varepsilon*\check{\psi})(-x))$ 和引理看出来. 因此，由 Fourier 变换在 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 的弱*拓扑下的连续性可知，在 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 的弱*拓扑下有 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\widehat{(T*\varphi_\varepsilon)} = \hat{T}$. 这时，对于用 $(T*\varphi_\varepsilon)(x)$ 定义的分布来说，公式(13)是显然的. 因此

$$(2\pi)^{n/2}\widehat{(T*\varphi_\varepsilon)}(\xi) = (T*\varphi_\varepsilon)_{[x]}(e^{-i\langle x,\xi\rangle}),$$

由(5)可知，它 $= (T_{[x]}*(\varphi_\varepsilon*e^{-i\langle x,\xi\rangle}))(0) = T_{[x]}(\check{\varphi}_\varepsilon*e^{-i\langle x,\xi\rangle})$. 当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，最后这个表示式，在 n 维复空间的点 ξ 的任一有界集上，关于 ξ 一致地趋于 $T_{[x]}(e^{i\langle x,\xi\rangle})$. 这就证明了定理 4.

定理 5 如果我们把一个分布 $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$ 同一个函数 $\varphi \in \mathfrak{S}(R^n)$ 的卷积定义为 $(T*\varphi)(x) = T_{[y]}(\varphi(x-y))$，则由 $\mathfrak{S}(R^n)$ 入 $\mathfrak{E}(R^n)$ 内的线性映射 $L: \varphi \to T*\varphi$ 可以利用连续性以及平移不变性 $\tau_h L = L\tau_h$ 来表征.

证明 类似定理 2 的证明.

定理 6 如果 $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$ 而 $\varphi \in \mathfrak{S}(R^n)$，则

$$\widehat{(T*\varphi)} = (2\pi)^{n/2}\hat{\varphi}\hat{T}. \tag{14}$$

如果 $T_1 \in \mathfrak{S}(R^n)'$ 而 $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$，则

$$\widehat{(T_1*T_2)} = (2\pi)^{n/2}\hat{T}_2\cdot\hat{T}_1, \tag{15}$$

(15)式是有意义的，因为在前面的定理 4 中已经证明过 $\hat{T}_2$ 是一个函数.

证明 令 $\psi \in \mathfrak{S}(R^n)$. 于是根据第六章 § 1 的(13)，$\hat{\varphi}\cdot\psi$ 的 Fourier 变换等于 $(2\pi)^{-n/2}\hat{\hat{\varphi}}*\hat{\psi} = (2\pi)^{-n/2}\check{\varphi}*\hat{\psi}$. 因此

$$\begin{aligned} \widehat{(T*\varphi)}(\psi) &= (T*\varphi)(\hat{\psi}) = ((T*\varphi)*\check{\hat{\psi}})(0) = (T*(\varphi*\check{\hat{\psi}}))(0) \\ &= T((\varphi*\check{\hat{\psi}})^\vee) = T(\check{\varphi}*\hat{\psi}) = T((2\pi)^{n/2}(\hat{\varphi}\cdot\psi)^\wedge) \\ &= (2\pi)^{n/2}\hat{T}(\hat{\varphi}\psi) = (2\pi)^{n/2}\hat{\varphi}\hat{T}(\psi), \end{aligned}$$

这就证明了(14).

令 ψ_ε 是正则化 $T_2*\varphi_\varepsilon$. 这时，由(14)可知，$T_1*\psi_\varepsilon = T_1*(T_2*\varphi_\varepsilon) = (T_1*T_2)*\varphi_\varepsilon$ 的 Fourier 变

换等于

$$(2\pi)^{n/2}\hat{T}_1\cdot\hat{\psi}_\varepsilon=(2\pi)^{n/2}\hat{T}_1\cdot(2\pi)^{n/2}\hat{T}_2\cdot\hat{\varphi}_\varepsilon=(2\pi)^{n/2}(\widehat{T_1*T_2})\cdot\hat{\varphi}_\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\downarrow0$ 并利用 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow0}\hat{\varphi}_\varepsilon(x)=1$，于是我们就得到(15)。

§4. Paley-Wiener 定理. 单边 Laplace 变换

$C_0^\infty(R^n)$中的函数的Fourier变换可以用**关于函数的 Paley-Wiener 定理**来描绘：n个复变元$\zeta_j=\xi_j+i\eta_j(j=1,2,\cdots,n)$的一个整全纯函数$F(\zeta)=F(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$是某个函数$f\in C_0^\infty(R^n)$(这里，supp$(f)$含于$R^n$的球$|x|\leq B$内)的 Fourier-Laplace 变换

$$F(\zeta)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{-i\langle\zeta,x\rangle}f(x)dx, \tag{1}$$

当且仅当，对每一个整数N都存在正的常数C_N，使得

$$|F(\zeta)|\leq C_N(1+|\zeta|)^{-N}e^{B|Im\zeta|}. \tag{2}$$

证明 必要性是显然的. 事实上，利用分部积分法可以得到

$$\prod_{j=1}^n(i\zeta_j)^{\beta_j}F(\zeta)=(2\pi)^{-n/2}\int_{|x|\leq B}e^{-i\langle\zeta,x\rangle}D^\beta f(x)dx.$$

充分性. 我们定义

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{i\langle x,\xi\rangle}F(\xi)d\xi. \tag{3}$$

这时，同对属于$\mathfrak{S}(R^n)$的函数的讨论一样，我们可以证明$f(x)$的Fourier变换$\hat{f}(\xi)$等于$F(\xi)$且$f\in C^\infty(R^n)$. 最后这个结论可以利用微分关系式：

$$D^\beta f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{i\langle x,\xi\rangle}\prod_{j=1}^n(i\xi_j)^{\beta_j}F(\xi)d\xi \tag{4}$$

以及条件(2)予以证明. 条件(2)以及 Cauchy 积分定理使我们能够把(3)中的实积分区域转换为复区域，使得对形如$\eta=\alpha x/|x|$的任一实的η，其中$\alpha>0$，总有

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{i\langle x,\xi+i\eta\rangle}F(\xi+i\eta)d\xi. \tag{3'}$$

因此，在取$N=n+1$后，我们就得到

$$|f(x)|\leq C_Ne^{B|\eta|-\langle x,\eta\rangle}(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}(1+|\xi|)^{-N}d\xi.$$

如果$|x|>B$，利用令$\alpha\uparrow+\infty$，我们就得到$f(x)=0$. 因此，supp$(f)\subseteq\{x\in R^n;|x|\leq B\}$.

上述定理也可以推广到具有紧支集的分布. 这时，我们有

关于分布$\in\mathfrak{E}(R^n)'$的 Paley-Wiener 定理(L. Schwartz) n个复变量$\zeta_j=\xi_j+i\eta_j(j=1,2,\cdots,n)$的一个整全纯函数$F(\zeta)=F(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$是某个分布$T\in\mathfrak{E}(R^n)'$的 Fourier-Laplace 变换，当且仅当，对于某些正的常数B、N和C，有

$$|F(\zeta)|\leqq C(1+|\zeta|)^Ne^{B|Im\zeta|}. \tag{5}$$

证明 根据下述事实(第一章§13的定理2)必要性是显然的，即如果$T\in\mathfrak{E}(R^n)'$，则存在正

的常数 C、N 和 B, 使得

$$|T(\varphi)| \leqq C \sum_{|\beta| \leq N} \sup_{|x| \leq B} |D^\beta \varphi(x)| \text{ 对每一个 } \varphi \in \mathfrak{C}(R^n) \text{ 都成立.}$$

这时, 我们只须取 $\varphi(x) = e^{-i\langle x, t\rangle}$ 并利用上一节的(13)式就能得出必要性.

充分性. 因为 $F(\xi)$ 在 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 内, 所以它是某个分布 $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$ 的 Fourier 变换. 根据前一节的(14), 正则化 $T_\varepsilon = T * \varphi_\varepsilon$ 的 Fourier 变换是 $(2\pi)^{n/2}\hat{T}\cdot\hat{\varphi}_\varepsilon$. 又因为 $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon)$ 在 R^n 的球 $|x| \leqq \varepsilon$ 内, 所以由前一节的定理可知

$$|\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)| \leqq C' \cdot e^{\varepsilon |Im \xi|}.$$

此外, 因为 $\hat{T}$ 是由函数 $F(\xi)$ 定义的, 所以我们看见, $(2\pi)^{n/2}\hat{T}\cdot\hat{\varphi}_\varepsilon$ 是由函数 $(2\pi)^{n/2}F(\xi)\cdot\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)$ 定义的, 当后者解析地延拓到 n 维复空间后, 它满足(5)那种类型的估计式, 只不过把(5)中的 B 换为 $B+\varepsilon$ 而已. 因此, 由前面的定理可知, $T_\varepsilon = T * \varphi_\varepsilon$ 的支集含于 R^n 的球 $|x| \leqq B+\varepsilon$ 内. 于是, 令 $\varepsilon \downarrow 0$ 并利用上一节的引理, 我们看见 $\mathrm{supp}(T)$ 在 R^n 的球 $|x| \leqq B$ 内.

注 上面给出的两个 Paley-Wiener 定理的表述和证明都出自 L. Hörmander[2].

Fourier 变换和单边 Laplace 变换. 令 $g(t) \in L^2(0, \infty)$. 这时, 对于 $x > 0$, 总有

$$g(t)e^{-tx} \in L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty),$$

这可以从 Schwarz 不等式看出来. 因此, 由 Plancherel 定理可知, 对于 Fourier 变换

$$f(x+iy) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty g(t)e^{-tx}e^{-ity}\,dt = (2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty g(t)e^{-t(x+iy)}\,dt \quad (x > 0), \tag{6}$$

我们有不等式

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x+iy)|^2 dy = \int_0^\infty |g(t)|^2 e^{-2tx}\,dt \leqq \int_0^\infty |g(t)|^2\,dt. \tag{7}$$

函数 $f(x+iy)$ 在右半平面 $Re(z) = x > 0$ 内关于 $z = x+iy$ 是全纯的, 实际上, 当 $Re(z) = x > 0$ 时, 在注意到 $g(t)te^{-tx}$ 作为 t 的函数属于 $L^1(0, \infty)$ 和 $L^2(0, \infty)$ 之后, 对(6)在积分号下微分就可以得出上述结论. 于是我们就证明了

定理 1 令 $g(t) \in L^2(0, \infty)$. 这时, 单边 Laplace 变换

$$f(z) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty g(t)e^{-tz}\,dt \quad (Re(z) > 0) \tag{6'}$$

属于所谓的 Hardy-Lebesgue 类 $H^2(0)$, 这就是说, (i) $f(z)$ 在右半平面 $Re(z) > 0$ 内是全纯的; (ii) 对每一个固定的 $x > 0$, $f(x+iy)$ 作为 y 的函数在下述意义下属于 $L^2(-\infty, \infty)$, 即

$$\sup_{x>0}\left(\int_{-\infty}^\infty |f(x+iy)|^2 dy\right) < \infty. \tag{7}$$

逆定理是成立的, 就是说, 我们有

定理 2 (Paley-Wiener) 令 $f(z) \in H^2(0)$. 则在下述意义下存在 $f(x+iy)$ 的边界函数 $f(iy) \in L^2(-\infty, \infty)$:

$$\lim_{x \downarrow 0}\int_{-\infty}^\infty |f(iy) - f(x+iy)|^2 dy = 0 \tag{8}$$

且它的逆 Fourier 变换

$$g(t)=(2\pi)^{-1/2}\ \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-N}^{N}f(iy)e^{ity}dy \tag{9}$$

当 $t<0$ 时为零，此外，$f(z)$ 还可以由 $g(t)$ 的单边 Laplace 变换得出来.

证明 根据 $L^2(-\infty,\infty)$ 的局部弱紧性，我们知道，存在某个序列 $\{x_n\}$ 和某个函数 $f(iy)\in L^2(-\infty,\infty)$，使得

$$x_n\downarrow 0\ \text{以及弱-}\lim_{n\to\infty}f(x_n+iy)=f(iy).$$

这时，对任一 $\delta>0$，总存在某个序列 $\{N_k\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}N_k=\infty\ \text{以及}\ \lim_{k\to\infty}\int_{0+}^{\delta}|f(x\pm iN_k)|^2dx=0,$$

这可以从下式看出来，即

$$\int_{-N}^{N}\left\{\int_{0+}^{\delta}\left|f(x+iy)\right|^2dx\right\}dy\le\int_{0+}^{\delta}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+iy)\right|^2dy\right\}dx<\infty\quad(\text{对一切 }N>0\text{ 都成立}).$$

因此，由 Schwarz 不等式可知

$$\lim_{k\to\infty}\int_{0+}^{\delta}|f(x\pm iN_k)|dx=0. \tag{10}$$

由此，我们可以得到

$$f(z)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(it)}{z-it}dt\qquad(Re(z)>0). \tag{11}$$

(11)式的证明如下．根据 Cauchy 积分表示定理，我们得到

$$f(z)=(2\pi i)^{-1}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\qquad(Re(z)>0), \tag{12}$$

其中的积分路径 C 由以下线段组成，即

$$\overrightarrow{x_0-iN_k,\ x_1-iN_k},\qquad\overrightarrow{x_1-iN_k,\ x_1+iN_k},$$

$$\overrightarrow{x_1+iN_k,\ x_0+iN_k},\qquad\overrightarrow{x_0+iN_k,\ x_0-iN_k}$$

$$(x_0<Re(z)<x_1,\quad -N_k<Im(z)<N_k),$$

因而闭围道 C 就包围了点 z．因此，令 $k\to\infty$ 并注意到(10)以后，我们就得到

$$f(z)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x_0+it)}{z-(x_0+it)}dt+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x_1+it)}{(x_1+it)-z}dt.$$

当 $x_1\to\infty$ 时，右端第二项趋于 0，这可由(7′)和 Schwarz 不等式看出来．在右端第一项中，我们令 $x_0=x_n$，然后再让 $n\to\infty$，我们就得到了(11)．类似地，我们得到

$$0=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(it)}{it-z}dt\qquad(Re(z)<0). \tag{13}$$

对于 $Re(z)>0$，令

$$h(x)=0(\text{当 }x<0\text{ 时});\quad h(x)=e^{-zx}(\text{当 }x>0\text{ 时}).$$

于是我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{ixt}dx=\int_0^{\infty}e^{ixt-zx}dx=(z-it)^{-1},$$

从而，由 Plancherel 定理可知

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ (2\pi)^{-1}\int_{-N}^{N}\frac{e^{-itx}}{z-it}\,dt=\begin{cases}0 & (\text{对于 } x<0)\\ e^{-zx} & (\text{对于 } x>0)\end{cases}\qquad \text{当 } Re(z)>0 \text{ 时}. \tag{14}$$

类似地，我们有

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ (2\pi)^{-1}\int_{-N}^{N}\frac{e^{-itx}}{z-it}\,dt=\begin{cases}-e^{-zx} & (\text{对于 } x<0)\\ 0 & (\text{对于 } x>0)\end{cases}\qquad \text{当 } Re(z)<0 \text{ 时}. \tag{14'}$$

所以，在把第六章 § 2 的 Parseval 定理(27)应用到(11)之后，我们就得到了所需的结果，即 $f(z)$ 是由(9)给出的 $g(t)$ 的单边 Laplace 变换．把该 Parseval 定理应用到(13)，我们还可以看出，当 $t<0$ 时 $g(t)=0$.

最后，我们来证明(8)是正确的．把(11)和(13)相加，我们看见 $f(z)$ 可以表为 Poisson 积分，即对任何 $x>0$ 总有

$$f(z)=f(x+iy)=\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(it)}{(t-y)^2+x^2}\,dt. \tag{15}$$

由于

$$\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(t-y)^2+x^2}=1, \tag{16}$$

所以我们有

$$|f(x+iy)-f(iy)|\leq\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f^+(s+y)-f^+(y)|}{s^2+x^2}ds,\quad \text{其中},\ f^+(y)=f(iy),$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+iy)-f(iy)\right|^2dy&\leqq\left(\frac{x}{\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f^+(s+y)-f^+(y)|}{s^2+x^2}\,ds\right\}^2dy\\&\leqq\frac{x^2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{s^2+x^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f^+(s+y)-f^+(y)|^2}{s^2+x^2}\,ds\right)dy\\&=\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{s^2+x^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^+(s+y)-f^+(y)\right|^2dy\right\}=\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(f^+;s)}{s^2+x^2}\,ds,\end{aligned}$$

其中，$0\leq\mu(f^+;s)\leq4\|f^+\|^2$ 并且 $\mu(f^+;s)$ 对 s 是连续的，而当 $s=0$ 时，其值为 0.

为了证明右端当 $x\downarrow0$ 时趋于零，我们对任一 $\varepsilon>0$ 取某个 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $|s|\leq\delta$ 时，$\mu(f^+;s)\leqq\varepsilon$．我们把该积分分解为

$$\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(f^+;s)}{s^2+x^2}\,ds=\frac{x}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right\}=I_1+I_2+I_3.$$

由(16)，我们有 $|I_2|\leqq\varepsilon$，同时 $|I_j|\leqq4\pi^{-1}\|f^+\|^2\cdot\cot^{-1}(\delta/x)$ $(j=1,3)$．因此，当 $x\downarrow0$ 时，左端那个积分必定趋于零．于是定理得证．

注 1 关于原始的 Paley-Wiener 定理，见 Paley-Wiener[1]．关于缓和分布的单边 Laplace 变换，见 L. Schwartz[2].

注 2 在 M. Sato[1]中，引入了一个有趣的想法，即把一个"广义函数"定义为"某个解析函数的边界值"．他的想法可以叙述如下．令 $\mathfrak{B}$ 是这样的函数 $\varphi(z)$ 的全体，即 $\varphi(z)$ 在复 z 平面的

上半平面和下半平面内都是有定义的和正则的,而令 $\mathfrak{R}$ 是在整个复 z 平面内正则的函数的全体.这时,$\mathfrak{B}$ 关于函数的和与函数的乘法是一个环,而是 $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{B}$ 的一个子环. Sato 把含有 $\varphi(z)$ 的剩余类(mod$\mathfrak{R}$) 叫做在实轴 R^1 上由 $\varphi(z)$ 所定义的"广义函数"$\hat{\varphi}(x)$. "广义函数 $\hat{\varphi}(x)$ 的广义导数 $d\hat{\varphi}(x)/dx$" 自然地定义为含有 $d\varphi(z)/dz$ 的剩余类 (mod$\mathfrak{R}$). 这时, "delta 函数 $\hat{\delta}(x)$" 是含有 $-(2\pi i)^{-1}z^{-1}$ 的剩余类(mod$\mathfrak{R}$). Sato 的"多变元的广义函数" 的理论可以有下述的有趣的拓扑解释. 设M是一个 n 维实解析流形,又设 X 是M的一个复值化流形. 则以 X 中的正则函数芽作为系数的第 n 个相对上同调群 $H^n(X \bmod (X-M))$ 给出了 "M上的广义函数" 的概念. 这就是说,相对上同调类是"广义函数"的一个自然的定义.

注 3 有关广义函数的 Fourier 变换的更详细的论述,见 L. Schwartz[1]和Gelfand-Šilov [1]. 在后一本书中引入了很多有趣的,但不同于 $\mathfrak{D}(R^n)$、$\mathfrak{S}(R^n)$以及 $\mathfrak{D}_M(R^n)$的基本函数类来定义广义函数; 相应于这种广义函数的 Fourier 变换在 Gelfand-Šilov 中也有所讨论. 还可以参看 A. Friedman[1]和 L. Hörmander[6].

§5. Titchmarsh 定理

定理(E. C. Titchmarsh) 设 $f(x)$和 $g(x)$是实值或复值的连续函数,而 $0\leqq x<\infty$, 如果它们使得

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(x-y)g(y)dy=\int_0^x g(x-y)f(y)dy=(g*f)(x) \tag{1}$$

恒等于零. 则 $f(x)$或 $g(x)$之中至少有一个恒等于零.

这个重要定理有各种各样的证明,例如, 可以用 Titchmarsh[1]中的方法, 也可以用 Crum 和 Dufresnoy 的方法. 下述证明在这种意义下是初等的,即它不引用复变函数论. 此方法属于 Ryll-Nardzewski[1],而是在 J. Mikusiński[1]中给出的.

引理 1 (Phragmén) 如果对于 $0\leqq u\leqq T$, $g(u)$是连续的,又如果 $0\leqq t\leqq T$,则

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^T e^{kx(t-u)}g(u)du=\int_0^t g(u)du. \tag{2}$$

证明 我们有$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(k!)^{-1}e^{kx(t-u)}=1-\exp(-e^{x(t-u)})$,且对于固定的 x 和 t, 左端的级数当 $0\leqq u\leqq T$ 时,对 u 是一致收敛的. 因此, (2)中的求和符号, 可以移入积分号内, 而利用 Lebesgue Fatou 引理,我们就得到(2).

引理 2 如果对于 $0\leqq t\leqq T$, $f(t)$是连续的,又如果对于$n=1, 2, \cdots$ 有$\left|\int_0^T e^{nt}f(t)dt\right|\leqq M$, 这里,$M$是一个与 n 无关的正的常数,则当 $0\leqq t\leqq T$ 时,必有 $f(t)=0$.

证明 我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn(t-u)}f(T-u)du\right|\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{kn(t-T)}\left|\int_0^T e^{kn(T-u)}f(T-u)du\right|$$

$$\leqq M(\exp(e^{-n(T-t)})-1).$$

如果 $t<T$，则当 $n\to\infty$ 时，最后这个表示式就趋于零．因此，利用引理 1 并把其中的 $g(u)$ 换为 $f(T-u)$，则我们看到，对于 $0\leqq t\leqq T$ 有 $\int_0^t f(T-u)du=0$．因为 f 是连续的，所以对于 $0\leqq t\leqq T$，有 $f(t)=0$．

系 1 如果对于 $1\leqq x\leqq X$，$g(x)$ 是连续的，又如果存在某个正数 N 使得 $\left|\int_1^X x^n g(x)dx\right|\leqq N$ $(n=1,2,\cdots)$，则当 $1\leqq x\leqq X$ 时，$g(x)=0$．

证明 令 $x=e^t$、$X=e^T$ 以及 $xg(x)=f(t)$，则由引理(2)可知当 $0\leqq t\leqq T$ 时，$f(t)=0$．因此，当 $1\leqq x\leqq X$ 时，$xg(x)=0$，从而当 $1\leqq x\leqq X$ 时，$g(x)=0$．

系 2 (Lerch 定理) 如果对于 $0\leqq t\leqq T$，$f(t)$ 是连续的，又如果 $\int_0^T t^n f(t)dt=0\ (n=1,2,\cdots)$，则当 $0\leqq t\leqq T$ 时，$f(t)=0$．

证明 设 t_0 是开区间 $(0,T)$ 内的任何一个数，又设 $t=t_0x$、$T=t_0X$ 和 $f(t)=g(x)$．则我们得到

$$t_0^{n+1}\int_0^X x^n g(x)dx=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

从而 $\left|\int_1^X x^n g(x)dx\right|=\left|\int_0^1 x^n g(x)dx\right|\leqq\int_0^1|g(x)|dx=N\ (n=1,2,\cdots)$．因此，利用引理 1，我们得到，当 $1\leqq x\leqq X$ 时，$g(x)=0$，从而当 $t_0\leqq t\leqq T$ 时，$f(t)=0$．因为 t_0 是 $(0,T)$ 内的任意一点，所以当 $0\leqq t\leqq T$ 时，必定有 $f(t)=0$．

Titchmarsh 定理的证明 我们首先对 $f=g$ 这种特殊情形来证明此定理，这就是说，如果 $f(t)$ 是连续的，且当 $0\leqq t\leqq 2T$ 时有 $(f*f)(t)=\int_0^t f(t-u)f(u)du=0$，则当 $0\leqq t\leqq T$ 时，$f(t)=0$．

因为

$$\int_0^{2T} e^{n(2T-t)}\left(\int_0^t f(u)f(t-u)du\right)dt=0,$$

所以，利用变量代换 $u=T-v$，$t=2T-v-w$，我们就得到

$$\iint_\Delta e^{n(v+w)}f(T-v)f(T-w)dvdw=0,$$

这里，Δ 是 v-w 平面内的三角形区域 $v+w\geqq0$、$v\leqq T$、$w\leqq T$．令 Δ' 是三角形区域 $v+w\leqq0$，$v\geqq -T$、$w\geqq -T$．于是并集 $\Delta+\Delta'$ 就是正方形 $-T\leqq v$，$w\leqq T$．上面的等式表明，$e^{n(v+w)}f(T-v)\times f(T-w)$ 在 $\Delta+\Delta'$ 上的积分等于在 Δ' 上的积分．因为在 $\Delta+\Delta'$ 上的积分为两个单重积分的乘积，而对于在 Δ' 上的积分，我们有 $e^{n(v+w)}\leqq1$．因此

$$\left|\int_{-T}^T e^{nu}f(T-u)\,du\right|^2=\left|\iint_{\Delta+\Delta'}e^{n(v+w)}f(T-v)f(T-w)dv\,dw\right|$$

$$\leqq \iint_{\Delta'} \left| f(T-v) f(T-w) \right| dv\, dw \leqq 2T^2 \cdot A^2,$$

其中，A 是 $|f(t)|$ 在 $0 \leqq t \leqq 2T$ 上的最大值，而 $2T^2$ 是 Δ' 的面积．因此，我们有

$$\left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leqq \sqrt{2}\, T \cdot A,$$

此外还有 $\left| \int_{-T}^{0} e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leqq TA$．所以

$$\left| \int_{0}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right| = \left| \int_{-T}^{T} - \int_{-T}^{0} \right| \leqq \left(1+\sqrt{2}\right) TA \quad (n=1, 2, \cdots),$$

从而由引理 2 可知当 $0 \leqq t \leqq T$ 时，$f(t)=0$.

现在我们来证明一般情形的 Titchmarsh 定理．设当 $0 \leqq t < \infty$ 时，$\int_0^t f(t-u) g(u)\, du = 0$.
因此对于 $0 \leqq t < \infty$，我们有

$$\int_0^t (t-u) f(t-u) g(u)\, du + \int_0^t f(t-u) u g(u)\, du = t \int_0^t f(t-u) g(u)\, du = 0.$$

这可以写为

$$(f_1 * g)(t) + (f * g_1)(t) = 0 \quad (0 \leqq t < \infty),$$

$$\text{其中}\ f_1(t) = t f(t), \quad g_1(t) = t g(t).$$

因此

$$[f * \{g_1 * (f_1 * g + f * g_1)\}](t) = 0,$$

从而

$$[(f * g) * (f_1 * g_1)](t) - [(f * g_1) * (f * g_1)](t) = 0.$$

因此，由 $(f*g)(t)=0$ 可得 $[(f*g_1)*(f*g_1)](t)=0$，从而由前面已经证明过的特殊情形可知，$(f*g_1)(t)=0$，这就是说

$$\int_0^t f(t-u) u g(u)\, du = 0 \quad (0 \leqq t < \infty).$$

从此式出发，类似上述作法，我们得到

$$\int_0^t f(t-u) u^2 g(u)\, du = 0 \quad (0 \leqq t < \infty).$$

反复作下去，我们发现有

$$\int_0^t f(t-u) u^n g(u)\, du = 0 \quad (0 \leqq t < \infty;\ n = 1, 2, \cdots).$$

因此，根据前面证明过的 Lerch 定理，我们得到

$$\text{对于}\ 0 \leqq u \leqq t < \infty;\ \text{有}\ f(t-u) g(u) = 0.$$

如果存在某个 u_0 使 $g(u_0) \neq 0$，则对一切 $t \geqq u_0$ 都有 $f(t-u_0)=0$，亦即对一切 $v \geqq 0$ 都有 $f(v)=0$.
所以，或者是对一切 $v \geqq 0$ 有 $f(v)=0$，或者是对一切 $v \geqq 0$ 有 $g(v)=0$.

§6. Mikusiński 的运算微积法

物理学家 O. Heaviside 在他的"电磁理论"一书(伦敦(1899))中首创了运算微积方法, 他把它成功地应用到与电磁问题有关的线性常微分方程上去了. 在他的方法中出现了某些算子, 而它们的意义并不是十分清楚的. Heaviside 本人对于那些算子作出的解释是难以令人信服的. 在他之后的一些人的解释也不能使人明显看出此方法的适用范围, 因为这种解释是以 Laplace 变换的理论作为基础的. 由 J. Mikusiński 建立的卷积商的理论, 为运算微积提供了一个清楚而又简单的基础, 说明它既能应用于常系数的常微分方程, 又能应用于某些常系数的偏微分方程以及差分方程和积分方程.

卷积商 我们用 C 表示定义在 $0\leq t<\infty$ 上的复值函数 $f(t)$ 的全体. 在本节中我们把这种函数记为 $\{f(t)\}$, 或简记为 f; 而 $f(t)$ 只表示 $f(t)$ 在 t 点的值. 我们把卷积函数 $\left\{\int_0^t f(t-s)g(s)\,ds\right\}$ 记为 $\{f(t)\}\cdot\{g(t)\}$, 或简记为 $f\cdot g$, 亦即

$$\{f(t)\}\cdot\{g(t)\}=\{(f*g)(t)\}=\left\{\int_0^t f(t-s)g(s)\,ds\right\}. \tag{1}$$

正如在第六章§3 中已被证明过的那样, 我们有

$$f\cdot g=g\cdot f \text{ (可交换性)}, \tag{2}$$

$$f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h \text{ (可结合性)}. \tag{3}$$

除卷积乘积 $f\cdot g$ 之外, 我们还用下式定义 f 同 g 之和, 即

$$\{f(t)\}+\{g(t)\}=\{f(t)+g(t)\}, \tag{4}$$

于是我们有分配律

$$h\cdot(f+g)=h\cdot f+h\cdot g. \tag{5}$$

因此, C 关于加法 $f+g$ 和乘法 $f\cdot g$ 是一个环. 此环的零元素是恒等于零的函数; 所以我们就把此函数记为 0. 环 C 没有零因子, 这就是说, 在 C 中, $f\cdot g=0$ 意味着或者是 $f=0$, 或者是 $g=0$. 这是 Titchmarsh 定理的结果. 因此, 对于两个函数 f, $g\in C$ 并且 $g\neq 0$, 我们引入其卷积商 $f/g=\dfrac{f}{g}$ 之后就得到一个可交换域 Q:

$$a/b=c/d \text{ 等价于 } ad=bc, \text{ 而特别地有}$$

$$a/b=c \text{ 等价于 } a=bc, \tag{6}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}, \tag{7}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \tag{8}$$

$$a/b=a\cdot c/b\cdot c \quad (c\neq 0). \tag{9}$$

算子 我们把商 a/b 叫做一个"算子". 任何一个 $a\in C$ 都是一个算子, 因为利用(9), 我们可以使 a 恒等于 $a\cdot b/b\,(b\neq 0)$.

单位算子或 δ 算子 算子 $c/c(c\neq 0)$ 是域 Q 内的乘法单位. 这是因为由(7)和(9), 我们有

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}=\frac{a}{b}. \tag{10}$$

由(6)可知, $c/c=b/b$. 我们把 c/c 叫做单位算子或 δ 算子, 以后, 我们就用 1 来表示此算子:

$$1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}. \tag{11}$$

算子 $1=c/c$ 并不属于 C, 因为如果我们把 c 取为函数$\{1\}$, 这时, $\{1\}/\{1\}=\{f(t)\}\in C$ 意味着 $\{1\}\cdot\{f(t)\}=\left\{\int_0^t 1\cdot f(s)\,ds\right\}=\left\{\int_0^1 f(s)\,ds\right\}=\{1\}$, 这当然是一个矛盾.

积分算子 我们用 h 表示由函数$\{1\}$所确定的算子:

$$h=\{1\}, \tag{12}$$

并把 h 叫做积分算子, 因为, 如上所述, 对于任一 $f\in C$, 我们有

$$h\cdot\{f(t)\}=\{1\}\cdot\{f(t)\}=\left\{\int_0^t f(s)\,ds\right\}. \tag{13}$$

注 前面提到过的 Mikusiński 的书使用记号 l 来表示$\{1\}$. 在本书中我们使用的记号是 h, 这是为了纪念 Heaviside, 也是出于印刷上的习惯. 一个局部可积函数$\{f(t)\}$, $t\geqq 0$, 可以等同于算子$\left\{\int_0^t f(s)\,ds\right\}\Big/h$. 因此, 卷积商是另一种类型的"广义函数".

数量算子 设 α 是任何一个复数, 而$\{\alpha\}$是恒等于 α 的函数. 这时, 算子

$$[\alpha]=\{\alpha\}/\{1\}=\{\alpha\}/h \tag{14}$$

称为一个数量算子, 这是因为我们有

$$[\alpha]+[\beta]=[\alpha+\beta],\quad [\alpha]\cdot[\beta]=[\alpha\beta],\quad [\alpha]\cdot\{f(t)\}=\{\alpha f(t)\}. \tag{15}$$

证明

$$[\alpha]+[\beta]=\frac{\{\alpha\}}{h}+\frac{\{\beta\}}{h}=\frac{\{\alpha+\beta\}}{h}=[\alpha+\beta],$$

$$[\alpha]\cdot[\beta]=\frac{\{\alpha\}\cdot\{\beta\}}{h^2}=\frac{\{\alpha\beta t\}}{h^2}=\frac{h\cdot\{\alpha\beta\}}{h^2}=\frac{\{\alpha\beta\}}{h}=[\alpha\beta],$$

$$[\alpha]\cdot\{f(t)\}=\frac{\{\alpha\}\cdot\{f(t)\}}{h}=\frac{\left\{\int_0^t \alpha f(s)\,ds\right\}}{h}=\frac{h\cdot\{\alpha f(t)\}}{h}=\{\alpha f(t)\}.$$

注 作为一个推论, 我们得到

$$[\alpha]\cdot\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}}=\frac{\{\alpha a(t)\}}{\{b(t)\}}, \tag{16}$$

从而算子$[\alpha]$的作用恰好是 α 倍的乘法. 因此, 我们可以使数量算子$\{1\}/\{1\}$等同于单位算子 1, 而使算子$[\alpha]$等同于数 α.

微分算子 我们把算子 $1/h$ 记为 s:

$$s=1/h=1/\{1\}. \tag{17}$$

s 称为微分算子, 这是因为如果 $f=\{f(t)\}\in C$ 且有连续导数 $f'=\{f'(t)\}$, 则

$$sf=f'+f(0),\ 其中\ f(0)=\{f(0)\}/h. \tag{18}$$

证明 方程

$$\{f(t)\}=\{f(0)\}+\left\{\int_0^t f'(s)\,ds\right\}=h\cdot f(0)+h\cdot\{f'(t)\}$$

的两端同乘以 s, 并利用 $s\cdot h=h\cdot s=1$ 这一事实就可以得到(18).

系 1 如果 $f=\{f(t)\}$ 有连续的第 n 阶导数 $f^{(n)}=\{f^{(n)}(t)\}$, 则

$$f^{(n)}=s^n\cdot f-s^{n-1}\cdot f(0)-s^{n-2}\cdot f'(0)-\cdots-s\cdot f^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0), \tag{19}$$

其中 $f^{(j)}(0)$ 是 $f^{(j)}(0)$ 倍乘法的算子, 亦即 $f^{(j)}(0)=\{f^{(j)}(0)\}/h$.

证明 对于 $n=2$, 我们有

$$s^2\cdot f=s\cdot(s\cdot f)=s(f'+f(0))=s\cdot f'+s\cdot f(0)=f''+f'(0)+s\cdot f(0).$$

至于一般情形, 则可以用归纳法予以证明.

系 2 我们有

$$1/(s-\alpha)=\{e^{\alpha t}\}, \tag{20}$$

并且更一般地, 还有

$$1/(s-\alpha)^n=\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\} \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{21}$$

证明 根据(18), $s\cdot\{e^{\alpha t}\}=\{\alpha e^{\alpha t}\}+1=\alpha\{e^{\alpha t}\}+1$. 于是(20)成立. 而

$$1/(s-\alpha)^2=\{e^{\alpha t}\}\cdot\{e^{\alpha t}\}=\left\{\int_0^t e^{\alpha(t-s)}e^{\alpha s}ds\right\}=\left\{e^{\alpha t}\int_0^t ds\right\}=\left\{\frac{t}{1!}e^{\alpha t}\right\}.$$

应用上述结果来积分常系数线性常微分方程. 我们举例说明应用方法.

例 1 求解方程

$$x''(t)-x'(t)-6x(t)=2,\ x(0)=1,\ x'(0)=0.$$

解法 我们把方程写为算子形式

$$x''(t)-x'(t)-6x(t)=2/s.$$

于是, 由(19)可知

$$s^2\cdot x-s\cdot x(0)-x'(0)-s\cdot x+x(0)-6x=2/s,$$

从而在代入初始条件后, 我们就得到

$$s^2\cdot x-s-s\cdot x+1-6x=2/s,\ 亦即\ (s^2-s-6)\cdot x=s-1+2/s.$$

因此, 由(20)可知

$$x=\frac{s^2-s+2}{s\cdot(s-3)\cdot(s+2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}+\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{s-3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s+2}=\left\{-\frac{1}{3}+\frac{8}{15}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t}\right\}.$$

例 2 令 λ 是一个不为 0 的常数. 求解方程

$$x''(t)+\lambda^2x(t)=0,\ x(0)=\alpha,\ x'(0)=\beta.$$

解法 相应的算子方程是

$$s^2\cdot x-\alpha s-\beta+\lambda^2x=0,\ 亦即\ (s^2+\lambda^2)\cdot x=\alpha s+\beta.$$

于是, 利用展开为部分分式的办法我们得到

$$x=\frac{\alpha s+\beta}{s^2+\lambda^2}=\frac{\gamma}{s+i\lambda}+\frac{\delta}{s-i\lambda},$$

因为 $\alpha s+\beta=\gamma(s-i\lambda)+\delta(s+i\lambda)$, 所以有

$$\gamma=2^{-1}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right),\quad \delta=2^{-1}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right).$$

因此

$$x=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right)\frac{1}{s+i\lambda}+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right)\frac{1}{s-i\lambda}=\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right)e^{-i\lambda t}+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right)e^{i\lambda t}\right\}$$

$$=\left\{\alpha\cos\lambda t+\frac{\beta}{\lambda}\sin\lambda t\right\}.$$

例 3 求解方程组

$$x'(t)-\alpha x(t)-\beta y(t)=\beta e^{\alpha t},\quad y'(t)+\beta x(t)-\alpha y(t)=0,$$

其初始条件为 $x(0)=0$, $y(0)=1$.

解法 解算子方程组

$$s\cdot x-\alpha x-\beta y=\beta/(s-\alpha),\quad s\cdot y-1+\beta x-\alpha y=0,$$

我们得到

$$x=\frac{2\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2},\quad y=\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{(s-\alpha)\cdot((s-\alpha)^2+\beta^2)},$$

由此可得

$$x=\frac{1}{i}\left\{\frac{1}{s-\alpha-i\beta}-\frac{1}{s-\alpha+i\beta}\right\}=\frac{1}{i}\{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}\}=\{2e^{\alpha t}\sin\beta t\},$$

$$y=\frac{2(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}-\frac{1}{s-\alpha}=\frac{1}{s-\alpha-i\beta}+\frac{1}{s-\alpha+i\beta}-\frac{1}{s-\alpha}=\{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}-e^{\alpha t}\}$$

$$=\{e^{\alpha t}(2\cos\beta t-1)\}.$$

至于进一步的论述和应用, 见 Mikusiński 的书[1]. 我们也建议读者去看 A. Erdélyi 的书[1].

§7. Sobolev 引理

广义函数在分布的意义下是无限可微的 (见第一章§8). 这种广义意义下的可微性并不能保证通常的可微性. 然而, 我们有下述的结果, 它对于偏微分方程的近代研究具有根本的重要性.

定理 (Sobolev 引理) 令 G 是 R^n 的一个有界开域. 设函数 $u(x)\in W^k(G)$ 且 $k>2^{-1}n+\sigma$, 这里, σ 是一个整数 $\geqq 0$. 这时, 如果 $u(x)$ 的一直到 k 阶的各阶分布导数都属于 $L^2(G)$. 则对于 G 内的任何一个开子集 G_1, 只要它的闭包 G_1^a 是 G 的一个紧子集, 就总存在某个函数 $u_1(x)\in C^\sigma(G_1)$, 使得在 G_1 内有 $u(x)=u_1(x)$ a. e.

证明 设 $\alpha(x)$ 是 $C_0^\infty(R^n)$ 内的这样一个函数, 使得

$$G_1\subseteqq \mathrm{supp}(\alpha)\subset G,\quad 0\leqq\alpha(x)\leqq 1 \text{ 且在 } G_1 \text{ 上 } \alpha(x)=1.$$

我们作出一个定义在R^n上的函数$v(x)$，即

$$\text{当 } x\in G \text{ 时 } v(x)=\alpha(x)u(x),\quad \text{而当 } x\in R^n-G \text{ 时 } v(x)=0.$$

这时，当$x\in G_1$时就有$v(x)=u(x)$. 因为$v(x)$在R^n上是局部可积的，所以它确定了一个分布$\in\mathfrak{D}(R^n)'$. 根据假设$u\in W^k(G)$，所以当$|s|\leqq k$时，分布导数$D^s v(x)\in L^2(R^n)$. 例如，分布导数

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(v)=\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha u)=\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\cdot u+\alpha\frac{\partial}{\partial x_j}u$$

就属于$L^2(R^n)$，这是因为u和$\partial u/\partial x_j$都属于$L^2(G)$且无限可微函数$\alpha(x)$的支集含于开域G的某紧子集内. 利用 Fourier 变换$v(x)\to\hat{v}(y)$，我们得到

$$\widehat{(D^s v)}(y)=(i)^{|s|}y_1^{s_1}y_2^{s_2}\cdots y_n^{s_n}\cdot\hat{v}(y).$$

因为由 Plancherel 定理可知，L^2范数在 Fourier 变换下是不变的，所以当$|s|\leqq k$时，我们有$\widehat{(D^s v)}(y)\in L^2(R^n)$. 因此

$$\hat{v}(y)y_1^{s_1}y_2^{s_2}\cdots y_n^{s_n}\in L^2(R^n)\quad \text{对}|s|\leqq k\text{成立.} \tag{1}$$

特别地，我们有

$$\hat{v}(y)\in L^2(R^n). \tag{1'}$$

令$q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$是一组非负整数. 则利用(1)，我们可以证明

$$\text{当}|q|+\frac{n}{2}<k\text{时}, \hat{v}(y)y_1^{q_1}y_2^{q_2}\cdots y_n^{q_n}\text{在 } R^n \text{ 上是可积的.} \tag{2}$$

为了证明(2)，任取一个正数C. 根据 Schwarz 不等式，我们有

$$\int_{|y|\leq C}|\hat{v}(y)y_1^{q_1}y_2^{q_2}\cdots y_n^{q_n}|^2dy\leqq\left(\int_{|y|\leq C}|y_1^{q_1}y_2^{q_2}\cdots y_n^{q_n}|^2dy\cdot\int_{|y|\leq C}|\hat{v}(y)|^2dy\right)^{1/2}<\infty,$$

$$\int_{|y|>C}|\hat{v}(y)y_1^{q_1}y_2^{q_2}\cdots y_n^{q_n}|dy\leqq$$

$$\left(\int_{|y|>C}|(1+|y|^2)^{-k/2}y_1^{q_1}y_2^{q_2}\cdots y_n^{q_n}|^2dy\cdot\int_{|y|>C}|\hat{v}(y)(1+|y|^2)^{k/2}|^2dy\right)^{1/2}.$$

由(1)可知，最后这个不等式的右端的第二个因子$<\infty$. 至于第一个因子，如果

$$2|q|-2k+n-1<-1,\ \text{亦即，如果 } k>\frac{n}{2}+|q|,$$

则由

$$\begin{cases}dy=dy_1dy_2\cdots dy_n=r^{n-1}drd\Omega_n,\\ \text{其中}, d\Omega_n \text{ 是 } R^n \text{ 内以原点 0 为心}\\ \text{的单位球面的超曲面元素}\end{cases} \tag{3}$$

可知，它仍是有限的.

因此，根据 Plancherel 定理，我们有

$$v(x)=\underset{h\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ (2\pi)^{-n/2}\int_{|y|\leq h}\hat{v}(y)\exp(i\langle y, x\rangle)dy,$$

从而，同证明$L^2(R^n)$的完备性一样，我们可以选出正整数h的某个子序列$\{h'\}$，使得

$$v(x)=\lim_{h'\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\int_{|y|\leq h'}\hat{v}(y)\exp(i\langle y, x\rangle)dy\quad \text{对于 a. e. } x\in R^n \text{ 成立,}$$

但是，由于前面已经证明过 $\hat{v}(y)$ 在 R^n 上是可积的，所以上式右端等于

$$v_1(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}\hat{v}(y)\exp(i\langle x, y\rangle)dy,$$

这就是说，对于 a. e. $x\in R^n$, $v(x)$ 等于 $v_1(x)$. 由(2)可知，$v_1(x)$ 在积分号下的微分运算正好是一直到 σ 阶的；并且微分的结果对 x 是连续的. 对于 $x\in G_1$, 我们令 $u_1(x)=v_1(x)$, 于是定理得证.

注 至于原始的证明，可见 S. L. Sobolev[1]、[2]，或 L. Kantorovitch-G. Akilov[1].

§8. Gårding 不等式

对属于 C^∞ 且其紧支集含于 R^n 的有界域 G 内的函数 $u(x)=u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，我们考虑积分二次型:

$$B[u, u]=\sum_{|s|,|t|\leq m}(c_{st}D^s u, D^t u)_0, \tag{1}$$

其中，复值系数 c_{st} 在 G 的闭包 G^a 上是连续的，而 $(u, v)_0$ 表示 $L^2(G)$ 中的内积.

这时，我们有

定理(L. Gårding[1]) 关于存在正的常数 c 和 C，使得不等式

$$\|u\|_m^2\leq cReB[u, u]+C\|u\|_0^2 \tag{2}$$

对所有的 $u\in C_0^\infty(G)$ 都成立的一个充分条件是，对于某个正的常数 c_0

$$Re\sum_{|s|,|t|=m}c_{st}\xi^s\xi^t\geq c_0|\xi|^{2m}\ \text{对所有的}\ x\in G$$

和所有的实向量 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 都成立. (3)

注 不等式(2)叫做 Gårding 不等式. 如果条件(3)成立，则微分算子

$$L=\sum_{|s|=|t|\leq m}(-1)^{|t|}D^t c_{st}D^s \tag{4}$$

其中假设 c_{st} 在 G^a 上属于 C^m，叫做在 G 内是强椭圆的.

证明 我们首先证明，对任何一个 $\varepsilon>0$ 都存在某个常数 $C(\varepsilon)>0$，使得对于每个属于 $C_0^\infty(G)$ 的函数 u 都有

$$\|u\|_{m-1}^2\leq\varepsilon\|u\|_m^2+C(\varepsilon)\|u\|_0^2. \tag{5}$$

为此目的，我们把 u 在 G 之外的值定义为 0 而认为它是属于 $C_0^\infty(R^n)$ 的. 利用 Fourier 变换和 Plancherel 定理，我们得到

$$\|D^s u\|_0^2=\|(\widehat{D^s u})\|_0^2=\int_{R^n}\left|\prod_{j=1}^n y_j^{s_j}\hat{u}(y)\right|^2 dy.$$

因此，(5)是下述事实的一个结果，即当 $C\uparrow\infty$ 时

$$\left(\sum_{|s|\leq m-1}\prod_{j=1}^n y_j^{2s_j}\right)\Big/\left(C+\sum_{|t|\leq m}\prod_{j=1}^n y_j^{2t_j}\right)\quad\left(|s|=\sum_{j=1}^n s_j,\ |t|=\sum_{j=1}^n t_j\right)$$

关于 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 一致趋于零.

假定诸系数 c_{st} 均为常数，并且除了 $|s|=|t|=m$ 之外，它们都为零. 利用 Fourier 变换

$u(x)\to\hat{u}(\xi)$ 和 Plancherel 定理以及(3), 我们有

$$ReB[u,u]=Re\int\sum_{s,t}c_{st}\xi^s\xi^t|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\geqq\int c_0|\xi|^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\geqq c_1(\|u\|_m^2-\|u\|_{m-1}^2),$$

其中, $c_1>0$是一个与 u 无关的常数. 因此, 由(5)可知, (2)式对于我们这种特殊情形是成立的.

下面, 我们考虑变系数 c_{st} 的情形. 首先, 假定 u 的支集充分小并且含于, 譬如说, 以原点为心的某个小球内. 利用上述结果, 对于与 u 无关的某个常数 $c_0'>0$, 我们有

$$c_0'\|u\|_m^2\leqq ReB[u,u]+Re\sum_{|s|=|t|=m}\int(c_{st}(0)-c_{st}(x))D^su\cdot D^t\bar{u}\,dx$$

$$-Re\sum_{|s|+|t|<2m}\int c_{st}(x)D^su\cdot D^t\bar{u}\,dx+C(\varepsilon)\|u\|_0^2.$$

如果 u 的支集是如此之小, 以致使得 c_{st} 在那里只有很小的振幅, 则我们看见, 上式右端第二项的绝对值可以小于 $2^{-1}c_0'\|u\|_m^2$. 而右端第三项可以小于$\|u\|_m\cdot\|u\|_{m-1}$乘以某个常数. 于是, 我们发现

$$2^{-1}c_0'\|u\|_m^2\leqq ReB[u,u]+\text{常数}\cdot\|u\|_m\cdot\|u\|_{m-1}+C(\varepsilon)\|u\|_0^2,$$

其中的常数都是正的常数. 因此, 由于

$$2|\alpha|\cdot|\beta|\leqq\varepsilon|\alpha|^2+\varepsilon^{-1}|\beta|^2\quad\text{对于每个 }\varepsilon>0\text{ 都成立,}\tag{6}$$

所以我们得到$\|u\|_m^2\leqq$常数$\cdot ReB[u,u]+$常数$\cdot\|u\|_{m-1}^2+C(\varepsilon)\cdot\|u\|_0^2$, 从而, 由(5)可得(2).

其次, 我们考虑一般情形. 在 G 内构造某种单位分解:

$$1=\sum_{j=1}^N\omega_j^2,\ \omega_j\in C_0^\infty(G),\text{ 而在 }G\text{ 内 }\omega_j(x)\geqq0,$$

并且每一个 ω_j 的支集都取为我们所需要的那么小. 这时, 利用函数乘积的微分的 Leibniz 公式、Schwarz 不等式以及上面所得出的估计式, 可以得到

$$\begin{aligned}ReB[u,u]&=Re\sum_{s,t}\int c_{st}D^suD^t\bar{u}\,dx=Re\sum_{s,t}\sum_j\int\omega_j^2c_{st}D^suD^t\bar{u}\,dx\\&=Re\int\sum_j\sum_{s,t}c_{st}D^s(\omega_ju)D^t(\overline{\omega_ju})\,dx+0(\|u\|_m\cdot\|u\|_{m-1})\\&\geqq\sum_j\text{常数}\cdot(\|\omega_ju\|_m^2-\|\omega_ju\|_{m-1}^2)+0(\|u\|_m\cdot\|u\|_{m-1})\\&\geqq\text{常数}\cdot\|u\|_m^2+0(\|u\|_m\cdot\|u\|_{m-1}).\end{aligned}$$

因此, 利用(5), 我们可得到(2). 我们要指出: 在(2)中的常数 c、C 是依赖于 c_0、c_{st} 和区域 G 的.

§9. Friedrichs 定理

设

$$L=\sum_{|s|,|t|\leqq m}D^sc_{st}(x)D^t\tag{1}$$

是强椭圆的, 其中, 实系数 $c_{st}(x)$在 R^n 的某个有界开域内属于 C^∞. 考虑方程

$$Lu=f, \tag{2}$$

其中，$f(x)$ 是 G 内的一个已知的局部平方可积函数；一个在 G 内局部平方可积的函数 $u(x)$ 称为方程(2)的一个弱解，如果对每一个 $\varphi\in C_0^\infty(G)$ 都有

$$(u, L^*\varphi)_0=(f,\varphi)_0, \quad L^*=\sum_{|s|,|t|\leq m}(-1)^{|s|+|t|}D^t c_{st}(x)D^s. \tag{3}$$

这里，$(f,g)_0$ 表示 Hilbert 空间 $L^2(G)$ 的内积．因此，(2)的弱解 u 是分布意义下的一个解．至于弱解的可微性，我们有下述基本结果：

定理(K. Friedrichs[1]) 如果 f 在区域 $G_1\subseteq G$ 内有一直到 p 阶的平方可积的(分布)导数，则(2)的任何弱解 u，在 G_1 内都有一直到 $(2m+p)$ 阶的平方可积的(分布)导数．换句话说，当 f 属于 $W^p(G_1)$ 时，(2)的任何弱解 u 都属于 $W^{p+2m}(G_1)$．

系 如果 $p=\infty$，则由 Sobolev 引理可知，存在某个函数 $u_0(x)\in C^\infty(G_1)$ 使得 $u(x)=u_0(x)$ 对于 a.e. $x\in G_1$ 成立．因此，如果 f 在某个区域 $\subseteq G$ 内是 C^∞ 的，则(2)的任何一个弱解 $u(x)$，在某个测度为零的集合上调整了其值之后，就在该区域内是 C^∞ 的；从而，此调整了值的解就是微分方程(2)在 $f(x)$ 为 C^∞ 的区域内的一个真解．

注 当 $L=\Delta$，即 Laplace 算子时，上述的系就是 Weyl 引理(见第二章 § 7)．关于把 Weyl 引理推广到一般椭圆算子 L 上去的工作，有大量的文献；这些推广，有时又叫做 Weyl-Schwartz 定理．在这些丰富的文献中，我们推荐：P. Lax[2]、L. Nirenberg[1]和 L. Nirenberg[2]．以下的证明是著者自己(未发表)的工作．L. Bers[1]曾给出过一个类似的证明．顺便指出，一个不可微的局部可积函数 $f(x)$ 是双曲方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

的一个分布解，这可以从

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y\partial x}dy\right\}dx \qquad (\varphi(x,y)\in C_0^\infty(R^2))$$

看出来．

定理的证明 我们只考虑实值函数的情形．如果有必要，我们就用 $I+\alpha L$ 来代替 L，其中的 $\alpha\neq 0$ 是某个常数，于是我们总可以假定强椭圆算子 L 本身满足 Gårding 不等式

$$\begin{cases}(\varphi, L^*\varphi)_0\geqq\delta\|\varphi\|_m^2 & (\delta>0),\\ |(\varphi, L^*\psi)_0|\leqq\gamma\|\varphi\|_m\|\psi\|_m \quad (\gamma>0) & \text{对一切 } \varphi,\ \psi\in C_0^\infty(G)\text{ 都成立}.\end{cases} \tag{4}$$

后一个不等式可以用分部积分法予以证明．这里，我们假定系数 $c_{st}(x)$ 的一直到 m 阶的每一个导数都在 G 内是有界的，从而常数 δ 和 γ 不依赖于检验函数 $\psi,\varphi\in C_0^\infty(G)$．

假定 G_1 是周期的平行多面体

$$0\leqq x_j\leqq 2\pi \quad (j=1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

又假定 L 的系数和 f，对每个 x_j，都是以 2π 为周期的周期函数．在这些假定下，我们考虑定义在没有边界的紧空间 G_1 上的函数 $\varphi(x)$，这里，G_1 是由(5)给出的 n 维环形区域，并考虑属于 $C^\infty(G_1)'$ 的分布，其检验函数 $\varphi\in C^\infty(G_1)$ 的空间是由这样的 C^∞ 函数 $\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 组成的，

它们对自己的每一个变元 x_j 都是以 2π 为周期的周期函数. 需要指出, 因为 G_1 是没有边界的, 所以我们无须限制我们的检验函数 $\varphi(x)$ 的支集.

因此, 条件 $v\in W^q(G)$ 表示 $v(x)$ 的 Fourier 展式

$$\begin{cases} v(x)\sim\sum_k v_k\exp(ik\cdot x) \\ (k=(k_1,\cdots,k_n)、x=(x_1,\cdots,x_n) \text{ 和 } k\cdot x=\sum_{j=1}^n k_jx_j) \end{cases} \tag{6}$$

中的 Fourier 系数 v_k 满足

$$\sum_k |v_k|^2(1+|k|^2)^q<\infty \quad \left(|k|^2=\sum_{j=1}^n k_j^2\right). \tag{7}$$

这是因为, 利用分部积分法, 分布导数 $D^s v$ 的 Fourier 系数满足

$$(D^s v(x), \exp(ik,x))_0=(-1)^{|s|}(v(x), D^s\exp(ik,x))_0=(-i)^{|s|}\prod_{j=1}^n k_j^{s_j}v_k,$$

$$s=(s_1, s_2, \cdots, s_n),$$

从而, 利用关于 $D^q v\in L^2(G_1)$ 的 Fourier 系数的 Parseval 关系式, 我们就可得到(7).

对于整数 $q\gtreqless 0$, 引入 $W^q(G_1)$ 空间是方便的, 办法是, 对于复数 w_k 的序列 $\{w_k; k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\}$, 其中 $w_k=\overline{w}_{-k}$, 如果它满足(7), 则称该序列是属于 $W^q(G_1)$ 的. 此 $W^q(G_1)$ 是一个赋范空间, 其范数为 $\|\{w_k\}\|_q=(\sum_k |w_k|^2(1+|k|^2))^{1/2}$. 利用关于 $L^2(G_1)$ 的完全标准正交系 $\{(2\pi)^{-n/2}\cdot\exp(ik\cdot x)\}$ 的 Parseval 关系式, 我们看见当 $q\geqq 0$, 范数 $\|v\|_q=\left(\sum_{|s|\leq q}\int_{G_1}|D^s v(x)|^2dx\right)^{1/2}$ 等价于范数 $\|\{v_k\}\|_q$, 其中, $v(x)\sim\sum_k v_k\exp(ik\cdot x)$.

(7) 的上述证明指出, 如果 $f\in W^p(G_1)$, 则 $D^s f\in W^{p-|s|}(G_1)$, 并且对于 $\varphi\in C^\infty(G_1)$, 有 $\varphi f\in W^p(G_1)$. 因此

$$\begin{cases} \text{如果 } f\in W^p(G_1), \text{则对于任何一个具有 } C^\infty(G_1) \\ \text{系数的 } q \text{ 阶微分算子} N \text{都有 } Nf\in W^{p-|q|}(G_1). \end{cases} \tag{8}$$

为了对我们的周期函数情形来证明本定理, 首先我们需要说明, 可以假设 (2) 的弱解 $u\in L^2(G_1)=W^0(G_1)$ 属于 $W^m(G_1)$. 下面来说明这个假设是成立的. 令

$$u(x)\sim\sum_k u_k\exp(ik\cdot x),\ v(x)\sim\sum_k u_k(1+|k|^2)^{-m}\exp(ik\cdot x).$$

于是容易看出, $v(x)\in W^{2m}(G_1)$ 且 v 是 $(I-\Delta)^m v=u$ 的一个弱解, 其中的 Δ 表示 Laplace 算子 $\sum_{j=1}^n\partial^2/\partial x_j^2$. 因此, v 是 $4m$ 阶的强椭圆方程:

$$L(I-\Delta)^m v=f \tag{2'}$$

的一个弱解. 如果我们能证明此弱解 $v\in W^{2m}(G_1)$ 确实属于 $W^{4m+p}(G_1)$, 则由(8)可知, $u=(I-$

$\Delta)^m v$必属于 $W^{4m+p-2m}(G_1)=W^{p+2m}(G_1)$. 所以,不失一般性,我们总可以假设(2)的弱解 u 属于 $W^m(G_1)$,其中,m是 L的阶数 $2m$ 的一半.

下面,根据关于 L 和$(I-\Delta)^m$的 Gårding 不等式(4),我们就可以把Lax-Milgram 定理(第三章§7)应用于下述结果. $C^\infty(G_1)$上的双线性型:

$$(\varphi,\psi)'=(\varphi,L^*\psi)_0 \text{ 和 } (\varphi,\psi)''=(\varphi,(I-\Delta)^m\psi)_0. \tag{9}$$

二者都可以延拓为 $W^m(G_1)$上的连续双线性型, 使得存在由 $W^m(G_1)$到 $W^m(G_1)$上的一一对应、双方连续的线性映射 T'、T'',且满足条件

$$(T'\varphi,\psi)'=(\varphi,\psi)_m,\quad (T''\varphi,\psi)''=(\varphi,\psi)_m \quad \text{对于 } \varphi,\psi\in W^m(G_1) \text{ 成立.}$$

所以,存在 $W^m(G_1)$到 $W^m(G_1)$上的一一对应、双方连续的线性映射 $T_m=T''(T')^{-1}$, 使得

$$(\varphi,\psi)'=(T_m\varphi,\psi)'' \quad \text{对一切的 } \varphi,\psi\in W^m(G_1) \text{ 都成立.} \tag{10}$$

我们可以证明

$$\begin{cases}\text{对于任何 } j\geqq 1, T_m \text{ 把 } W^{m+j}(G_1) \text{ 一一对应且}\\ \text{双方连续地映射到 } W^{m+j}(G_1) \text{ 上.}\end{cases} \tag{11}$$

事实上,我们有

$$(\varphi,L^*(I-\Delta)^j\psi)_0=(T_m\varphi,(I-\Delta)^{m+j}\psi)_0 \text{ 对 } \varphi,\psi\in C^\infty(G_1) \text{ 成立.}$$

另一方面,利用把 Lax-Milgram定理应用到强椭圆算子$(I-\Delta)^jL$ 和$(I-\Delta)^{m+j}L$ 的办法可以知道,存在一个由 $W^{m+j}(G_1)$到 $W^{m+j}(G_1)$上的一一对应、双方连续的线性映射 T_{m+j}, 使得

$$(\varphi,L^*(I-\Delta)^j\psi)_0=(T_{m+j}\varphi,(I-\Delta)^{m+j}\psi)_0 \text{ 对 } \varphi,\psi\in C^\infty(G_1) \text{ 成立.}$$

所以函数 $w=(T_{m+j}-T_m)\varphi$, 对任何$\varphi\in C^\infty(G_1)$, 都是$(I-\Delta)^{m+j}w=0$ 的一个弱解. 然而, 这样的 $w(x)$恒等于零. 这是因为 $w(x)$的 Fourier 系数 w_k 满足

$$\begin{aligned}0&=((I-\Delta)^{m+j}w(x),\exp(ik\cdot x))_0=(w(x),(I-\Delta)^{m+j}\exp(ik\cdot x))_0\\ &=(1+|k|^2)^{m+j}(w(x),\exp(ik\cdot x))_0=(1+|k|^2)^{m+j}w_k,\end{aligned}$$

故对所有的 k 都有 $w_k=0$. 因此,$(T_{m+j}-T_m)$在 $C^\infty(G_1)$上为 0. 因为三角多项式 $\sum\limits_{|k|<\infty} w_k\exp(ik\cdot x)$ 在空间 $W^{m+j}(G_1)$内是稠密的, 所以空间 $C^\infty(G_1)$在 $W^{m+j}(G_1)\subseteqq W^m(G_1)$内更是稠密的. 因此, 在 $W^{m+j}(G_1)$上有 $T_{m+j}=T_m$.

现在,我们就来证明关于周期函数情形的可微性定理. 对于 $\psi\in C^\infty(G_1)$, 我们有

$$(f,\psi)_0=(u,L^*\psi)_0=(u,\psi)'=(T_mu,\psi)''=(T_mu,(I-\Delta)^m\psi)_0.$$

因此, 对于

$$T_mu\sim\sum_k c_k\exp(ik\cdot x),\quad \psi(x)\sim\sum_k\psi_k\exp(ik\cdot x),$$

利用 Parseval 关系式, 可以得到

$$(T_mu,(I-\Delta)^m\psi)_0=\sum_k c_k(1+|k|^2)^m\overline{\psi}_k=\sum_k f_k\overline{\psi}_k.$$

由 $\psi\in C^\infty(G_1)$的任意性可得 $c_k(1+|k|^2)^m=f_k$, 从而, 由 $f\in W^p(G_1)$可知 $T_mu\in W^{p+2m}(G_1)$. 因此, 由(11)可知 $u\in W^{p+2m}(G_1)$. 我们指出, 甚至对于 $0\geqq p\geqq(1-m)$的情形, 亦即对于$\{f_k\}\in W^p(G_1)$而

$0 \geqq p \geqq (1-m)$的情形，上述结论$u \in W^{p+2m}(G_1)$也是正确的．这是因为，由于$p+2m \geqq m+1$，所以我们仍可以利用(11)．

最后，将对一般的非周期情形来证明我们的可微性定理．下面的论证出自 P. Lax[2]．

对于一般的非周期的情形，我们需要证明在G的一点x^0的邻近的可微性定理．设$\beta(x) \in C_0^\infty(G)$在$G$的点$x^0$的某邻近内恒等于1．用$u'$表示$\beta u$．$u'$是

$$Lu' = \beta f + Nu \tag{12}$$

的一个弱解，其中N是一个至多为$(2m-1)$阶的微分算子，它的系数以及$\beta(x)$在x_0的某个邻近V之外都为零，并且算子N是在分布意义下被使用的．我们用f'表示分布$\beta f + Nu$．

设周期平行多面体G_1包含了V，并设想L的诸系数在G_1内——但在V之外——作这样的变动，即它们变成了周期函数但仍保持了可微性和椭圆性的性质．用L'表示这样变动后的L．因此，u'是

$$L'u' = f', \text{ 其中 } f' = \beta f + Nu \tag{13}$$

在G内的一个弱解．

于是可以把前面关于周期情形所得到的结果应用到我们的弱解u'．我们可以假设弱解u'属于$W^m(G_1)$．由于N的阶数$\leqq(2m-1)$且其系数在V以外为零，所以由(8)可知$f' = \beta f + Nu$必满足

$f' \in W^{p'}(G_1)$，其中的$p' = \min(p, m-(2m-1)) = \min(p, 1-m) \geqq 1-m$．因此，(13)的弱解$u'$必满足

$u' \in W^{p''}(G_1)$，其中的$p'' = \min(p+2m, 1-m+2m) = \min(p+2m, m+1)$．于是在$x^0$的某个邻近内，$u$具有一直到$p''$阶的平方可积的分布导数，这里，$p'' \geqq (m+1)$．因此，$f' = \beta f + Nu$在$x^0$的某个邻近内具有一直到

$$p''' = \min(p, p'' - (2m-1)) \geqq \min(p, 2-m)$$

阶的平方可积的分布导数．于是再利用已经得到的结果，我们看出，u在x^0的某个邻近内具有一直到

$$p^{(4)} = \min(p+2m, 2-m+2m) = \min(p+2m, m+2)$$

阶的平方可积的分布导数．重复这样作下去，我们看出，u在x^0的某个邻近内具有一直到$p+2m$阶的平方可积的分布导数．

§ 10. Malgrange-Ehrenpreis 定理

在常微分方程和偏微分方程之间有一种深刻的区别．Peano 的一个经典结果指出，常微分方程$dy/dx = f(x, y)$，在函数f具有连续性这种简单的条件下，总有解．这个结果已经推广到高阶方程和方程组的情形了．然而，对于偏微分方程而言，情况就完全不同了．H. Lewy[1] 在1957年造出了方程

$$-i\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2(x_1 + ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x_3),$$

如果 f 不是解析的，则此方程绝对没有解，甚至当 f 是 C^∞ 函数时，它也无解. Lewy 的例子导致 L. Hörmander[3]发展了一整套构造无解的线性偏微分方程的方法. 因此，一个重要的任务就是确定具有解的线性偏微分方程的类型.

设 $P(\xi)$ 是 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的一个多项式，又设 $P(D)$ 是用 $D_j = i^{-1}\partial/\partial x_j$ 代替 ξ_j 后所得到的线性微分算子. $P(D)$ 可以写为

$$P(D) = \sum_\alpha c_\alpha D_\alpha, \quad \text{其中}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

$$D_\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

定义 1 如果 R^n 中的某个分布 E 使得有

$$P(D)E = \delta = T_\delta,$$

则称 E 为 $P(D)$ 的一个**基本解**.

基本解的重要意义在于这样的事实，即

$$u = E * f, \quad \text{其中的 } f \in C_0^\infty(R^n),$$

就是方程

$$P(D)u = f$$

的一个解. 事实上，利用第六章 § 3 的微分法则(10)就可以得出 $P(D)u = (P(D)E) * f = \delta * f = f$.

例 设 $P(D)$ 是 R^n 中的 Laplace 算子 $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$，其中的 $n \geqq 3$. 这时，分布

$$E = T_g$$

就是 Δ 的一个基本解，这里，$g(x) = \frac{1}{(2-n)S_n}|x|^{2-n}$，而 S_n 是 R^n 中的单位球的表面积.

证明 在极坐标下我们有 $dx = |x|^{n-1} d|x| dS_n$，从而函数 $g(x)$ 在 R^n 内是局部可积的. 因此，

$$\Delta T_{|x|^{2-n}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geq 0} |x|^{2-n} \cdot \Delta \varphi dx, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n).$$

我们取两个正数 ε 和 $R(>\varepsilon)$，使得 $\text{supp}(\varphi)$ 包含在球 $|x| \leqq R$ 的内部. 考虑 R^n 内的区域 $G: \varepsilon \leqq |x| \leqq R$，并利用 Green 积分定理就可得到

$$\int_G (|x|^{2-n} \cdot \Delta \varphi - \Delta |x|^{2-n} \cdot \varphi) dx = \int_{\partial G} \left(|x|^{2-n} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{\partial |x|^{2-n}}{\partial \nu} \cdot \varphi \right) dS,$$

其中，$S = \partial G$ 是由 $|x| = \varepsilon$ 和 $|x| = R$ 组成的边界曲面，而 ν 表示 S 的外法线. 因为 φ 在 $|x| = R$ 附近为零，再注意到，当 $x \neq 0$ 时有 $\Delta |x|^{2-n} = 0$ 以及在内边界曲面 $|x| = \varepsilon$ 上的点处有 $-\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial |x|}$，所以我们有

$$\int_{R^n} |x|^{2-n} \Delta \varphi dx = -\int_{|x|=\varepsilon} \varepsilon^{2-n} \frac{\partial \varphi}{\partial |x|} dS + \int_{|x|=\varepsilon} (2-n) \varepsilon^{1-n} \varphi dS.$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，表示式 $\partial \varphi / \partial |x| = \sum_{j=1}^n (x_j / |x|) \cdot \partial \varphi / \partial x_j$ 是有界的，而边界曲面 $|x| = \varepsilon$ 的面积是 $S_n \varepsilon^{n-1}$. 因此，当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，上式右端第一项趋于零. 利用 φ 的连续性并作类似于上面的讨论，可

以看出当 $\varepsilon\downarrow 0$时，上式右端第二项趋于$(2-n)S_n\cdot\varphi(0)$. 因此，T_g 确实是 Δ 的一个基本解.

关于每一个常系数线性偏微分方程的基本解的存在性，已经被 B. Malgrange[1] 和 L. Ehrenpreis[1]在1954—1955年这段时期内独立地证明了. 下面叙述的结果出自 L. Hörmander[4].

定义 2 令

$$\begin{cases}\widetilde{P}(\xi)=\left(\sum_{|\alpha|\geq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)|^2\right)^{1/2}, \text{其中}, P^{(\alpha)}(\xi)=D_\xi^\alpha P(\xi), \\ D_\xi^\alpha=\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\partial\xi_2^{\alpha_2}\cdots\partial\xi_n^{\alpha_n}}.\end{cases} \tag{1}$$

设 $Q(D)$ 是一个常系数的微分算子，如果

$$\widetilde{Q}(\xi)\leqq C\widetilde{P}(\xi), \xi\in R^n, \text{这里} C \text{是一个正的常数}, \tag{2}$$

这时，我们就说 $Q(D)$ 弱于 $P(D)$.

定理 1 如果Ω是R^n的一个有界域且 $f\in L^2(\Omega)$，则 $P(D)u=f$ 在Ω中有解 u 使得，对所有弱于P的Q都有 $Q(D)u\in L^2(\Omega)$. 这里，我们在分布论的意义下运用微分算子 $P(D)$ 和 $Q(D)$.

此定理的证明是以下面的定理作为基础的.

定理 2 对每个 $\varepsilon>0$，总有 $P(D)$ 的一个基本解 E 和一个与 u 无关的常数 C，使得

$$|(E*u)(0)|\leqq C\sup_{|\eta|\leqq\varepsilon}\int_{R^n}|\hat{u}(\xi+i\eta)|/\widetilde{P}(\xi)d\xi, u\in C_0^\infty(R^n). \tag{3}$$

其中，$\hat{u}$ 是 u 的 Fourier-Laplace 变换：

$$\hat{u}(\zeta)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n}e^{-i\langle x,\zeta\rangle}u(x)dx, \zeta=\xi+i\eta,$$

而(3)的右端的有限性是由第六章 § 4 的 Paley-Wiener 定理肯定了的.

由定理 2 导出定理 1 在(3) 中用 $Q(D)u*v$ 代替 u，而这里的 u 和 v 都属于 $C_0^\infty(R^n)$. 利用第六章 § 3 的(10) 可以得到

$$|(Q(D)E*u*v)(0)|=|(E*Q(D)u*v)(0)|\leqq CN(Q(D)u*v),$$

$$\text{其中}, N(u)=\sup_{|\eta|\leqq\varepsilon}\int_{R^n}|\hat{u}(\xi+i\eta)|/\widetilde{P}(\xi)\cdot d\xi.$$

由第六章 § 2 的 (17) 以及第六章 § 3 的 (15) 可知，$Q(D)u*v$ 的 Fourier-Laplace 变换等于 $(2\pi)^{n/2}Q(\zeta)\hat{u}(\zeta)\hat{v}(\zeta)$. 因为利用 Taylor 公式可得

$$Q(\xi+i\eta)=\sum_\alpha\frac{1}{(\alpha!)}(-\eta)^\alpha D_\alpha Q(\xi), \text{其中} (-\eta)^\alpha=\prod_j(-\eta_j)^{\alpha_j}, \tag{4}$$

再利用(2)，于是

$$|Q(\xi+i\eta)|/\widetilde{P}(\xi)\leqq C' \quad \text{对于} |\eta|\leqq\varepsilon \text{和} \xi\in R^n \text{成立},$$

其中的常数 C' 可与 ε 有关. 因此

$$N(Q(D)u*v)\leqq(2\pi)^{n/2}C'\cdot\sup_{|\eta|\leqq\varepsilon}\int_{R^n}|\hat{u}(\xi+i\eta)\hat{v}(\xi+i\eta)|d\xi.$$

利用关于 Fourier 变换的 Parseval 定理，在用‖ ‖表示 $L^2(R^n)$ 的范数之后，我们就得到

当$|\eta|\leqq\varepsilon$时，$\int_{R^n}|\hat{u}(\xi+i\eta)|^2d\xi=\int_{R^n}|u(x)|^2e^{2\langle x,\eta\rangle}dx\leqq\|u(x)e^{\varepsilon|x|}\|^2$，

以及关于$\hat{v}$的一个类似的估计式. 因此，由 Schwarz 不等式可知，

$$N(Q(D)u*v)\leqq C''\|u(x)e^{\varepsilon|x|}\|\|v(x)e^{\varepsilon|x|}\|\text{对一切 } u、v\in C_0^\infty(R^n)\text{都成立,}$$

其中C''表示一个常数，它可能与ε有关.

所以，我们就证明了

$$\left|\int_{R^n}(Q(D)E*u)(x)v(-x)dx\right|\leqq(CC'')\|ue^{\varepsilon|x|}\|\|ve^{\varepsilon|x|}\|\quad(u,v\in C_0^\infty(R^n)).\tag{5}$$

我们用$L_\varepsilon^2(R^n)$表示函数$w(x)$的这种 Hilbert 空间，即它的范数取为

$$\left(\int_{R^n}|w(x)|^2e^{\varepsilon|x|}dx\right)^{1/2}=\|w(x)e^{\varepsilon|x|}\|.$$

因为$C_0^\infty(R^n)$在$L_\varepsilon^2(R^n)$内是稠密的并且容易证明$L_{-\varepsilon}^2(R^n)$就是$L_\varepsilon^2(R^n)$的共轭空间，所以，用$\|v(x)e^{\varepsilon|x|}\|$除以(5)式后再取此式关于$v\in C_0^\infty(R^n)$的上确界，我们就得到

$$\|(Q(D)E*u)(x)e^{-\varepsilon|x|}\|\leqq(CC'')\|u(x)^{\varepsilon|x|}\|,\ u\in C_0^\infty(R^n).$$

于是映射

$$u\to Q(D)E*u\tag{6}$$

可以根据连续性从$C_0^\infty(R^n)$到$L_\varepsilon^2(R^n)$进行扩张，使得它成为从$L_\varepsilon^2(R^n)$入$L_{-\varepsilon}^2(R^n)$内的一个连续线性映射. 因此，为了证明定理 1，我们只需在Ω内令$f_1=f$，而在$R^n-\Omega$内令$f_1=0$，并且再把u定义为$u=E*f_1$.

为了证明定理 2，我们需要三个引理.

引理 1(Malgrange) 设$f(z)$是复变量z在$|z|\leqq1$上的一个全纯函数，而$p(z)$是一个多项式，它的最高次项的系数为A，则

$$|Af(0)|\leqq(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})p(e^{i\theta})|d\theta.\tag{7}$$

证明 设诸z_j是$p(z)$在单位圆$|z|<1$内的零点，又令

$$p(z)=q(z)\prod_j\frac{z-z_j}{\bar{z}_jz-1}.$$

于是$q(z)$在该单位圆内是正则的，并且在$|z|=1$上有$|p(z)|=|q(z)|$. 因此，我们有

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(e^{i\theta})p(e^{i\theta})\right|d\theta&=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})q(e^{i\theta})|d\theta\\&\geqq(2\pi)^{-1}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})q(e^{i\theta})\,d\theta\right|=|f(0)q(0)|.\end{aligned}$$

因为$|q(0)/A|$等于$p(z)$在单位圆外零点的绝对值的乘积，所以引理 1 得证.

引理 2 仍用引理 1 中的符号，如果$p(z)$的次数$\leqq m$，则我们有

$$|f(0)p^{(k)}(0)|\leqq\frac{m!}{(m-k)!}(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})p(e^{i\theta})|d\theta.\tag{8}$$

证明 我们可以假设$p(z)$的次数就是m并且

$$p(z)=\prod_{j=1}^{m}(z-z_j).$$

把前面的引理 1 应用于多项式$\prod_{j=1}^{m}(z-z_j)$和全纯函数$f(z)\cdot\prod_{j=k+1}^{m}(z-z_j)$，我们就得到

$$\left|f(0)\prod_{j=k+1}^{m}z_j\right|\leqq(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})p(e^{i\theta})|d\theta.$$

当左端中的是任何$(m-k)$个z_j的乘积时，类似的不等式成立．因为$p^{(k)}(0)$是$m!/(m-k)!$个这样的项乘以$(-1)^{m-k}$之和，于是我们就证明了不等式(8)．

引理 3　令$F(\zeta)=F(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$对于$|\zeta|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j|^2\right)^{1/2}<\infty$是全纯的，而$P(\zeta)=P(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$是次数$\leqq m$的多项式．令$\Phi(\zeta)=\Phi(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$是一个非负的可积函数，它具有只依赖于$|\zeta_1|,|\zeta_2|,\cdots,|\zeta_n|$的紧支集．则我们有

$$|F(0)D_\alpha P(0)|\int_{|\zeta|<\infty}|\zeta|^{(\alpha)}\Phi(\zeta)d\zeta\leqq\frac{m!}{(m-(\alpha))!}\int_{|\zeta|<\infty}|F(\zeta)P(\zeta)|\Phi(\zeta)d\zeta,\tag{9}$$

其中的$d\zeta$是 Lebesgue 测度$d\xi_1d\eta_1\cdots d\xi_nd\eta_n\,(\zeta_k=\xi_k+i\eta_k)$．

证明　设$f(z)$是整全纯函数，我们把(8)应用到函数$f(rz)$和$p(rz)$上．于是得到

$$|f(0)p^{(k)}(0)|\cdot r^k\leqq\frac{m!}{(m-k)!}(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})p(re^{i\theta})|d\theta.$$

设$\psi(r)$是具有紧支集的非负可积函数．用$2\pi r\psi(r)$乘上述不等式，再对r积分，于是我们就得到

$$|f(0)p^{(k)}(0)|\int|t|^k\psi(|t|)\,dt\leqq\frac{m!}{(m-k)!}\int|f(t)p(t)|\psi(|t|)\,dt.\tag{10}$$

这里，$dt=rdrd\theta$并且积分已扩大为沿整个复的t平面进行积分．我们把(10)依次一个一个地应用到变量$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$上去就可以得到引理 3.

定理 2 的证明　令$P(D)u=v$，其中的$u\in C_0^\infty(R^n)$．于是$P(\xi)\hat{u}(\xi)=\hat{v}(\xi)$．我们这样来应用引理 3，即令$F(\zeta)=\hat{u}(\xi+\zeta)$，而用$P(\xi+\zeta)$来代替$P(\zeta)$，并且，当$|\zeta|\leqq\varepsilon$时令$|\Phi(\zeta)|=1$，而当$|\zeta|>\varepsilon$时令$|\Phi(\zeta)|=0$．因为$\widetilde{P}(\xi)\leqq\sum_\alpha|D^\alpha P(\xi)|$，于是由(9)可得

$$|\hat{u}(\xi)\widetilde{P}(\xi)|\leq C_1\int_{|\zeta|\leq\varepsilon}|\hat{u}(\xi+\zeta)P(\xi+\zeta)|d\zeta=C_1\int_{|\zeta|\leq\varepsilon}|\hat{v}(\xi+\zeta)|d\zeta.$$

于是，由 Fourier 积分定理可知

$$|u(0)|\leqq(2\pi)^{-n/2}\int|\hat{u}(\xi)|d\xi\leqq C_1'\int_{|\zeta|\leq\varepsilon}\left(\int|\hat{v}(\xi+\zeta)|/\widetilde{P}(\xi)d\xi\right)d\zeta$$

$$\leqq C_1'\int\left(\int_{\xi'^2+\eta'^2\leq\varepsilon^2}|\hat{v}(\xi+\xi'+i\eta')|/\widetilde{P}(\xi)d\xi'd\eta'\right)d\xi.$$

另一方面，当$|\xi'|\leqq\varepsilon$时，我们有

$$\widetilde{P}(\xi+\xi')/\widetilde{P}(\xi)\leqq C_2,$$

这是因为

$$D^{\alpha}P(\xi+\xi')=\sum_{\beta}\frac{(\xi')^{\beta}}{(\beta)!}D^{\alpha+\beta}P(\xi),$$

从而，当$|\xi'|\leq\varepsilon$时，$|D^{\alpha}P(\xi+\xi')|/\widetilde{P}(\xi)$是有界的．所以我们有

$$|u(0)|\leq C_1'C_2\int\left(\int_{\xi'^2+\eta'^2\leq\varepsilon^2}|\hat{v}(\xi+\xi'+i\eta')|/\widetilde{P}(\xi+\xi')d\xi'd\eta'\right)d\xi\leq C_3\|v\|', \tag{11}$$

其中
$$\|v\|'=\int_{|\eta|\leq\varepsilon}\left(\int|\hat{v}(\xi+i\eta)|/\widetilde{P}(\xi)\,d\xi\right)d\eta\quad(u\in C_0^{\infty}(R^n)),$$

而C_3是某个只依赖于ε的常数．

我们指出，$\|v\|'$的有限性可由第六章§4中的Paley-Wiener定理得出来．考虑空间$\widetilde{C}_0^{\infty}(R^n)$，它是$C_0^{\infty}(R^n)$关于范数$\|v\|'$的完备化空间．这时，由Hahn-Banach延拓定理可知，线性泛函L:

$$v=P(D)u\to u(0)\quad(\text{其中的}u\in C_0^{\infty}(R^n))$$

可以延拓为一个定义在$\widetilde{C}_0^{\infty}(R^n)$上的连续线性泛函$L$．同空间$L^1(R^n)$中的情形一样，我们知道存在某个关于测度$\widetilde{P}(\xi)^{-1}d\xi d\eta$是a. e. 有界的Baire函数$k(\xi+i\eta)$，使得延拓后的线性泛函$L$可以表示为

$$L(v)=\int_{|\eta|\leq\varepsilon}\left(\int\hat{v}(\xi+i\eta)k(\xi+i\eta)/\widetilde{P}(\xi)\cdot d\xi\right)d\eta. \tag{12}$$

当$v_h(x)\in C_0^{\infty}(R^n)$在$\mathfrak{D}(R^n)$的拓扑下随$h\to\infty$而趋于0时，$v_h(x)e^{\langle x,\eta\rangle}$也在$\mathfrak{D}(R^n)$的拓扑下对于满足$|\eta|\leq\varepsilon$的$\eta$一致趋于零．因此，由第六章§1，我们容易看出，作为ξ的函数的$\hat{v}_h(\xi+i\eta)$在$\mathfrak{S}(R^n)$的拓扑下对于满足$|\eta|\leq\varepsilon$的η一致趋于零．所以，由(12)可知L定义了一个分布$T\in\mathfrak{D}(R^n)'$．因此，由第六章§3的(5)可知

$$L(v)=(T*\check{v})(0)=(\check{T}*v)(0). \tag{13}$$

因此，只要我们取$E=\check{T}$，则定理2得证．这时，(3)式显然可以从(11)式得出来．

§11. 具有一致强度的微分算子

上一节的存在定理可以推广到线性微分算子

$$P(x,D)=\sum_{\alpha}a_{\alpha}(x)D_{\alpha}, \tag{1}$$

它的系数$a_{\alpha}(x)$在R^n的有界开域Ω内是连续的．

定义 令$\widetilde{P}(x,\xi)=\left(\sum_{\alpha}|P^{(\alpha)}(x,\xi)|^2\right)^{1/2}$，其中的$x$看作参数．如果

$$\sup_{x,y\in\Omega,\xi\in R^n}\widetilde{P}(x,\xi)/\widetilde{P}(y,\xi)<\infty, \tag{2}$$

则称$P(x,D)$在Ω内是一致强度的算子．

例 考虑微分算子$P(x,D)=\sum_{|s|,|t|\leq m}D^{s}a_{s,t}(x)D^{t}$，其系数在$\Omega$内是$C^{\infty}$的有界实函数且$a_{s,t}(x)=a_{t,s}(x)$，如果存在某个正的常数$\delta$，使得

$$\sum_{|s|,|t|=m} \xi^s a_{s,t}(x)\xi^t \geqq \delta\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\right)^m \text{在}\Omega\text{内成立}, \tag{3}$$

则称 $P(x, D)$ 是**强椭圆**的 (见第六章 § 9). 这时, $P(x, D)$ 必定满足条件(2). 下面, 令 $P(x, D)$ 在 R^{n-1} 的某有界开域 Ω 内是强椭圆的. 则称

$$\frac{\partial}{\partial x_n} - P(x, D) \tag{4}$$

是乘积空间 $\Omega \times \{x_n;\ 0 < x_n\}$ 内的一个**抛物算子**. 容易看出算子(4)在此乘积空间内也是一致强度的.

定理(Hörmander[5]) 设 $P(x, D)$ 在 R^n 的有界开域 Ω 内是一致强度的算子. 则对任何一点 x^0, 总存在 Ω 的某个开子域 Ω_1, 使得 $x^0 \in \Omega_1$ 并且方程 $P(x, D)u = f$ 对每一个 $f \in L^2(\Omega_1)$ 都有一个分布解 $u \in L^2(\Omega_1)$, 此外, 对任何一个固定的点 $x \in \Omega_1$ 以及每一个弱于 $P(x, D)$ 的 $Q(D)$, 该分布解 u 都使得 $Q(D)u \in L^2(\Omega_1)$.

证明 记 $P(x^0, D) = P_0(D)$. 所有具有常系数且弱于 $P_0(D)$ 的微分算子组成的集合是一个有限维的线性空间. 这是因为, 这些算子的阶数都不可能大于 $P_0(D)$ 的阶数. 因此, 存在 $P_1(D)$, $P_2(D), \cdots, P_N(D)$, 它们构成了弱于 $P_0(D)$ 的那些微分算子的一个基底. 于是我们可以把 $P(x, D)$ 表示为

$$P(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D), \ b_j(x^0) = 0, \tag{5}$$

其中, 诸 $b_j(x)$ 是 Ω 内唯一确定的连续函数.

由上一节的结果可知, 存在一个由 $L^2(\Omega_1)$ 入 $L^2(\Omega_1)$ 内的有界线性算子 T, 使得

$$P_0(D)Tf = f \text{ 对所有的 } f \in L^2(\Omega_1) \text{ 都成立}, \tag{6}$$

并且诸算子 $P_j(D)T$ 作为由 $L^2(\Omega_1)$ 入 $L^2(\Omega_1)$ 内的算子都是有界的. 这里, Ω_1 是 Ω 的任一开子域. 我们只需把 Tf 取为 $E * f_1$ 在 Ω_1 上的限制, 这里, 在 Ω_1 内, $f_1 = f$, 而在 $R^n - \Omega_1$ 内, $f_1 = 0$.

方程 $P(x, D)u = f$ 等价于

$$P_0(D)u + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D) u = f. \tag{7}$$

我们需要寻求形如 $u = Tv$ 的解. 把它代入(7)之后, 由(6)可得

$$v + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D) Tv = f. \tag{8}$$

用 C 表示由 $L^2(\Omega_1)$ 入 $L^2(\Omega_1)$ 内的诸有界线性算子 $P_j(D)T$ 的范数之和. 因为 $b_j(x)$ 都是连续的且 $b_j(x^0) = 0$, 所以我们可以把 $\Omega_1 \ni x^0$ 选得如此之小, 使得

$$C|b_j(x)| < 1/N \text{ 对每一个 } x \in \Omega_1 \ (j = 1, 2, \cdots, n) \text{ 都成立}.$$

我们可以假设上面这个不等式对属于 Ω_1 的紧闭包的任何一个 x 都是成立的. 因此, 算子 $\sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D) T$ 的范数小于 1, 从而可以得到方程(8)的 Neumann 级数解(第二章§1的定理2):

$$v = (I + \sum_{j=1}^{N} b_j P_j(D) T)^{-1} f = Af,$$

其中，A 是一个由 $L^2(\Omega_1)$ 入 $L^2(\Omega_1)$ 内的有界线性算子. 因此，$u=TAf$ 就是所要寻求的关于方程 $P(x,D)u=f$ 的解.

§ 12. 亚椭圆性(Hörmander 定理)

在第二章 § 7 中，我们已经定义过 $P(D)$ 的亚椭圆性概念，并且还证明过 Hörmander 定理的这样一个结论，即如果 $P(D)$ 是亚椭圆的，则对于任何一个正的大常数 C_1，总存在某个正的常数 C_2 使得，对于代数方程 $P(\zeta)=0$ 的一切解 $\zeta=\xi+i\eta$ 都有

$$\text{当} |\eta|<C_1 \text{时}, |\xi|<C_2. \tag{1}$$

为了证明逆命题，即(1)蕴涵着 $P(D)$ 的亚椭圆性，我们需要

引理(Hörmander[1]) 由(1)必可以得到

$$\text{当 } \xi\in R^n \text{ 且 } |\xi|\to\infty \text{ 时}, \sum_{|\alpha|>0}|P^{(\alpha)}(\xi)|^2/\sum_{|\alpha|\geq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)|^2\to 0. \tag{2}$$

证明 我们首先证明，对任何一个实向量 $\Theta\in R^n$ 都有

$$\text{当 } \xi\in R^n \text{ 且 } |\xi|\to\infty \text{时}, P(\xi+\Theta)/P(\xi)\to 1. \tag{3}$$

[在适当地选取坐标之后，我们可以认为 $\Theta=(1,0,0,\cdots,0)$. 由(1)可知

$$\text{当} |\eta|<C_1 \text{ 和 } |\xi|>C_2 \text{时}, P(\xi+i\eta)\neq 0.$$

这时，如果 $|\xi|\geq C_1+C_2$ 且 $P(\zeta')=0$，则不等式 $|\xi-\zeta'|\geq C_1$ 成立. 这是因为，令 $\zeta'=\xi'+i\eta'$ 之后就必定有，或者 $|\eta'|\geq C_1$，或者相反地 $|\xi'|<C_2$，从而 $|\xi-\zeta'|\geq C_1$. 给予 $\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$ 以固定值之后，我们就可以把 $P(\xi)$ 写为

$$P(\xi)=C\prod_{k=1}^{m}(\xi_1-t_k),\ C\neq 0,$$

其中，$(t_k,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是 P 的零点. 于是，当 $|\xi|\geq C_1+C_2$ 时，我们就有 $|t_k-\xi_1|\geq C_1$. 因此，当 $|\xi|\geq C_2+C_2$ 时

$$\frac{P(\xi+\Theta)}{P(\xi)}=\prod_{k=1}^{m}\frac{\xi_1+1-t_k}{\xi_1-t_k}=\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{1}{\xi_1-t_k}\right)$$

满足

$$\left|\frac{P(\xi+\Theta)}{P(\xi)}-1\right|\leq mC_1^{-1}(1+C_1^{-1})^{m-1}.$$

只要把 C_2 取得充分大，我们就可以把 C_1 取得任意大 于是我们就证明了(3).

根据 Taylor 公式，我们有

$$P(\xi+\eta)=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}P^{(\alpha)}(\xi)\eta^{\alpha},$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{k}t_iP(\xi+\eta^{(i)})=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}P^{(\alpha)}(\xi)\sum_{i=1}^{k}t_i(\eta^{(i)})^{\alpha}, \tag{4}$$

其中，$\eta^{(i)}$是任意实向量而t_i是任意复数．用适当选取k、t_i和$\eta^{(i)}$的方法就可以使系数$\sum_{i=1}^{k} t_i(\eta^{(i)})^\alpha$，$|\alpha|\leqq m$，取得给定的任何值．否则，必定存在不全为零的常数$C_\alpha$，$|\alpha|\leqq m$，使得对于每一个$\eta$都有$\sum_{\alpha} C_\alpha \eta^\alpha=0$．因此，对于实向量$\eta^{(i)}$，有

$$P^{(\alpha)}(\xi)=\sum_{i=1}^{k} t_i P(\xi+\eta^{(i)}).$$

因为当$|\alpha|\neq 0$时，上式右端的主部必须互相抵消掉，所以必定有$\sum_{i=1}^{k} t_i=0$．于是由(3)，我们就得到(2)．

系　假定$P_1(\xi)$和$P_2(\xi)$都满足(2)．于是$P(\xi)=P_1(\xi)\cdot P_2(\xi)$也满足(2)．此外，如果$Q_j(D)$弱于$P_j(D)$ $(j=1, 2)$，则$Q_1(D)Q_2(D)$就弱于$P(D)$．

证明　利用关于函数乘积的微分的 Leibniz 公式，我们知道$P^{(\alpha)}(\xi)$是$P_1(\xi)$和$P_2(\xi)$的导数(出现的导数的阶数之和$\leqq|\alpha|$)的乘积的某种线性组合．因此，(2)对于$P(\xi)$成立．系的后一个结论可以类似地予以证明．

现在我们就来证明

定理(Hörmander[1])　$P(D)$是亚椭圆的，当且仅当条件(2)成立．

证明　“仅当”部分已经证明过了(第二章§7以及前面刚证明了的引理)．我们来证明“当”的部分．

设Ω是R^n的一个开子域．考虑分布$u\in\mathfrak{D}(\Omega)'$．如果对于任何一个$\varphi_0\in C_0^\infty(\Omega)$，$u_0=\varphi_0 u$的 Fourier 变换$\hat{u}_0$都满足(见第六章§2)

$$\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^k|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi<\infty, \text{亦即如果 } u_0=\varphi_0 u\in W^{k,2}(R^n), \tag{5}$$

则称分布u属于$H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$．

借助于第六章§7的 Sobolev 引理，“当”的部分可以由下述命题得到证明，即

$$\begin{cases}\text{设 } P(\xi) \text{ 满足(2)．如果分布 } u\in\mathfrak{D}(\Omega)' \text{ 满足}\\ P(D)u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega), \text{这里，} s \text{ 是一个正数，}\\ \text{则 } u \text{ 必属于 } H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega).\end{cases} \tag{6}$$

这是因为，如果在Ω内$P(D)u\in C^\infty$，则由微分的 Leibniz 公式可知，对每一个正数s都有$P(D)u\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$．

(6) 的证明是建立在下述两个引理的基础上的，即

引理 1　设$f\in W^{k,2}(R^n)$而$\psi\in C_0^\infty(R^n)$，$k\geqq 0$．则$\psi f\in W^{k,2}(R^n)$．

引理 2　设$P(\xi)$满足(2)．则存在某个正常数μ，使得当$\xi\in R^n$，$|\xi|\to\infty$时，对每一个$\alpha\neq 0$都有$|P^{(\alpha)}(\xi)\xi^\mu|/|P(\xi)|\to 0$．

引理1的证明缓一步给出，至于引理2，这里将不予证明(关于引理2的证明，我们建议读者去看 L. Hörmander[6]或A. Friedman[1])．

下面,设 Ω_1 和 Ω_0 是 Ω 的任何这样的开子域,即它们的闭包 Ω_1^a 和 Ω_0^a 都是紧的并且 $\Omega_1^a \subseteqq \Omega_0$, $\Omega_0^a \subseteqq \Omega$. 由第三章§11的 Schwartz 定理可知,当把分布 $u \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ 看作是属于 $\mathfrak{D}(\Omega_0)'$ 的一个分布时,它是某个函数 $v(x) \in L^2(\Omega_0)$ 的形如 $D^t v$ 的一个分布导数. 设 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ 是这样的函数,使得在 Ω_1 内 $\varphi(x)=1$. 这时, $u=u_0=D^t \varphi v$ 这样的分布都属于 $\mathfrak{D}(\Omega_1)$. 因为 $\varphi v \in L^2(R^n)$,所以我们知道,存在某个(也许是负的)整数 k, 使得

$$P^{(\alpha)}(D)u_0 = P^{(\alpha)}(D)D^t \varphi v \in W^{k,2}(R^n) \quad \text{对每一个 } \alpha \text{ 都成立.} \tag{7}$$

因此,由引理1和广义的 Leibniz 公式(见第一章§8)可以得到

$$P(D)\varphi_1 u_0 = \varphi_1 P(D) u_0 + \sum_{|\alpha|>0} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha \varphi_1 \cdot P^{(\alpha)}(D) u_0, \tag{8}$$

我们可以从 $P(D)u_0 \in H^s_{loc}(\Omega)$ 看出,对任何 $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega_1)$ 都有

$$P(D)\varphi_1 u_0 \in W^{k_1,2}(R^n), \text{其中的 } k_1 = \min(s, k). \tag{9}$$

因此, $u_1(x)=\varphi_1(x)u_0(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{u}_1(\xi)$ 满足

$$\int_{R^n} |P(\xi)\hat{u}_1(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{k_1} \, d\xi < \infty, \tag{10}$$

从而由引理2可知

$$\int_{R^n} |P^{(\alpha)}(\xi)\hat{u}_1(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{k_1+\mu} \, d\xi < \infty, \text{这就是说}$$

$$\text{对每一个 } \alpha \neq 0 \text{ 都有 } P^{(\alpha)}(D)u_1 \in W^{k_1+\mu,2}(R^n). \tag{11}$$

设 Ω_2 是 Ω_1 的任何一个这样的开子域,使得闭包 Ω_2^a 是紧的并且包含于 Ω_1 之内. 于是,利用前面的(8)和(11),我们就证明了对任何一个 $\varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega_2)$ 都有

$$P(D)\varphi_2 u_1 \in W^{k_2,2}(R^n), \text{其中的 } k_2 = \min(s, k_1+\mu), \text{从而}$$

$$\text{对每一个 } \alpha \neq 0 \text{ 都有} P^{(\alpha)}(D)\varphi_2 u_1 \in W^{k_2+\mu,2}(R^n).$$

重复这种推理有限次之后,我们看见,对 Ω 的任何这样的开子域 Ω', 即 Ω' 的闭包是紧的且包含于 Ω 之内,只要 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ 就一定有

$$P^{(\alpha)}(D)\varphi u \in W^{s,2}(R^n) \text{ 对一切 } \alpha \neq 0 \text{ 都成立.}$$

因此,由 $P^{(\alpha)}(\xi) = \text{常数} \neq 0$ 就得出了 $\varphi u \in W^{s,2}(R^n)$.

引理1的证明 ψf 的 Fourier 变换是

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \hat{\psi}(\eta) \hat{f}(\xi-\eta) d\eta \text{ (见第六章§3的定理6).}$$

所以我们应该证明,对于 $s \gtreqless 0$ 有

$$\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s \left| \int_{R^n} \hat{\psi}(\eta) \hat{f}(\xi-\eta) d\eta \right|^2 d\xi < \infty.$$

由 Schwarz 不等式可知,上式小于

$$\begin{aligned} &\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s \left[\int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)| d\eta \cdot \int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)| \cdot |\hat{f}(\xi-\eta)|^2 d\eta \right] d\xi \\ &= \int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)| d\eta \left[\int_{R^n} \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\psi}(\eta)| \cdot |\hat{f}(\xi-\eta)|^2 d\xi d\eta \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

这时，我们需使用不等式

$$(1+|\xi|^2)^s \leqq 4^{|s|}(1+|\eta|^2)^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^s, \tag{13}$$

后者可以用

$$\frac{1+|\xi|^2}{1+|\xi-\eta|^2} \leqq 4(1+|\eta|^2), \quad 4(1+|\xi|^2) \geqq \frac{1+|\xi-\eta|^2}{1+|\eta|^2}$$

来证明. 由(13)可知，(12)的右端小于$\int_{R^n}|\hat{\psi}(\eta)|d\eta$乘以

$$4^{|s|}\int_{R^n}|\hat{\psi}(\eta)|(1+|\eta|^2)^{|s|}d\eta \cdot \left(\int_{R^n}(1+|\xi-\eta|^2)^s|\hat{f}(\xi-\eta)|^2 d\xi\right).$$

因为$f\in W^{s,2}(R^n)$且$\hat{\psi}(\eta)\in\mathfrak{S}(R^n)$，所以上式的积分是收敛的.

因此，我们的引理得证.

进一步的研究成果

1. 设$P(x, D)$是一个具有$C^\infty(\Omega)$系数的线性偏微分算子. 如果它满足以下两个条件：i) $P(x^0, D)$对于每一个固定的$x^0\in\Omega$都是亚椭圆的；ii)对于每一个固定的x^0以及$x'\in\Omega$，当$\xi\in R^n$，$|\xi|\to\infty$时，总有$P(x^0, \xi)=o(P(x', \xi))$，则称$P(x, D)$在$\Omega\subseteq R^n$内是形式亚椭圆的. L. Hörmander[5]和B. Malgrange[2]已经证明了对于这种算子$P(x,D)$，如果$f\in C^\infty$，则方程$P(x, D)u=f$的任何一个分布解$u\in\mathfrak{D}(\Omega)'$，在改变它在某个测度为零的集合上的值之后，$u$就在使$f$为$C^\infty$的那个开子域$\subseteq\Omega$内是$C^\infty$的. 可以改进前面关于常系数情形的证明，使它可以应用于形式亚椭圆的情形，例如可参看J. Peetre[1].

2. I. G. Petrowsky[1]实质上已经证明了$P(D)u=0$的一切分布解$u\in\mathfrak{D}(R^n)'$是R^n内的解析函数的充要条件是，$P(\xi)$的最高次(即m次)的齐次部分$P_m(\xi)$对于$\xi\in R^n$没有零点. 如果$P(\xi)$满足此条件，则称$P(D)$是(解析)椭圆的. 对这种情形已经证明了次数m是偶数并且$P(D)$是亚椭圆的. 我们指出，解析椭圆算子$P(D)$的亚椭圆性也可以用第六章§9的Friedrichs定理予以证明. 这是因为，由于$P_m(\xi)$没有零点，故用Fourier变换容易看出$P(D)$或$-P(D)$是强椭圆的. 至于Petrowsky定理的证明，例如可参看L. Hörmander[6]、F. Trèves[1]以及C. B. Morrey-L. Nirenberg[1].

第七章 对偶算子

§1. 对偶算子

转置矩阵的概念可以通过下面的定理1推广成为对偶算子的概念.

定理1 设X, Y是局部凸线性拓扑空间而X'_s, Y'_s分别是其强对偶空间. 设T是映$D(T)\subseteq X$入Y内的线性算子. 考虑积空间$X'_s\times Y'_s$中满足条件

$$\langle Tx, y'\rangle=\langle x, x'\rangle \text{ 对于一切 } x\in D(T) \text{成立} \tag{1}$$

的点$\{x', y'\}$. 则当且仅当$D(T)$在X中稠密时x'是由y'唯一确定的.

证明 由于问题是线性的,我们只需研究条件:

$$\text{由}\langle x, x'\rangle=0 \quad \text{对于一切 } x\in D(T) \text{成立必导致 } x'=0.$$

于是,由于线性泛函x'的连续性,"当"的部分是显然的. 假设$D(T)^a\neq X$. 则由Hahn-Banach定理,必存在$x'_0\neq 0$使得对一切$x\in D(T)$, $\langle x, x'_0\rangle=0$; 因而"仅当"部分也就得证.

定义1 当且仅当$D(T)^a=X$时(1)定义一个满足$T'y'=x'$的线性算子T'. T'称为T的对偶或共轭算子;它的定义域$D(T')$是那些使得存在满足(1)的$x'\in X'_s$的$y'\in Y'_s$的全体,而且$T'y'=x'$. 因而T'是映$D(T')\subseteq Y'_s$入X'_s内的线性算子且使得

$$\langle Tx, y'\rangle=\langle x, T'y'\rangle \quad \text{对一切 } x\in D(T) \text{和一切 } y'\in D(T') \text{成立}. \tag{2}$$

定理2 如果$D(T)=X$且T是连续的,则T'是映Y'_s入X'_s内的连续线性算子.

证明 对于任何$y'\in Y'_s$, $\langle Tx, y'\rangle$是$x\in X$的连续线性泛函,因而存在$x'\in X'_s$以使$T'y'=x'$. 设B是X的有界集. 那么,由T的连续性,象$TB=\{Tx; x\in B\}$是Y的有界集. 于是,根据定义关系式$\langle Tx, y'\rangle=\langle x, x'\rangle$, 由$y'$按$Y'$的有界收敛拓扑(在第四章§7中给出的)收敛于0必导致x'按X'的有界收敛拓扑收敛,因此T'是映Y'_s入X'_s内的连续线性算子.

例1 设$X=Y$是赋以(l^2)-范数的n维欧几里得空间. 对于任意连续线性算子$T\in L(X, X)$,令

$Tx=y$, 其中$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 那么$y_i=\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_j$ $(t=1, 2, \cdots, n)$, 从而对于$z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$有$\langle Tx, z\rangle=\langle y, z\rangle=\sum_j y_jz_j=\sum_i\left(\sum_j t_{ij}x_j\right)z_i=\sum_j x_j\left(\sum_i t_{ij}z_i\right)$. 于是$T'z=w$由$w_j=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}z_i$ $(j=1, 2, \cdots, n)$给出. 这就证明了相应于T'的矩阵是相应于T的矩阵的转置矩阵.

例2 设$X=Y$是实Hilbert空间(l^2), 又设$T_n\in L(X, X)$由

$$T_n(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$$

定义. 则由于

$$\langle T_n(x_1, x_2, \cdots), (z_1, z_2, \cdots)\rangle = x_n z_1 + x_{n+1} z_2 + x_{n+2} z_3 + \cdots,$$

我们得到

$$T'_n(z_1, z_2, \cdots) = (\overbrace{0, 0, \cdots, 0}^{n-1}, z_1, z_2, \cdots).$$

因为 $\|T_n(x_1, x_2, \cdots)\| = \left(\sum_{m=n}^{\infty} x_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ (当 $n \to \infty$) 及 $\|T'_n(z_1, z_2, \cdots)\| = \|(z_1, z_2, \cdots)\|$, 我们有

命题 1 映 $L(X, Y)$ 入 $L(Y'_s, X'_s)$ 内的映射 $T \to T'$ 按算子的简单收敛拓扑一般不是连续的, 即由 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ 对于一切 $x \in X$ 成立不一定能推出 $\lim\limits_{n\to\infty} T'_n y' = T' y'$ 对于一切 $y' \in Y'$ 按 X'_s 的强对偶拓扑成立.

定理 2' 设 T 是把赋范线性空间 X 映入赋范线性空间 Y 内的有界线性算子, 则其对偶算子 T' 是映 Y'_s 入 X'_s 内的有界线性算子且满足

$$\|T\| = \|T'\|. \tag{3}$$

证明 由定义关系式 $\langle Tx, y'\rangle = \langle x, x'\rangle$, 我们得到

$$\|T'y'\| = \|x'\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle x, x'\rangle|$$
$$= \sup_{\|x\|\le 1} |\langle Tx, y'\rangle| \leqq \|y'\| \cdot \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| \leqq \|y'\| \cdot \|T\|,$$

因而 $\|T'\| \leqq \|T\|$. 反向不等式证明如下. 对于任何 $x_0 \in X$, 存在 $f_0 \in Y'$ 使得 $\|f_0\| = 1$ 及 $f_0(Tx_0) = \langle Tx_0, f_0\rangle = \|Tx_0\|$. 于是 $f'_0 = T' f_0$ 满足 $\langle x_0, f'_0\rangle = \|Tx_0\|$, 因而

$$\|Tx_0\| = \langle x_0, T' f_0\rangle \leqq \|T'\| \|f_0\| \cdot \|x_0\| = \|T'\| \cdot \|x_0\|, \text{ 即}$$
$$\|T\| \leqq \|T'\|.$$

定理 3 i) 如果 T 和 S 均属于 $L(X, Y)$, 则 $(\alpha T + \beta S)' = (\alpha T' + \beta S')$. ii) 设线性算子 T, S 使得 $D(T), D(S), R(T)$ 和 $R(S)$ 都包含于 X. 如果 $S \in L(X, X)$ 且 $D(T)^a = X$, 则

$$(ST)' = T'S'. \tag{4}$$

此外, 如果 $D(TS)^a = X$, 则

$$(TS)' \supseteq S'T', \text{ 即 } (TS)' \text{ 是 } S'T' \text{ 的扩张.} \tag{5}$$

证明 i) 是显然的. ii) $D(ST) = D(T)$ 在 X 中是稠密的, 因而 $(ST)'$ 存在. 如果 $y \in D((ST)')$, 则对于任何 $x \in D(T) = D(ST)$, $\langle Tx, S'y\rangle = \langle STx, y\rangle = \langle x, (ST)'y\rangle$. 这就证明 $S'y \in D(T')$ 和 $T'S'y = (ST)'y$, 即 $(ST)' \subseteq T'S'$. 反之, 设 $y \in D(T'S')$, 即 $S'y \in D(T')$. 则对于任何 $x \in D(T) = D(ST)$, $\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S'y\rangle = \langle x, T'S'y\rangle$. 这就证明 $y \in D((ST)')$ 和 $(ST)'y = T'S'y$, 即 $T'S' \subseteq (ST)'$. 我们于是证明了(4).

为了证明 (5), 设 $y \in D(S'T') = D(T')$. 则对于任何 $x \in D(TS)$, 有 $\langle TSx, y\rangle = \langle Sx, T'y\rangle = \langle x, S'T'y\rangle$. 这就证明了 $y \in D((TS)')$ 和 $(TS)'y = S'T'y$, 即 $S'T' \subseteq (TS)'$,

§2. 伴随算子

转置共轭矩阵的概念可以通过下面定义 1 推广成为伴随算子的概念.

定义 1 设 X, Y 是 Hilbert 空间，而 T 是映 $D(T)\subseteq X$ 入 Y 内的线性算子. 设 $D(T)^a=X$ 而 T' 是 T 的对偶算子. 于是 $\langle Tx, y'\rangle=\langle x, T'y'\rangle$ 对于 $x\in D(T)$, $y'\in D(T')$ 成立. 如果我们用 J_X 表示一对一的保范共轭线性对应 $X'_s\ni f\longleftrightarrow y_f\in X$ (在第三章 §6 的系 1 中定义的), 则

$$\langle Tx, y'\rangle=y'(Tx)=(Tx, J_Y y'), \langle x, T'y'\rangle=(T'y')(x)=(x, J_X T'y').$$

我们于是有

$$(Tx, J_Y y')=(x, J_X T'y'), \quad 即 \quad (Tx, y)=(x, J_X T' J_Y^{-1}y).$$

对于 $Y=X$ 的特殊情况, 我们记

$$T^*=J_X T' J_X^{-1}$$

且称 T^* 为 T 的伴随算子.

注 如果 X 是复 Hilbert 空间 (l^2), 象前节例中一样, 我们看出, 相应于 T^* 的矩阵是相应于 T 的矩阵的转置共轭矩阵.

同对偶算子的情况一样, 我们可以证明

定理 1 当且仅当 $D(T)^a=X$ 时 T^* 存在. 其定义如下: $y\in X$ 是在定义域 $D(T^*)$ 内当且仅当存在 $y^*\in X$ 使得

$$(Tx, y)=(x, y^*) \quad 对于一切 x\in D(T) 成立, \tag{1}$$

而我们定义 $T^*y=y^*$.

利用线性算子 A 的图象 $G(A)$ (图象是在第二章 §6 引入的) 我们可以将上面的定理重新写为:

定理 2 我们引入映 $X\times X$ 入 $X\times X$ 内的连续线性算子 V 为

$$V\{x, y\}=\{-y, x\}. \tag{2}$$

则 $(VG(T))^{\perp}$ 是线性算子的图象当且仅当 $D(T)^a=X$, 而且事实上, 我们有

$$G(T^*)=(VG(T))^{\perp}. \tag{3}$$

证明 条件 $\{-Tx, x\}\perp\{y, y^*\}$ 等价于 $(Tx, y)=(x, y^*)$. 于是定理 2 由定理 1 得证.

系 T^* 是闭线性算子, 因为线性子空间的正交补是闭线性子空间.

定理 3 设 T 是映 $D(T)\subseteq X$ 入 X 内的线性算子且使得 $D(T)^a=X$. 则 T 容许有闭线性扩张当且仅当 $T^{**}=(T^*)^*$ 存在, 即当且仅当 $D(T^*)^a=X$.

证明 充分性. 由定义我们有 $T^{**}\supseteq T$, 且由上面的系知 $T^{**}=(T^*)^*$ 是闭的.

必要性. 设 S 是 T 的一个闭扩张. 则 $G(S)$ 包含 $G(T)^a$ 作为它的一个闭线性子空间, 因而 $G(T)^a$ 是线性算子的图象. 但是由内积的连续性有 $G(T)^a=G(T)^{\perp\perp}=(G(T)^{\perp})^{\perp}$, 而且, 另外由 $VG(T^*)=G(T)^{\perp}$, 我们得到 $(VG(T^*))^{\perp}=G(T)^{\perp\perp}$. 所以, $(VG(T^*))^{\perp}$ 是线性算子的图象. 于是由定理 2 有 $D(T^*)^a=X$ 且 T^{**} 存在.

系 在 $D(T)^a=X$ 的条件下, 当且仅当 $T=T^{**}$ 时 T 是闭线性的.

证明 充分性是显然的. 注意上面得到的公式 $G(T)^a=G(T^{**})$, 必要性也就证明了. 因为, 由 $G(T)=G(T)^a$ 必导致 $T=T^{**}$.

定理 4 处处有定义的闭线性算子必是连续线性算子.

证明 由闭图象定理, 这是显然的.

定理 5 如果 T 是有界线性算子, 则 T^* 也是有界线性算子, 且

$$\|T\|=\|T^*\|.$$

§3. 对称算子和自伴算子

一个厄尔米矩阵是与它的转置共轭矩阵相等的矩阵. 我们知道, 这样的矩阵可以利用向量空间的适当的(复)旋转变成对角矩阵, 而在这样的向量空间中矩阵起着线性算子的作用. 现将厄尔米矩阵的概念推广成为 Hilbert 空间中的自伴算子的概念.

定义 1 设 X 是 Hilbert 空间. 映 $D(T)\subseteq X$ 入 X 内的线性算子称为对称的, 如果 $T^*\supseteq T$, 即如果 T^* 是 T 的扩张. 请注意, 由 T^* 存在的条件必导致 $D(T)^a=X$.

命题 1 如果 T 是对称的, 则 T^{**} 也是对称的.

证明 因为 T 是对称的, 我们有 $D(T^*)\supseteq D(T)$ 及 $D(T)^a=X$. 所以 $D(T^*)^a=X$, 因此 $T^{**}=(T^*)^*$ 存在. T^{**} 一定是 T 的扩张, 因而 $D(T^{**})\supseteq D(T)$. 于是, 重新利用 $D(T)^a=X$, 我们有 $D(T^{**})^a=X$, 从而 $T^{***}=(T^{**})^*$ 存在. 由于 $T^*\supseteq T$, 我们有 $T^{**}\subseteq T^*$, 于是 $T^{***}\supseteq T^{**}$, 这就证明 T^{**} 是对称的.

系 对称算子 T 有闭对称扩张 $T^{**}=(T^*)^*$.

定义 2 线性算子 T 称为自伴的, 如果 $T=T^*$.

命题 2 自伴算子是闭的. 而处处有定义的对称算子是有界和自伴的.

证明 由于是自身的伴随算子, 任一自伴算子是闭的. 而命题的最后论断可由处处有定义的闭算子必有界(闭图象定理)这一事实得证.

例 1 (Hilbert-Schmidt 型积分算子) 设 $-\infty\leqq a<b\leqq\infty$ 并考察 $L^2(a, b)$. 设 $K(s, t)$ 是对于 $a\leqq s, t\leqq b$ 的复值可测函数且满足

$$\int_a^b\int_a^b|K(s, t)|^2 ds\, dt<+\infty.$$

对于任一 $x(t)\in L^2(a, b)$, 我们定义算子 K 为

$$(K\cdot x)(s)=\int_a^b K(s, t)x(t)\, dt,$$

利用 Schwarz 不等式和 Fubini-Tonelli 定理, 我们有

$$\int_a^b|(K\cdot x)(s)|^2 ds\leqq\int_a^b\int_a^b|K(s, t)|^2 ds\, dt\int_a^b|x(t)|^2 dt.$$

因此 K 是映 $L^2(a, b)$ 入 $L^2(a, b)$ 内的有界线性算子且有 $\|K\|\leqq\left(\int_a^b\int_a^b|K(s, t)|^2 ds\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$. 容易看

出算子 K^* 是用 $(K^*y)(t)=\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\,ds$ 定义. 因此K是自伴的,当且仅当$K(s,t)=\overline{K(t,s)}$对于几乎所有的 s,t 成立.

例 2 (量子力学中的坐标算子) 设 $X=L^2(-\infty,\ \infty)$. 令 $D=\{x(t);\ x(t)$和 $t\cdot x(t)$均$\in L^2(-\infty,\infty)\}$. 则在$D$上用 $Tx(t)=t\cdot x(t)$定义的算子T是自伴的.

证明 显然 $D^a=X$, 因为诸有限区间的特征函数的线性组合在 $L^2(-\infty,\ \infty)$中是强稠密的. 设 $y\in D(T^*)$并令 $T^*y=y^*$, 则对于一切 $x\in D=D(T)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y^*(t)}dt.$$

如果我们令 $x(t)$是区间$[\alpha,\ t_0]$的特征函数, 则有$\int_\alpha^{t_0} t\overline{y(t)}dt=\int_\alpha^{t_0}\overline{y^*(t)}dt$, 于是利用微分, 得 $t_0\cdot\overline{y(t_0)}=\overline{y^*(t_0)}$对于几乎所有的 t_0成立. 所以有 $y\in D$ 和 $T^*y(t)=t\cdot y(t)$. 反之,很显然,由 $y\in D$ 必导致 $y\in D(T^*)$及 $T^*y(t)=t\cdot y(t)$.

例 3 (量子力学中的动量算子) 设 $X=L^2(-\infty,\infty)$. 令D是这种 $x(t)\in L^2(-\infty,\infty)$的全体, $x(t)$在每一有限区间绝对连续且其导数 $x'(t)\in L^2(-\infty,\infty)$. 则在$D$上由$Tx(t)=i^{-1}x'(t)$所定义的算子$T$是自伴的.

证明 设连续函数 $x_n(t)$定义为

$x_n(t)=1$ 对于 $t\in[\alpha,t_0]$, $x_n(t)=0$ 对于 $t\leqq\alpha-n^{-1}$ 和对于 $t\geqq t_0+n^{-1}$,

$x_n(t)$在$[\alpha-n^{-1},\ \alpha]$和$[t_0,\ t_0+n^{-1}]$上是线性函数.

则对于 α, t_0 和 n 的不同的值, 形如$x_n(t)$的函数的线性组合在 $L^2(-\infty,\infty)$中稠密. 于是D在X中稠密.

设 $y\in D(T^*)$及 $T^*y=y^*$. 则对于任何 $x\in D$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y^*(t)}dt.$$

如果我们令 $x(t)$为 $x_n(t)$, 我们得到

$$n\int_{\alpha-n^{-1}}^{\alpha} i^{-1}\overline{y(t)}dt-n\int_{t_0}^{t_0+n^{-1}} i^{-1}\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty} x_n(t)\overline{y^*(t)}dt,$$

因而, 令 $n\to\infty$, 对于几乎所有的 α 和 t_0 我们得到 $i^{-1}(\overline{y(\alpha)}-\overline{y(t_0)})=\int_\alpha^{t_0}\overline{y^*(t)}dt$. 显然, 利用 Schwarz 不等式, 知 $y^*(t)$在任何有限区间上可积. 于是 $y(t_0)$在任何有限区间上关于 t_0 绝对连续, 因而对几乎所有的 t_0 我们有 $i^{-1}y'(t_0)=y^*(t_0)$. 所以有 $y\in D$ 和 $T^*y(t)=i^{-1}y'(t)$. 反之, 设 $y\in D$. 利用分部积分, 则

$$\int_a^b i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}dt=i^{-1}[x(t)\overline{y(t)}]_a^b+\int_a^b x(t)\overline{(i^{-1}y'(t))}dt.$$

根据$x(t)\overline{y(t)}$在$(-\infty,\infty)$上的可积性, 我们得知

$$\lim_{a\downarrow-\infty,\,b\uparrow\infty}|[x(t)\overline{y(t)}]_a^b|=0,\quad \text{因此}\int_{-\infty}^{\infty} i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{(i^{-1}y'(t))}dt.$$

于是 $y\in D(T^*)$ 且 $T^*y(t)=i^{-1}y'(t)$.

定理 1 如果自伴算子具有逆算子 T^{-1}, 则 T^{-1} 也是自伴的.

证明 $T=T^*$ 等价于 $(VG(T))^{\perp}=G(T)$. 我们同样有 $G(T^{-1})=VG(-T)$. 于是由 $(-T)^*=-T^*=-T$, 得 $(VG(-T))^{\perp}=G(-T)$. 从而

$$(VG(T^{-1}))^{\perp}=G(-T)^{\perp}=(VG(-T))^{\perp\perp}=VG(-T)=G(T^{-1}),$$

$$\text{即}\quad (T^{-1})^*=T^{-1}.$$

在上面的证明中, 用到了根据 $(-T)$ 的封闭性而得出的等式 $(VG(-T))^a=VG(-T)$.

系 Hilbert 空间 X 中的对称算子 T 是自伴的, 如果 $D(T)=X$ 或者如果 $R(T)=X$.

证明 $D(T)=X$ 的情况已经证明. 现将证明 $R(T)=X$ 的情况. 因为由 $Tx=0$ 必推出 $0=(Tx,y)=(x,Ty)$ 对于一切 $y\in D(T)$ 成立, 故由 $R(T)=X$ 必有 $x=0$. 所以逆算子 T^{-1} 存在, 且它同 T 一样一定是对称的. 而 $D(T^{-1})=R(T)=X$, 因此处处有定义的对称算子 T^{-1} 必是自伴的. 于是由定理 1 $T=(T^{-1})^{-1}$ 是自伴的.

我们可以由任一闭线性算子构造出自伴算子. 更精确地说, 我们有

定理 2 (J. von Neumann[5]) 对于 Hilbert 空间 X 中满足 $D(T)^a=X$ 的任一闭线性算子 T, 算子 T^*T 和 TT^* 是自伴的, 而 $(I+T^*T)$ 和 $(I+TT^*)$ 都具有有界线性逆.

证明 我们知道, 在乘积空间 $X\times X$ 中 $G(T)$ 和 $VG(T^*)$ 是彼此正交的闭线性子空间且张成整个乘积空间 $X\times X$. 因此, 对于任何 $h\in X$, 有唯一确定的分解

$$\{h,0\}=\{x,Tx\}+\{-T^*y,y\}, \text{其中 } x\in D(T),\ y\in D(T^*). \tag{1}$$

于是 $h=x-T^*y$, $0=Tx+y$. 所以

$$x\in D(T^*T) \text{ 且 } x+T^*Tx=h. \tag{2}$$

由于分解(1)的唯一性, x 是由 h 唯一确定的, 因而处处有定义的逆算子 $(I+T^*T)^{-1}$ 存在.

对于任何 $h,k\in X$, 设

$$x=(I+T^*T)^{-1}h,\ y=(I+T^*T)^{-1}k.$$

则 x 和 $y\in D(T^*T)$ 且由 T 的封闭性, 有 $(T^*)^*=T$. 因此

$$\begin{aligned}(h,(I+T^*T)^{-1}k)&=((I+T^*T)x,y)=(x,y)+(T^*Tx,y)\\&=(x,y)+(Tx,Ty)=(x,y)+(x,T^*Ty)\\&=(x,(I+T^*T)y)=((I+T^*T)^{-1}h,k),\end{aligned}$$

这就证明算子 $(I+T^*T)^{-1}$ 是自伴的. 作为处处有定义的自伴算子, $(I+T^*T)^{-1}$ 是有界算子 由定理 1, 它的逆 $(I+T^*T)$ 从而 T^*T 是自伴的.

因为 T 是闭的, 我们有 $(T^*)^*=T$, 所以由上面所证明的, $TT^*=(T^*)^*T^*$ 是自伴的且 $(I+TT^*)$ 有有界线性逆.

下面, 我们给出一个非自伴, 对称算子的例子:

例 4 设 $X=L^2(0,1)$. 令 D 是满足 $x(0)=x(1)=0$ 及 $x'(t)\in L^2(0,1)$ 的绝对连续函数 $x(t)\in L^2(0,1)$ 的全体. 则在 $D=D(T_1)$ 上由 $T_1x(t)=i^{-1}x'(t)$ 定义的算子 T_1 是对称但非自伴的.

证明 我们将证明 $T_1^*=T_2$, 这里 T_2 定义为

在 $D(T_2)=\{x(t)\in L^2(0,1);\ x(t)$绝对连续且$x'(t)\in L^2(0,1)\}$上，

$$T_2x(t)=i^{-1}x'(t).$$

因为 $D=D(T_1)$ 在 $L^2(0,\ 1)$ 中稠密，故算子 T_1^* 有定义. 设 $y\in D(T_1^*)$ 并令 $T_1^*y=y^*$. 则对于任一 $x\in D=D(T_1)$，有

$$\int_0^1 i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}\,dt=\int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}\,dt.$$

用分部积分，并注意到 $x(0)=x(1)=0$，我们便得

$$\int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}\,dt=-\int_0^1 x'(t)\overline{Y^*(t)}\,dt.\quad \text{这里 } Y^*(t)=\int_0^t y^*(s)ds.$$

因而，由 $x(1)=\int_0^1 x'(t)\,dt=0$，对于任意常数 c，我们有

$$\int_0^1 x'(t)(\overline{Y^*(t)}-i^{-1}\,\overline{y(t)}-\bar{c})\ dt=0\quad \text{对于一切 } x\in D(T_1) \text{ 成立.}$$

另一方面，对于任何 $z(t)\in L^2(0,1)$，函数 $Z(t)=\int_0^t z(t)\,dt-t\int_0^1 z(t)\,dt$ 一定属于 $D(T_1)$. 因此，令上面的$x(t)$为 $Z(t)$我们便得

$$\int_0^1\left\{z(t)-\int_0^1 z(t)\,dt\right\}\cdot(\overline{Y^*(t)}-\overline{i^{-1}y(t)}-\bar{c})\,dt=0.$$

如果令常数 c 使得$\int_0^1 (Y^*(t)-i^{-1}y(t)-c)\,dt=0$，则

$$\int_0^1 z(t)(\overline{Y^*(t)}-\overline{i^{-1}y(t)}-\bar{c})\,dt=0,$$

因而，由 $z\in L^2(0,1)$ 的任意性，我们必有 $Y^*(t)=\int_0^t y^*(t)\,dt=i^{-1}y(t)+c$. 于是有 $y\in D(T_2)$ 和 $T_2y=y^*$. 这就证明 $T_1^*\subseteq T_2$. 又由分部积分，$T_2\subseteq T_1^*$ 也是显然的，所以 $T_2=T_1^*$.

定理 3 如果H是有界自伴算子，则

$$\|H\|=\sup_{\|x\|\leq 1}|(Hx,x)|. \tag{3}$$

证明 令 $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}|(Hx,x)|=\gamma$. 则由$|(Hx,x)|\leqq\|Hx\|.\ \|x\|$，有 $\gamma\leqq\|H\|$. 对于任何实数 λ，我们有

$$|(H(y\pm\lambda z),\ y\pm\lambda z)|=|(Hy,y)\pm 2\lambda Re(Hy,z)+\lambda^2(Hz,z)|$$
$$\leqq\gamma\|y\pm\lambda z\|^2.$$

因而

$$|4\lambda Re(Hy,z)|\leq\gamma(\|y+\lambda z\|^2+\|y-\lambda z\|^2)=2\gamma(\|y\|^2+\lambda^2\|z\|^2).$$

当取 $\lambda=\|y\|/\|z\|$时，便得$|Re(Hy,z)|\leqq\gamma\|y\|\|z\|$. 因此用 $ze^{i\theta}$ 代替 z，我们得到$|(Hy,\ z)|\leqq\gamma\|y\|\|z\|$，从而

$$(Hy,Hy)=\|Hy\|^2\leqq\gamma\|y\|\|Hy\|,\ \text{即}\ \|H\|\leqq\gamma.$$

§4. 酉算子. Cayley 变换

对称算子不必是有界算子. 对称算子H的各种研究可以通过连续算子$(H-iI)(H+iI)^{-1}$,即所谓Cayley变换来进行. 我们将从等距算子的概念开始.

定义 1 映 Hilbert 空间X入X内的有界线性算子T称为(有界) 等距的, 如果T保持内积不变:

$$(Tx, Ty)=(x, y) \quad 对于一切 x, y \in X 成立. \tag{1}$$

特别地,如果$R(T)=X$, 则(有界)等距算子T称为酉算子.

命题 1 对于有界线性算子T,条件(1)等价于等距条件

$$\|Tx\|=\|x\| \quad 对于一切 x\in X 成立. \tag{2}$$

证明 由(1)能推出(2)是显然的. 由(2)我们有

$$4Re(Tx, Ty)=\|T(x+y)\|^2-\|T(x-y)\|^2=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4Re(x, y).$$

当用iy代y时,我们同样得到$4I_m(Tx, Ty)=4I_m(x, y)$,因而由(2)又可推出(1).

命题 2 映 Hilbert 空间X入X内的有界线性算子T是酉算子当且仅当$T^*=T^{-1}$.

证明 如果T是酉算子, 则由于(2)T^{-1}一定存在, 且$D(T^{-1})=R(T)=X$. 此外, 由(1), $T^*T=1$,因而$T^*=T^{-1}$. 反之,由条件$T^*=T^{-1}$推出内积不变的条件$T^*T=I$.此外,由$T^*=T^{-1}$还推出$R(T)=D(T^{-1})=D(T^*)=X$,从而T必是酉算子.

例 1 设$X=L^2(-\infty, \infty)$. 则对于任何实数a, 在$L^2(-\infty, \infty)$上由$Tx(t)=x(t+a)$定义的算子T是酉的.

例 2 由$L^2(R^n)$到$L^2(R^n)$上的Fourier变换是酉的,因为它保持内积$(f, g)=\int_{R^n}f(x)\overline{g(x)}dx$不变.

定义 2 设X是 Hilbert 空间. 映$D(T)\subseteq X$入X内且满足$D(T)^a=X$的线性算子T称为正规的, 如果

$$TT^*=T^*T, \tag{3}$$

自伴算子和酉算子都是正规的.

Cayley 变 换

定理 1 (J. von Neumann[1]) 设H是 Hilbert 空间X内的闭对称算子. 则连续(但不必处处有定义)逆算子$(H+iI)^{-1}$存在,而且具有定义域$D(U_H)=D((H+iI)^{-1})$的算子

$$U_H=(H-iI)(H+iI)^{-1} \tag{4}$$

是闭等距的($\|U_H x\|=\|x\|$),并且$(I-U_H)^{-1}$存在. 此外,我们有

$$H=i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}. \tag{5}$$

于是,特别地,$D(H)=R(I-U_H)$在X中稠密.

定义 3 U_H称为H的 Cayley 变换.

定理 1 的证明 对于任何 $x\in D(H)$, 我们有 $((H\pm iI)x, (H\pm iI)x)=(Hx, Hx)\pm(Hx, ix)$ $\pm(ix, Hx)+(x, x)$. 由于从 H 的对称条件能推出 $(Hx, ix)=-i(Hx, x)=-i(x, Hx)=-(ix, Hx)$, 所以

$$\|(H\pm iI)x\|^2=\|Hx\|^2+\|x\|^2. \tag{6}$$

从而由 $(H+iI)x=0$ 必导致 $x=0$, 所以逆 $(H+iI)^{-1}$ 存在. 因为 $\|(H+iI)x\|\geqq\|x\|$, 知逆 $(H+iI)^{-1}$ 是连续的. 由(6), 显然有 $\|U_Hy\|=\|y\|$, 即 U_H 是等距的.

U_H 是闭的. 因为, 若当 $n\to\infty$ 时有 $(H+iI)x_n=y_n\to y$ 和 $(H-iI)x_n=z_n\to z$. 则由(6), 我们有 $\|y_n-y_m\|^2=\|H(x_n-x_m)\|^2+\|x_n-x_m\|^2$, 因此当 $n, m\to\infty$ 时, $(x_n-x_m)\to 0$, $H(x_n-x_m)\to 0$. 因为 H 是闭的, 则必有 $x=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in D(H)$ 和 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}Hx_n=Hx$. 于是 $(H+iI)x_n\to y=(H+iI)x$, $(H-iI)x_n\to z=(H-iI)x$. 因此 $U_Hy=z$. 这就证明 U_H 是闭的.

从 $y=(H+iI)x$ 和 $U_Hy=(H-iI)x$, 我们得到 $2^{-1}(I-U_H)y=ix$ 和 $2^{-1}(I+U_H)y=Hx$. 于是由 $(I-U_H)y=0$ 必推出 $x=0$, 因而 $(I+U_H)y=2Hx=0$, 而由这又推出 $y=2^{-1}((I-U_H)y+(I+U_H)y)=0$. 因此逆 $(I-U_H)^{-1}$ 存在. 利用与上面相同的计算, 我们便得

$$Hx=2^{-1}(I+U_H)y=i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}x, \text{即}$$

$$H=i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}.$$

定理 2(J. von Neumann[1]) 设 U 是满足 $R(I-U)^a=X$ 的闭等距算子, 则存在唯一确定的闭对称算子 H, 其 Cayley 变换是 U.

证明 我们首先指出逆算子 $(I-U)^{-1}$ 存在. 假设 $(I-U)y=0$. 对于任何 $z=(I-U)w\in R(I-U)$, 由 U 的等距性, 象 §1 一样我们有 $(y, w)=(Uy, Uw)$. 因此

$$(y, z)=(y, w)-(y, Uw)=(Uy, Uw)-(y, Uw)=(Uy-y, Uw)=0.$$

于是, 由条件 $R(I-U)^a=X$, y 必等于 0. 于是 $(I-U)^{-1}$ 存在. 令 $H=i(I+U)(I-U)^{-1}$, 则 $D(H)=D((I-U)^{-1})=R(I-U)$ 在 X 中稠密. 我们首先证明 H 是对称的. 设 $x, y\in D(H)=R(I-U)$ 并令 $x=(I-U)u, y=(I-U)w$. 则由 $(Uu, Uw)=(u, w)$ 必推出

$$\begin{aligned}(Hx, y)&=(i(I+U)u, (I-U)w)=i((Uu, w)-(u, Uw))\\&=((I-U)u, i(I+U)w)=(x, Hy).\end{aligned}$$

$U_H=U$ 的证明如下, 对于 $x=(I-U)u$, 我们有 $Hx=i(I+U)u$, 因而 $(H+iI)x=2iu$, $(H-iI)x=2iUu$. 于是 $D(U_H)=\{2iu; u\in D(U)\}=D(U)$, 而 $U_H(2iu)=2i\cdot Uu=U(2iu)$. 因此 $U_H=U$.

为了完成定理 2 的证明, 现指出 H 是闭算子. 事实上, H 是把 $(I-U)u$ 映成为 $i(I+U)u$ 的算子 如果 $(I-U)u_n$ 和 $i(I-U)u_n$ 当 $n\to\infty$ 时都收敛, 则 u_n 和 Uu_n 当 $n\to\infty$ 时都收敛. 因此由 U 的闭性, 必有

$$u_n\to u,\ (I-U)u_n\to(I-U)u,\ i(I+U)u_n\to i(I+U)u.$$

这就证明 H 是闭算子.

对于对称算子的伴随算子的构造, 我们有

定理 3 (J. von Neumann[1]) 设 H 是 Hilbert 空间 X 中的闭对称算子. 对于 H 的 Cayley 变换 $U_H=(H-iI)(H+iI)^{-1}$, 令

$$X_H^+ = D(U_H)^\perp, \quad X_H^- = R(U_H)^\perp. \tag{7}$$

则有

$$X_H^+ = \{x \in X; H^*x = ix\}, \quad X_H^- = \{x \in X; H^*x = -ix\}, \tag{8}$$

而 $D(H^*)$ 中的元素 x 可唯一地表为

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \text{这里 } x_0 \in D(H), x_1 \in X_H^+, x_2 \in x_H^-, \quad \text{因此 } H^*x = Hx_0 + ix_1 + (-ix_2). \tag{9}$$

证明 由 $x \in D(U_H)^\perp = D((H+iI)^{-1})^\perp$ 必导致 $(x, (H+iI)y) = 0$ 对于一切 $y \in D(H)$ 成立. 因此 $(x, Hy) = -(x, iy) = (ix, y)$, 故有 $x \in D(H^*)$, $H^*x = ix$. 由这就推出 $(x, (H+iI)y) = 0$ 对一切 $y \in D(H)$ 成立, 即有 $x \in D((H+iI)^{-1})^\perp = D(U_H)^\perp$. 这就证明了(8)式的前一半; 而后一半可类似证明.

由 U_H 是闭等距算子, 我们知道 $D(U_H)$ 和 $R(U_H)$ 是 X 的闭线性子空间. 因此任一元素 $x \in X$ 可唯一地分解为 $D(U_H)$ 的元素和 $D(U_H)^\perp$ 的元素的和. 如果我们应用这一正交分解于元素 $(H^*+iI)x$, 即得

$$(H^*+iI)x = (H+iI)x_0 + x', \text{这里 } x_0 \in D(H), x' \in D(U_H)^\perp.$$

但是由 $x_0 \in D(H)$ 和 $H \subseteq H^*$ 我们有 $(H+iI)x_0 = (H^*+iI)x_0$. 而由 $x' \in D(U_H)^\perp$ 和 (8) 我们同样有 $H^*x' = ix'$. 于是

$$x' = (H^*+iI)x_1, x_1 = (2i)^{-1}x' \in D(U_H)^\perp,$$

因而

$$(H^*+iI)x = (H^*+iI)x_0 + (H^*+iI)x_1, \text{这里}$$
$$x_0 \in D(H), \quad x_1 \in D(U_H)^\perp.$$

所以由 $H^*(x - x_0 - x_1) = -i(x - x_0 - x_1)$ 和(8), 即有 $(x - x_0 - x_1) \in R(U_H)^\perp$. 这就证明了(9)式. 表示式(9)的唯一性证明如下. 设 $0 = x_0 + x_1 + x_2$, 其中 $x_0 \in D(H)$, $x_1 \in D(U_H)^\perp$, $x_2 \in R(U_H)^\perp$. 则由 $H^*x_0 = Hx_0$, $H^*x_1 = ix_1$, $H^*x_2 = -ix_2$, 知

$$0 = (H^*+iI)0 = (H^*+iI)(x_0 + x_1 + x_2) = (H+iI)x_0 + 2ix_1.$$

但根据 X 正交分解为 $D(U_H)$ 及 $D(U_H)^\perp$ 的直和的唯一性, 我们得到 $(H+iI)x_0 = 0, 2ix_1 = 0$. 因为逆算子 $(H-iI)^{-1}$ 存在, 必有 $x_0 = 0$, 从而 $x_2 = 0 - x_0 - x_1 = 0 - 0 - 0 = 0$.

系 Hilbert 空间 X 中的闭对称算子是自伴的当且仅当它的 Cayley 变换 U_H 是酉算子.

证明 条件 $D(H) = D(H^*)$ 等价于条件 $D(U_H)^\perp = R(U_H)^\perp = \{0\}$. 而后者又等价于 U_H 是酉算子的条件, 即 U_H 一对一地且等距地映 X 到 X 上.

§ 5. 闭值域定理

S. Banach[1] 的闭值域定理现叙述如下.

定理 设 X 和 Y 是 B-空间, 而 T 是映 X 入 Y 内且满足 $D(T)^a = X$ 的闭线性算子. 则下列命题都等价:

$$R(T) \text{ 在 } Y \text{ 内是闭的}, \tag{1}$$

$R(T')$在X'内是闭的, (2)

$R(T)=N(T')^{\perp}=\{y\in Y;$ 对于一切 $y^*\in N(T')$ 有

$\langle y, y^*\rangle=0\}$, (3)

$R(T')=N(T)^{\perp}=\{x^*\in X';$ 对于一切 $x\in N(T)$ 有

$\langle x, x^*\rangle=0\}$. (4)

证明 这一定理的证明需要五个步骤.

第一步 将等价性(1)⟷(2) 的证明简化成为T是满足$D(T)=X$的连续线性算子的特殊情况的等价性(1)⟷(2).

T 的图象 $G=G(T)$是 $X\times Y$ 的闭线性子空间. 因此G按 $X\times Y$ 的范数$\|\{x, y\}\|=\|x\|+\|y\|$是B-空间. 考察映G入Y内的连续线性算子 S:

$$S\{x, Tx\}=Tx.$$

那么S的对偶算子 S' 是映 Y'入G' 内的连续线性算子, 而且我们有

$$\langle\{x, Tx\}, S'y^*\rangle=\langle S\{x, Tx\}, y^*\rangle=\langle Tx, y^*\rangle=\langle\{x, Tx\}, \{0, y^*\}\rangle, x\in D(T), y\in Y^*.$$

于是泛函 $S'\cdot y^*-\{0, y^*\}\in(X\times Y)'=X'\times Y'$ 在G的每一点为零. 但是 条件$\langle\{x, Tx\}, \{x^*, y_1^*\}\rangle=0, x\in D(T)$, 等价于条件$\langle x, x^*\rangle=\langle -Tx, y_1^*\rangle, x\in D(T)$, 即等价于条件$-T'y_1^*=x^*$. 因此

$$S'\cdot y^*=\{0, y^*\}+\{-T'y_1^*, y_1^*\}=\{-T'y_1^*, y^*+y_1^*\}, y^*\in Y'.$$

故由 y^* 的任意性, 我们看出 $R(S')=R(-T')\times Y'=R(T')\times Y'$.

因此$R(S')$在 $X'\times Y'$ 中是闭的当且仅当 $R(T')$在 X' 中是闭的, 同时, 因 $R(S)=R(T)$, 则$R(S)$在Y中是闭的, 当且仅当 $R(T)$在Y中是闭的. 从而我们不必对原来的 T, 而只需对有界线性算子S这一特殊情况证明等价性(1)⟷(2)即可.

第二步 设X和Y是B-空间, 而T是映X入Y内的有界线性算子. 则(1)→(2).

我们将T看作映X入 B-空间 $Y_1=R(T)^a=R(T)$ 的有界线性算子 T_1. 我们必须证明(2)成立. $T_1'y_1^*, y_1^*\in Y_1'$, 定义为

$$\langle T_1x, y_1^*\rangle=\langle Tx, y_1^*\rangle=\langle x, T_1'y_1^*\rangle,\ x\in D(T_1)=D(T)=X.$$

由 Hahn-Banach 定理, 泛函 y_1^* 可以扩张为 $y^*\in Y'$ 使得$\langle Tx, y_1^*\rangle=\langle Tx, y^*\rangle$, $x\in D(T)=X$. 因此$T_1'y_1^*=T'y_1^*$, 从而 $R(T_1')=R(T')$. 于是只要假设 $R(T)=Y$ 就够了. 那么由第二章 § 5 的开映象定理, 总存在 $c>0$ 使得对于每一 $y\in Y$, 都存在一 $x\in X$ 使 $Tx=y$, $\|x\|\leq c\|y\|$. 于是对于$D(T')$中的每一 y^*, 我们有

$$|\langle y, y^*\rangle|=|\langle Tx, y^*\rangle|=|\langle x, T'y^*\rangle|\leq\|x\|\cdot\|T'y^*\|\leq c\|y\|\cdot\|T'y^*\|.$$

因此

$$\|y^*\|=\sup_{\|y\|\leq 1}|\langle y, y^*\rangle|\leq c\|T'y^*\|,$$

从而$(T')^{-1}$存在并且是连续的. 此外, $(T')^{-1}$作为连续线性算子的逆是闭线性算子. 因此我们看到定义域$D((T')^{-1})=R(T')$在X'中必是闭的.

第三步 设X和Y是B-空间, 而T是映X入Y内的有界线性算子. 则(2)→(1).

像第二步一样，我们将T看作映X入$Y_1=R(T)^a$内的有界线性算子T_1．则T_1'有逆，因为由$T_1'y_1^*=0$必导致

$$\langle T_1x, y_1^*\rangle=\langle Tx, y_1^*\rangle=\langle x, T_1'y_1^*\rangle=0,\quad x\in D(T_1)=D(T)=X,$$

从而，由于$R(T_1)=R(T)$在$Y_1=R(T)^a$中稠密，y_1^*必为0．所以，由$R(T')=R(T_1')$（上面已证明）是闭的条件就导致T_1'是一对一地映B-空间$(R(T)^a)'=Y_1'$到B-空间$R(T')$上的连续线性算子．因此，由开映象定理，$(T_1')^{-1}$是连续的．

其次，我们证明$R(T)$是闭的．为了这个目的，只要由条件

$$\begin{cases}\text{存在正常数 }\varepsilon\text{ 使得象}\{T_1x;\ \|x\|\leq\varepsilon\}\\ \text{在 }Y_1=R(T)^a=R(T_1)^a\text{的每一球}\|y\|\leq n^{-1}\\ (n=1, 2, \cdots)\text{中不稠密.}\end{cases}$$

得出矛盾就够了．因为，如若不然，则开映象定理的证明指出$R(T_1)=R(T)=Y_1$．于是我们假设存在序列$\{y_n\}\subseteq Y_1$满足

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}y_n=0,\ y_n\overline{\in}\{T_1x;\ \|x\|\leq\varepsilon\}^a\quad(n=1, 2, \cdots).$$

因为$\{T_1x;\ \|x\|\leq\varepsilon\}^a$是$B$-空间$Y_1$的闭凸平衡集，由第四章§6的Mazur定理，存在$B$-空间$Y_1$上的连续线性泛函$f_n$满足

$$f_n(y_n)>\sup_{\|x\|\leq\varepsilon}|f_n(T_1x)|\quad(n=1, 2, \cdots).$$

因此$\|T_1'f_n\|<\varepsilon^{-1}\|f_n\|\|y_n\|$，从而由$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，得$T_1'$没有连续逆．这就是矛盾，因此$R(T)$必是闭的．

第四步 我们证明(1)→(3)．首先，由于

$$\langle Tx, y^*\rangle=\langle x, T'y^*\rangle,\quad x\in D(T), y^*\in D(T'),$$

显然有$R(T)\subseteq N(T')^\perp$．我们指出(1)必导致$N(T')^\perp\subseteq R(T)$．假设存在$y_0\in N(T')^\perp$和$y_0\overline{\in}R(T)$．则由Hahn-Banach定理，存在$y_0^*\in Y'$使得$\langle y_0, y_0^*\rangle\neq 0$和$\langle Tx, y_0^*\rangle=0$对于一切$x\in D(T)$成立．而由后一条件又推出$\langle x, T'y_0^*\rangle=0, x\in D(T)$，所以$T'y_0^*=0$，即$y_0\overline{\in}N(T')^\perp$．这就矛盾，因此必有$N(T')^\perp\subseteq R(T)$．

(3)→(1)是显然的，因为由于$\langle y, y^*\rangle$关于y的连续性，$N(T')^\perp$是闭的．

第五步 我们证明(2)→(4)．象(3)的情况一样包含关系$R(T')\subseteq N(T)^\perp$是显然的．我们指出由(2)必可推出$N(T)^\perp\subseteq R(T')$．为此，设$x^*\in N(T)^\perp$，而对于$y=Tx$，通过$f_1(y)=\langle x, x^*\rangle$定义$y$的泛函$f_1(y)$．它是$y$的单值函数，因为由$Tx=Tx'$必可推出$(x-x')\in N(T)$，从而由$x^*\in N(T)^\perp$，有$\langle(x-x'), x^*\rangle=0$．于是$f_1(y)$是$y$的线性泛函．由于由(2)推出(1)，因此将开映象定理应用于第一步中的算子S，我们可以这样选择方程$y=Tx$的解x使得由$s\text{-}\lim y=0$导致$s\text{-}\lim x=0$．因此$f_1(y)=\langle x, x^*\rangle$是$Y_1=R(T)$上的连续线性泛函．设$f\in Y'$是$f_1$的扩张，则

$$f(Tx)=f_1(Tx)=\langle x, x^*\rangle.$$

这就证明$T'f=x^*$．因此$N(T)^\perp\subseteq R(T')$．

由(4)推出(2)是显然的，因为$\langle x, x^*\rangle$是x的连续线性泛函．

系 1 设 X 和 Y 是 B-空间，而 T 是映 $D(T)\subseteq X$ 入 Y 内且满足 $D(T)^a=X$ 的闭线性算子. 则

$$\text{当且仅当 } T' \text{ 有连续逆时 } R(T)=Y, \tag{5}$$

$$\text{当且仅当 } T \text{ 有连续逆时 } R(T')=X'. \tag{6}$$

证明 假设 $R(T)=Y$. 则由 $\langle Tx, y^*\rangle=\langle x, T'y^*\rangle$, $x\in D(T)$ 和 $T'y^*=0$, 我们得到 $y^*=0$, 即 T' 必有逆 $(T')^{-1}$. 因为根据 $R(T)=Y$ 和(2), $R(T')$ 是闭的，则由闭图象定理就推出 $(T')^{-1}$ 连续. 其次设 T' 具有连续逆，则 $N(T')=\{0\}$, 因此由(3), $R(T)=Y$.

假设 $R(T')=X'$. 则由 $\langle Tx, y^*\rangle=\langle x, T'y^*\rangle$, $y^*\in D(T')$ 和 $Tx=0$, 我们得到 $x=0$, 即 T 必有逆 T^{-1}. 因为根据 $R(T')=X'$ 和(1), $R(T)$ 是闭的，则由闭图象定理推出 T^{-1} 必是连续的. 其次设 T 具有连续逆. 则 $N(T)=\{0\}$, 因此由(4), $R(T')=X'$.

系 2 设 X 是 Hilbert 空间，其内积为 (u, v), 而 T 是具稠密定义域 $D(T)\subseteq X$ 和值域 $R(T)\subseteq X$ 的闭线性算子. 假设存在正常数 c 使得

$$Re(Tu, u)\geqq c\|u\|^2 \text{ 对于一切 } u\in D(T) \text{ 成立}. \tag{7}$$

则 $R(T^*)=X$.

证明 根据 Schwarz 不等式，有

$$\|Tu\|\cdot\|u\|\geqq Re(Tu, u)\geqq c\|u\|^2 \text{ 对于一切 } u\in D(T) \text{ 成立}.$$

因此 $\|Tu\|\geqq c\|u\|$, $u\in D(T)$, 从而 T 具有连续逆. 于是，根据系 1, $R(T')=X$. 从而 $R(T^*)=R(T')=X$.

注 映 $D(T)\subseteq X$ 入 X 内的线性算子 T 称为增生的（这一术语属于 K. Friedrichs 和 T. Kato), 如果

$$Re(Tu, u)\geqq 0 \quad \text{对于一切 } u\in D(T) \text{ 成立}. \tag{8}$$

T 称为耗散的(这一术语属于 R. S. Phillips), 如果 $-T$ 是增生的.

第七章参考文献

关于 Hilbert 空间的一般论述，请参看 M. H. Stone[1], N. I. Achieser-I. M. Glasman[1] 和 N. Dunford-J. Schwartz[5]. 闭值域定理本质上已在 S. Banach[1] 中证明.

第八章　预解式和谱

设T是线性算子，其定义域$D(T)$和值域$R(T)$都属于同一复线性拓扑空间X. 我们考察线性算子

$$T_\lambda=\lambda I-T,$$

其中λ是复数而I是恒等算子. 使得T_λ有逆的那些λ值的分布以及当T_λ的逆存在时，这个逆的性质就是所谓算子T的**谱理论**. 我们将在下面讨论T_λ的逆的一般理论.

§1. 预解式和谱

定义　如果λ_0使得值域$R(T_{\lambda_0})$在X中稠密,而T_{λ_0}有连续逆$(\lambda_0 I-T)^{-1}$，我们就说λ_0属于T的**预解集**$\rho(T)$,同时我们用$R(\lambda_0;T)$表示这个逆$(\lambda_0 I-T)^{-1}$并称它为T(在λ_0处)的**预解式**. 所有不属于$\rho(T)$的复数λ构成一个集合$\sigma(T)$，称为T的**谱**. 谱$\sigma(T)$分解成不相交的集合$P_\sigma(T)$, $C_\sigma(T)$和$R_\sigma(T)$,它们具有如下性质:

$P_\sigma(T)$是那些使得T_λ没有逆的复数λ的全体;$P_\sigma(T)$称为T的**点谱**.

$C_\sigma(T)$是那些使得T_λ在X中具有稠密定义域但非连续的逆的复数λ的全体；$C_\sigma(T)$称为T的**连续谱**.

$R_\sigma(T)$是那些使得T_λ有逆但逆的定义域在X中不稠密的复数λ的全体；$R_\sigma(T)$称为T的**剩余谱**.

由这些定义以及T的线性性质我们有如下

命题　$\lambda_0\in P_\sigma(T)$的必要和充分的条件是方程$Tx=\lambda_0 x$有解$x\neq 0$. 在这种情况下λ_0称为T的**本征值**,而x是相应的**本征向量**. T_{λ_0}的零空间$N(\lambda_0 I-T)$称为相应于T的本征值λ_0的T的**本征空间**. 它是由向量0和相应于λ_0的本征向量的全体组成. 相应于λ_0的本征空间的维数称为本征值λ_0的**重数**.

定理　设X是复B-空间,而T是其定义域$D(T)$和值域$R(T)$都在X中的闭线性算子. 则对于任何$\lambda_0\in\rho(T)$,预解式$(\lambda_0 I-T)^{-1}$是处处有定义的连续线性算子.

证明　因为λ_0属于预解集$\rho(T)$, 所以$R(\lambda_0 I-T)=D((\lambda_0 I-T)^{-1})$在$X$中是稠密的且存在这样的正常数$c$,使得

$$\text{只要 } x\in D(T),\text{就有}\|(\lambda_0 I-T)x\|\geq c\|x\|\text{成立}.$$

我们需要证明$R(\lambda_0 I-T)=X$. 然而，如果$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_0 I-T)x_n=y$存在，则由上面的不等式，$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$存在,因此,由$T$的封闭性,我们必有$(\lambda_0 I-T)x=y$. 从而由$R(\lambda_0 I-T)^a=X$的假设'就必有$R(\lambda_0 I-T)=X$.

例 1 如果空间X是有限维的，则任何有界线性算子T都为某一矩阵(t_{ij})所表示. 大家知道, T的本征值是作为代数方程,即所谓矩阵(t_{ij})的特征方程:

$$\det(\lambda\delta_{ij}-t_{ij})=0 \tag{1}$$

的根而求得的. 这里$\det(A)$表示矩阵A的行列式.

例 2 设$X=L^2(-\infty,\infty)$而T由

$$T\cdot x(t)=tx(t)$$

定义,即$D(T)=\{x(t);x(t),tx(t)均\in L^2(-\infty,\infty)\}$且对于$x(t)\in D(T)$,有$Tx(t)=tx(t)$. 则每一实数$\lambda_0$都属于$C_\sigma(T)$.

证明 由条件$(\lambda_0I-T)x=0$,推出$(\lambda_0-t)x(t)=0$ a.e. 成立, 因此$x(t)=0$ a.e. 成立. 于是, $(\lambda_0I-T)^{-1}$存在. 定义域$D((\lambda_0I-T)^{-1})$包含这样的$y(t)\in L^2(-\infty,\infty)$, 它在$t=\lambda_0$的邻域内恒为零, 而此邻域可以随着$y(t)$变更. 因此$D((\lambda_0I-T)^{-1})$在$L^2(-\infty,\infty)$中稠密. 容易看出算子$(\lambda_0I-T)^{-1}$在这样的$y(t)$的全体上不是有界的.

例 3 设X是 Hilbert 空间(l^2),并设T_0是由

$$T_0(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$$

定义的. 则0是T_0的剩余谱,这是因为$R(T_0)$在X中不稠密.

例 4 设H是 Hilbert 空间X中的自伴算子. 则H的预解集$\rho(H)$包含一切$I_m(\lambda)\neq0$的复数λ,而且预解式$R(\lambda;H)$是具有估计式

$$\|R(\lambda;H)\|\leq1/|I_m(\lambda)| \tag{2}$$

的有界线性算子. 此外

$$I_m((\lambda I-H)x,x)=I_m(\lambda)\|x\|^2,\ x\in D(H). \tag{3}$$

证明 如果$x\in D(H)$,因为$(Hx,x)=(x,Hx)=\overline{(Hx,x)}$,故$(Hx,x)$是实的. 所以我们有(3),从而利用 Schwarz 不等式,得

$$\|(\lambda I-H)x\|\cdot\|x\|\geq|((\lambda I-H)x,x)|\geq|I_m(\lambda)|\|x\|^2, \tag{4}$$

这就导致

$$\|(\lambda I-H)x\|\geq|I_m(\lambda)|\cdot\|x\|,\qquad x\in D(H). \tag{5}$$

因此如果$I_m(\lambda)\neq0$,则逆$(\lambda I-H)^{-1}$存在. 此外,如果$I_m(\lambda)\neq0$,值域$R(\lambda I-H)$在X中是稠密的. 如若不然,将存在$y\neq0$正交于$R(\lambda I-H)$,即对于一切$x\in D(H)$有$((\lambda I-H)x,y)=0$, 因此$(x,(\bar\lambda I-H)y)=0$对于一切$x\in D(H)$成立. 因为自伴算子H的定义域$D(H)$在X中稠密, 我们必有$(\bar\lambda I-H)y=0$,即$Hy=\bar\lambda y$,这同(Hy,y)的值是实数相矛盾.

因此,由上面的定理我们得知,对任何$I_m(\lambda)\neq0$的复数λ,预解式$R(\lambda;H)$是满足估计式(2)的有界线性算子.

§2. 预解方程和谱半径

定理 1 设T是闭线性算子,其定义域和值域都在复B-空间X中. 则预解集$\rho(T)$是复平面上的开集. 在$\rho(T)$的每一分支(最大连通集)里,$R(\lambda;T)$是λ的解析函数.

证明 由前节的定理, 对于 $\lambda\in\rho(T)$, $R(\lambda;T)$ 是处处有定义的连续算子. 设 $\lambda_0\in\rho(T)$ 并研究

$$S(\lambda)=R(\lambda_0;T)\{I+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n R(\lambda_0;T)^n\}. \tag{1}$$

当 $|\lambda_0-\lambda|\cdot\|R(\lambda_0;T)\|<1$ 时这一级数按算子范数收敛, 而且在复平面的这一圆域内, 该级数定义一个 λ 的解析函数. 以 $(\lambda I-T)=(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-T)$ 左或右乘这一级数, 就等于 1, 因此级数 $S(\lambda)$ 实际表示预解式 $R(\lambda;T)$. 于是我们已证明 λ_0 的这一圆邻域属于 $\rho(T)$ 而且 $R(\lambda;T)$ 在这邻域内是解析函数.

定理 2 如果 λ 和 μ 同属于 $\rho(T)$, 而且如果 $R(\lambda;T)$ 和 $R(\mu;T)$ 是处处有定义的连续算子, 则下面的预解方程成立:

$$R(\lambda;T)-R(\mu;T)=(\mu-\lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T). \tag{2}$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}R(\lambda;T)&=R(\lambda;T)(\mu I-T)R(\mu;T)=R(\lambda;T)\{(\mu-\lambda)I+(\lambda I-T)\}R(\mu;T)\\&=(\mu-\lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T)+R(\mu;T).\end{aligned}$$

定理 3 如果 T 是映复 B-空间 X 入 X 内的有界线性算子, 则如下极限存在:

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=r_\sigma(T). \tag{3}$$

它称为 T 的**谱半径**, 而且我们有

$$r_\sigma(T)\leqq\|T\|. \tag{4}$$

如果 $|\lambda|>r_\sigma(T)$, 则预解式 $R(\lambda;T)$ 存在而且由级数

$$R(\lambda;T)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n-1} \tag{5}$$

给出, 而这级数按算子范数收敛.

证明 令 $r=\inf_{n\geq1}\|T^n\|^{1/n}$. 我们只须指出 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T^n\|^{1/n}\leqq r$. 对于任何 $\varepsilon>0$, 选取 m 使得 $\|T^m\|^{1/m}\leqq r+\varepsilon$. 对于任意 n, 记 $n=pm+q$, 这里 $0\leqq q\leqq(m-1)$. 则由 $\|AB\|\leqq\|A\|\|B\|$, 我们得到

$$\|T^n\|^{1/n}\leqq\|T^m\|^{p/n}\cdot\|T\|^{q/n}\leqq(r+\varepsilon)^{mp/n}\|T\|^{q/n}.$$

因为当 $n\to\infty$ 时 $pm/n\to1$ 和 $q/n\to0$, 我们必有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T^n\|^{1/n}\leqq r+\varepsilon$. 由于 ε 是任意的, 我们已证明 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T^n\|^{1/n}\leqq r$.

因为 $\|T^n\|\leqq\|T\|^n$, 我们有 $\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}\leqq\|T\|$. 级数(5)当 $\lambda>r_\sigma(T)$ 时是按算子范数收敛的. 因为, 如果 $|\lambda|\geqq r_\sigma(T)+\varepsilon$, 其中 $\varepsilon>0$, 则由(3), $\|\lambda^{-n}T^n\|\leqq(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{-n}\cdot(r_\sigma(T)+2^{-1}\varepsilon)^n$ 对于充分大的 n 成立. 以 $(\lambda I-T)$ 左或右乘这一级数就等于 I, 从而此级数实际表示预解式 $R(\lambda;T)$.

系 若 T 是有界线性算子, 则预解集 $\rho(T)$ 是非空的.

定理 4 对于有界线性算子 $T\in L(X,X)$, 我们有

$$r_\sigma(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|. \tag{6}$$

证明 由定理 3, 我们知道 $r_\sigma(T) \geqq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. 因此我们只须指出 $r_\sigma(T) \leqq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

由定理 1, 当 $|\lambda| > \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ 时, $R(\lambda; T)$ 关于 λ 是解析的. 于是它具有唯一确定的关于 λ 的正幂和非正幂的 Laurent 展式, 对于 $|\lambda| > \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ 按算子范数收敛. 由定理 3, 这一 Laurent 级数必和 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ 重合. 因此如果 $|\lambda| > \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, 则 $\lim_{n\to\infty} \| \lambda^{-n} T^n \| = 0$, 从而对于任何 $\varepsilon > 0$, 对于充分大的 n 我们必有 $\|T^n\| \leqq (\varepsilon + \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|)^n$. 这就证明

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leqq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

系 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ 发散, 如果 $|\lambda| < r_\sigma(T)$.

证明 设 $r \geqq 0$ 是使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ 对于 $|\lambda| > r$ 按算子范数收敛的最小正数. 如此的 r 的存在性像通常的关于 λ^{-1} 的幂级数一样地证明. 则对于 $|\lambda| > r$, $\lim_{n\to\infty} \| \lambda^{-n} T^n \| = 0$, 因此像 $r_\sigma(T) \leqq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ 的证明一样, 我们必有 $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leqq r$. 这就证明 $r_\sigma(T) \leqq r$.

§3. 平均遍历定理

对于特殊的一类连续线性算子平均遍历定理给出一种得到相应于本征值 1 的本征空间的方法. 在这一节, 我们将象以前由本书作者阐述过的那样按谱理论的观点叙述和证明平均遍历定理. 遍历理论(结合统计力学)的历史概述将在第十三章给出.

定理 1 设 X 是局部凸线性拓扑空间, 而 T 是映 X 入 X 内的连续线性算子. 我们假设算子族 $\{T^n; n=1, 2, \cdots\}$ 在下述意义下等度连续: 对于 X 的任何连续半范数 q, 存在 X 的连续半范数 q' 使得 $\sup_{n \geq 1} q(T^n x) \leqq q'(x)$ 对于一切 $x \in X$ 成立. (1)

则值域 $R(I-T)$ 的闭包 $R(I-T)^a$ 满足

$$R(I-T)^a = \left\{ x \in X; \lim_{n\to\infty} T_n x = 0, \ T_n = n^{-1} \sum_{m=1}^{n} T^m \right\}, \tag{2}$$

因而, 特别地

$$R(I-T)^a \cap N(I-T) = \{0\}. \tag{3}$$

证明 我们有 $T_n(I-T) = n^{-1}(T - T^{n+1})$. 因此, 根据(1), 由 $w \in R(I-T)$ 必导致 $\lim_{n\to\infty} T_n w = 0$. 再设 $z \in R(I-T)^a$, 则对于 X 的任何连续半范数 q' 及 $\varepsilon > 0$, 存在 $w \in R(I-T)$ 使得 $q'(z-w) < \varepsilon$. 于是, 由(1), 我们有 $q(T_n(z-w)) \leqq n^{-1} \sum_{m=1}^{n} q(T^m(z-w)) \leqq q'(z-w) < \varepsilon$. 因此 $q(T_n(z)) \leqslant q(T_n(w)) + q(T_n(z-w)) \leqq q(T_n w) + \varepsilon$, 所以 $\lim_{n\to\infty} T_n z = 0$. 这就证明了 $R(I-T)^a \subseteqq \{x \in X; \lim_{n\to\infty} T_n x = 0\}$.

反之，设 $\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=0$. 则对于 X 的任何连续半范数 q 及 $\varepsilon>0$, 存在 n 使得 $q(x-(x-T_nx))=q(T_nx)<\varepsilon$. 但由于

$$x-T_nx=n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(I-T^m)x=n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^{m-1})x,$$

$(x-T_nx)\in R(I-T)$. 因此 x 必属于 $R(I-T)^a$.

定理 2 (平均遍历定理) 设条件 (1) 满足. 又设对于给定的 $x\in X$, 存在 $\{n\}$ 的子序列 $\{n'\}$ 使得

$$\text{弱-}\lim_{n'\to\infty}T_{n'}x=x_0\ \text{存在}. \tag{4}$$

则 $Tx_0=x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=x_0$.

证明 我们有 $TT_n-T_n=n^{-1}(T^{n+1}-T)$, 因而由(1), 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(TT_nx-T_nx)=0$. 于是, 对于任一 $f\in X'$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle TT_{n'}x, f\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle T_{n'}x, T'f\rangle$ 存在而且 $=\lim\limits_{n\to\infty}\langle T_{n'}x, f\rangle=\langle x_0, f\rangle$. 因此 $\langle x_0, f\rangle=\langle Tx_0, f\rangle$, 所以由 $f\in X'$ 的任意性, 必有 $Tx_0=x_0$.

于是我们有 $T^mx=T^mx_0+T^m(x-x_0)=x_0+T^m(x-x_0)$, 因此 $T_nx=x_0+T_n(x-x_0)$. 但是 $(x-x_0)=\text{弱-}\lim\limits_{n\to\infty}(x-T_{n'}x)$ 并且上面已证 $(x-T_{n'}x)\in R(I-T)$. 因此根据第五章 § 1 中的定理 11, 得 $(x-x_0)\in R(I-T)^a$. 于是, 由定理 1, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}T_{n'}(x-x_0)=0$, 从而就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=x_0$.

系 设条件(1)满足, 而 X 是局部序列弱紧的. 则对于任一 $x\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=x_0$ 存在, 而且由 $T_0x=x_0$ 定义的算子 T_0 是满足

$$T_0=T_0^2=TT_0=T_0T, \tag{5}$$

$$R(T_0)=N(I-T), \tag{6}$$

$$N(T_0)=R(I-T)^a=R(I-T_0) \tag{7}$$

的连续线性算子. 此外, 我们有**直和分解**

$$X=R(I-T)^a\oplus N(I-T), \tag{8}$$

即任何 $x\in X$ 可唯一地表为 $\in R(I-T)^a$ 的元素和 $\in N(I-T)$ 的元素的和.

证明 T_0 的线性性质是显然的. T_0 的连续性利用由(1)推出的 $\{T_n\}$ 的等度连续性得出. 其次, 因为 $Tx_0=x_0$, 我们有 $TT_0=T_0$, 所以 $T^nT_0=T_0$, $T_nT_0=T_0$, 而这又导致 $T_0^2=T_0$. 另一方面, 有 $T_n-T_nT=n^{-1}(T-T^{n+1})$ 并且由(1)推出 $T_0=T_0T$. 等式(6)可证明如下. 设 $Tx=x$, 则 $T^nx=x$, $T_nx=x$, 从而 $T_0x=x$, 即 $x\in R(T_0)$. 反之, 设 $x\in R(T_0)$. 则由 $T_0^2=T_0$, 我们有 $T_0x=x$, 从而由 $TT_0=T_0$, 得 $Tx=TT_0x=T_0x=x$. 因此相应于 T 的本征值 1 的 T 的本征空间恰是值域 $R(T_0)$. 于是(6)得证. 此外, 由定理 1 我们有 $N(T_0)=R(I-T)^a$. 但是, 由 $T_0^2=T_0$, 我们有 $R(I-T_0)\subseteq N(T_0)$, 而且如果 $x\in N(T_0)$, 则 $x=x-T_0x\in R(I-T_0)$. 于是 $N(T_0)=R(I-T_0)$.

所以, 由 $I=(I-T_0)+T_0$ 以及(6)和(7), 就得到(8).

注 T 相应于本征值 $\lambda(|\lambda|=1)$ 的本征空间 $N(\lambda I-T)$ 可以作为 $R(T(\lambda))$ 而得到, 这里

$$T(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(T/\lambda)^m x.$$

J. von Neumann 的平均遍历定理 设$(S, \mathfrak{B}, m)$ 是测度空间，而P是S的等测变换，即P是一对一地映S到S上的映射，使得$P\cdot B\in\mathfrak{B}$当且仅当$B\in\mathfrak{B}$并使得$m(P\cdot B)=m(B)$. 考虑映$L^2(S, \mathfrak{B}, m)$到自身上的由

$$(Tx)(s) = x(Ps),\ x\in L^2(S, \mathfrak{B}, m) \tag{9}$$

定义的线性算子T. 根据P的等测性，我们容易看出算子T是酉的，因此由$\|T^n\|=1(n=1, 2, \cdots)$等度连续条件(1)一定满足. 所以，由 Hilbert 空间$L^2(S, \mathfrak{B}, m)$的序列弱紧性，我们得到 J. von Neumann 的平均遍历定理：

$$\text{对于任一 } x\in L^2(S, \mathfrak{B}, m),\ s\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{m=1}^{n} T^m x = x_0\in L^2(S, \mathfrak{B}, m) \text{ 存在而且 } Tx_0 = x_0. \tag{10}$$

注 定理 1 和定理 2 取材于 K. Yosida[3]. 也可参考 S. Kakutani[1] 和 F·Riesz[4]. Neumann 的平均遍历定理发表在 J. von Neumann[3]中.

§4. 关于伪预解式的 Hille 型遍历定理

预解式的概念经 E. Hille 推广成为伪预解式的概念. 利用同前节证明平均遍历定理类似的思想我们可以证明伪预解式的遍历定理. 请查看 K. Yosida[4]. 参考 T. Kato[1]. 这些遍历定理可作为在 E. Hille-R. S. Phillips[1], 第 502 页中给出的 E. Hille 的阿贝尔遍历定理的推广.

我们将从伪预解式的定义开始.

定义 设X是局部凸线性拓扑空间，而$L(X, X)$是映X入X内的一切连续线性算子的代数. 伪预解式J_λ是定义于复λ-平面的子集$D(J)$而取值于$L(X, X)$的函数且满足

$$J_\lambda - J_\mu = (\mu-\lambda)J_\lambda J_\mu \text{（预解方程）}. \tag{1}$$

命题 一切$J_\lambda, \lambda\in D(J)$，有公共零空间，我们用$N(J)$来表示，而且有公共值域，我们用$R(J)$来表示. 类似地，一切$(I-\lambda J_\lambda)$，$\lambda\in D(J)$有公共零空间，用$N(I-J)$表示，而且有公共值域，用$R(I-J)$表示. 此外，有交换性：

$$J_\lambda J_\mu = J_\mu J_\lambda \quad (\lambda, \mu\in D(J)). \tag{2}$$

证明 在(1)中当λ和μ交换时，我们得到

$$J_\mu - J_\lambda = (\lambda-\mu)J_\mu J_\lambda = -(\mu-\lambda)J_\mu J_\lambda,$$

因此(2)真. 由于(1)和(2)命题的第一部分是显然的，将(1)改写成

$$(I-\lambda J_\lambda) = (I-(\lambda-\mu)J_\lambda)(I-\mu J_\mu), \tag{1'}$$

可知第二部分也是显然的.

定理 1 伪预解式J_λ是一线性算子A的预解式当且仅当$N(J)=\{0\}$；因而$R(J)$同A的定义域$D(A)$重合.

证明 "仅当"部分是显然的. 假设$N(J)=\{0\}$. 则对于任何$\lambda\in D(J)$，逆J_λ^{-1}存在. 我们有

$$\lambda I - J_\lambda^{-1} = \mu I - J_\mu^{-1} (\lambda, \mu\in D(J)). \tag{3}$$

这是因为由(1)和(2)，有

$$J_\lambda J_\mu(\lambda I - J_\lambda^{-1} - \mu I + J_\mu^{-1}) = (\lambda-\mu)J_\lambda J_\mu - J_\lambda J_\mu(J_\lambda^{-1} - J_\mu^{-1})$$
$$= (\lambda-\mu)J_\lambda J_\mu - (J_\mu - J_\lambda) = 0.$$

于是我们令

$$A = (\lambda I - J_\lambda^{-1}). \tag{4}$$

则有 $J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ 对于 $\lambda \in D(J)$ 成立.

引理 1 我们假设存在 $\in D(J)$ 的序列 $\{\lambda_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0 \text{ 且算子族} \{\lambda_n J_{\lambda_n}\} \text{等度连续.} \tag{5}$$

则有

$$R(I-J)^a = \{x \in X;\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x = 0\}, \tag{6}$$

因此

$$N(I-J) \cap R(I-J)^a = \{0\}. \tag{7}$$

证明 由(1)，我们有

$$\lambda J_\lambda(I - \mu J_\mu) = (I - \mu(\mu-\lambda)^{-1})\lambda J_\lambda - \lambda(\lambda-\mu)^{-1}\mu J_\mu. \tag{8}$$

因此，根据(5)，由条件 $x \in R(I-\mu J_\mu) = R(I-J)$ 必推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x = 0$. 设 $y \in R(I-J)^a$，则对于 X 的任何连续半范数 q 以及 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in R(I-J)$ 使得 $q(y-x) < \varepsilon$. 由(5)，对于 X 的任何连续半范数 q'，我们有

$$q'(\lambda_n J_{\lambda_n}(y-x)) \le q(y-x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

对于 X 的某一适当的连续半范数 q 成立. 因此，由 $\lambda_n J_{\lambda_n}y = \lambda_n J_{\lambda_n}x + \lambda_n J_{\lambda_n}(y-x)$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}y = 0$.

反之，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x = 0$. 则对于 X 的任何连续半范数 q 以及 $\varepsilon > 0$，存在 λ_n 使得 $q(x-(x-\lambda_n J_{\lambda_n}x)) < \varepsilon$. 因此 x 必属于 $R(I-\lambda_n J_{\lambda_n})^a = R(I-J)^a$.

引理 1′ 我们假设存在 $\in D(J)$ 的序列 $\{\lambda_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty \text{ 且算子族} \{\lambda_n J_{\lambda_n}\} \text{等度连续.} \tag{5'}$$

则有

$$R(J)^a = \{x \in X;\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x = x\}, \tag{6'}$$

因此

$$N(J) \cap R(J)^a = \{0\}. \tag{7'}$$

证明 由(1)，我们有

$$\lambda J_\lambda J_\mu = \frac{\mu}{\lambda}\lambda J_\lambda J_\mu - \frac{1}{\lambda}\lambda J_\lambda + J_\mu.$$

因此，根据(5′)，由条件 $x \in R(J_\mu) = R(J)$ 必推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x = x$. 设 $y \in R(J)^a$. 则对于 X 的任何连续半范数 q 以及 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in R(J)$ 使得 $q(y-x) < \varepsilon$. 由(5′)，对于 X 的任一连续半范数

q', 有

$$q'(\lambda_n J_{\lambda_n}(y-x)) \leq q(y-x) \quad (n=1, 2, \cdots)$$

对于X的某一适当的连续半范数q成立. 因此, 由(5')和

$$\lambda_n J_{\lambda_n} y - y = (\lambda_n J_{\lambda_n} x - x) + (x-y) + \lambda_n J_{\lambda_n}(y-x),$$

我们必有 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} y = y$.

反之, 设 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = x$. 则对于$X$的任何连续半范数$q$以及$\varepsilon>0$, 存在$\lambda_n$使得$q(x-\lambda_n J_{\lambda_n} x)<\varepsilon$. 因此$x$必属于$R(J_{\lambda_n})^a = R(J)^a$.

定理 2 设(5)成立. 设对于给定的$x\in X$, 存在$\{n\}$的子序列$\{n'\}$使得

$$弱\text{-}\lim_{n'\to\infty} \lambda_{n'} J_{\lambda_{n'}} x = x_h \text{ 存在.}$$

则 $x_h = \lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x$ 且 $x_h \in N(I-J)$, $x_p = (x-x_h) \in R(I-J)^a$.

证明 在(1')中令 $\mu = \lambda_{n'}$ 并让 $n'\to\infty$, 由(5), 得知$(I-\lambda J_\lambda)x = (I-\lambda J_\lambda)(x-x_h)$, 即$(I-\lambda J_\lambda)x_h = 0$, 从而 $x_h \in N(I-J)$, 因此

$$\lambda_n J_{\lambda_n} x = x_h + \lambda_n J_{\lambda_n}(x-x_h) \tag{10}$$

所以我们仅需证明 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n}(x-x_h) = 0$, 或者, 由引理 1 证$(x-x_h)\in R(I-J)^a$. 但是$(x-\lambda_n J_{\lambda_n} x) \in R(I-J)$, 因此, 由第五章 § 1 定理 11, 必有$(x-x_h)\in R(I-J)^a$.

系 1 设(5)成立, 而且假设X是局部序列弱紧的. 则

$$X = N(I-J) \oplus R(I-J)^a. \tag{11}$$

证明 对于任何 $x\in X$, 令 $x_h = \lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x$ 和 $x_p = (x-x_h)$ 分别为x在$N(I-J)$和$R(I-J)^a$中的分量即可.

定理 2' 设(5')成立. 对给定的$x\in X$若有$\{n\}$的子序列$\{n'\}$使得

$$弱\text{-}\lim_{n\to\infty} \lambda_{n'} J_{\lambda_{n'}} x = x_{h'} \text{ 存在.} \tag{9'}$$

则有 $x_{h'} = \lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x$ 且 $x_{h'} \in R(J)^a$, $x_{p'} = (x-x_{h'}) \in N(J)$.

证明 在(8)中令 $\mu = \lambda_{n'}$ 且让 $n'\to\infty$, 由(5'), 可知 $\lambda J_\lambda(x-x_{h'}) = 0$, 即 $(x-x_{h'}) \in N(J)$. 因此

$$\lambda_n J_{\lambda_n} x = \lambda_n J_{\lambda_n} x_{h'}. \tag{10'}$$

所以, 我们仅需证明 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x_{h'} = x_{h'}$, 或者, 由引理 1', 证明 $x_{h'} \in R(J)^a$. 但是 $\lambda_{n'} J_{\lambda_{n'}} x_{h'} \in R(J)$, 因此, 由第五章 § 1 定理 11, 必有 $x_{h'} \in R(J)^a$.

系 1' 设(5')成立, 而X是局部序列弱紧的. 则

$$X = N(J) \oplus R(J)^a. \tag{11'}$$

证明 对于任何 $x\in X$, 令 $x_{h'} = \lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x$ 和 $x_{p'} = (x-x_{h'})$ 分别是x在$R(J)^a$和$N(J)$中的分量即可.

注 作为一个推论我们有: 在自反B-空间X中满足(5')的伪预解式J_λ是一具稠密定义域的

闭线性算子A的预解式当且仅当$R(J)^a=X$. 这一结果出自上面引用的 T. Kato 的论文. 其证明是容易的, 因为由 Eberlein 定理, B-空间X是局部序列弱紧的当且仅当X是自反的.

§5 殆周期函数的平均值

作为平均遍历定理的应用我们将给出殆周期函数的平均值的存在性的证明.

定义 1 元素$g, h, \cdots$的集合G称为群. 如果定义了G中任一元素对(g, h)的乘积gh(一般是不可交换的)满足如下条件:

$$gh\in G; \tag{1}$$

$$(gh)k=g(hk) \quad (结合性); \tag{2}$$

在G中存在唯一的元素e使得$eg=ge=g$对于一切$g\in G$成立; e称为群G的单位元; (3)

对于每一元素$g\in G$, 在G中存在唯一确定的元素, 用g^{-1}表示, 使得$gg^{-1}=g^{-1}g=e$, 元素g^{-1}称为g的逆元素. (4)

显然, g也是g^{-1}的逆, 因此$(g^{-1})^{-1}=g$. 群G称为可交换的, 如果对于一切$g, h\in G$, 有$gh=hg$成立.

例 行列式等于 1 的n阶复矩阵的全体关于矩阵乘法是群; 称为n阶复幺模群. 这个群的单位元素是单位矩阵, 而矩阵a的逆元是逆矩阵a^{-1}. 实幺模群有类似定义. 这些群当$n\geqq 2$时是不可交换的.

定义 2 (J. von Neumann[4]) 给定一抽象群G. 定义在G上的复值函数$f(g)$称为在G上是殆周期的, 如果下列条件成立:

函数集合$\{f_s(g, h); s\in G\}$关于$G\times G$上的一致收敛拓扑是完全有界的, 这里$f_s(g, h)=f(gsh)$定义在直积$G\times G$上. (5)

例 设G是全体实数的集合R^1, 其中群的乘法定义为实数的加法; 这个群R^1称为实数加法群. 函数$f(g)=e^{i\alpha g}$在R^1上是殆周期的, 其中α是实数而$i=\sqrt{-1}$. 由加法定理$f(gsh)=e^{i\alpha g}e^{i\alpha s}e^{i\alpha h}$以及$\{e^{i\alpha t}; t\in R^1\}$作为绝对值为 1 的复数的集合是完全有界的事实, 这个结论是容易看出的.

命题 1 假设$f(g)$是G上的殆周期函数. 如果我们遵照 A. Weil 的作法定义

$$\operatorname{dis}(s, u)=\sup_{g, h\in G}|f(gsh)-f(guh)|, \tag{6}$$

则

$$\operatorname{dis}(s, u)=\operatorname{dis}(asb, aub). \tag{7}$$

证明 由群的定义这是显然的.

系 1 所有满足$\operatorname{dis}(s, e)=0$的元素$s$所成之集合$E$组成$G$的不变子群, 即有:

如果$e_1, e_2\in E$, 则$e_1e_2\in E$, 而且对于每一$a\in G$, $ae_1a^{-1}\in E$. (8)

证明 设$\operatorname{dis}(e_1, e)=0$, $\operatorname{dis}(e_2, e)=0$. 则由(7)和三角不等式, 我们得到

$$\operatorname{dis}(e_1e_2, e) \leqq \operatorname{dis}(e_1e_2, e_1e) + \operatorname{dis}(e_1e, e) = 0+0=0.$$

类似地，由 $\operatorname{dis}(e_1, e)=0$，得到 $\operatorname{dis}(ae_1a^{-1}, e) = \operatorname{dis}(ae_1a^{-1}, aea^{-1})=0$.

系 2 如果当 $su^{-1}\in E$ 时记 $s\equiv u(\operatorname{mod} E)$，则 $s\equiv u(\operatorname{mod} E)$ 等价于 $\operatorname{dis}(s, u)=0$.

证明 结论是显然的，因为 $\operatorname{dis}(su^{-1}, e)=\operatorname{dis}(s, eu)=\operatorname{dis}(s, u)$.

系 3 概念 $s\equiv u(\operatorname{mod} E)$ 具有等价性的一切性质，这就是

$$s\equiv s(\operatorname{mod} E); \tag{9}$$

$$s\equiv u(\operatorname{mod} E), \text{则} u\equiv s(\operatorname{mod} E); \tag{10}$$

$$\text{如果 } s_1\equiv s_2(\operatorname{mod} E) \text{ 及 } s_2\equiv s_3(\operatorname{mod} E), \text{则 } s_1\equiv s_3(\operatorname{mod} E). \tag{11}$$

证明 从系 2 以及对于 $\operatorname{dis}(s, u)$ 的三角不等式，这是显然的.

因此，如同线性空间中的商空间的情况一样，我们可以定义商群或剩余类群 G/E 如下：我们将用 ξ_x 表示与固定元素 $x\in G$ 等价 $(\operatorname{mod} E)$ 的一切 $\in G$ 的元素的集合，即包含 x 的剩余类 $(\operatorname{mod} E)$；则全体剩余类 ξ_x 的集合按乘法

$$\xi_x\xi_y=\xi_{x+y} \tag{12}$$

构成一个群 G/E. 为了验证乘积的这一定义(12)，只须指出

$$\text{如果 } x_1\equiv x_2(\operatorname{mod} E), y_1\equiv y_2(\operatorname{mod} E), \text{则 } x_1y_1\equiv x_2y_2(\operatorname{mod} E). \tag{13}$$

这是显然的，因为由(7)和系(2)即有

$$\operatorname{dis}(x_1y_1, x_2y_2) \leqq \operatorname{dis}(x_1y_1, x_2y_1) + \operatorname{dis}(x_2y_1, x_2y_2) = \operatorname{dis}(x_1, x_2) + \operatorname{dis}(y_1, y_2) = 0+0=0.$$

因为函数 $f(x)$ 在剩余类 ξ_x 上取同一常数值，我们可以将 $f(x)$ 作为定义在剩余类群 G/E 上的函数 $F(\xi_x)$.

系 4 剩余类群按距离

$$\operatorname{dis}(\xi_x, \xi_y)=\operatorname{dis}(x, y) \tag{14}$$

是度量空间.

证明 由 $x\equiv x_1(\operatorname{mod} E)$ 和 $y\equiv y_1(\operatorname{mod} E)$ 推出

$$\operatorname{dis}(x, y) \leqq \operatorname{dis}(x, x_1)+\operatorname{dis}(x_1, y_1)+\operatorname{dis}(y_1, y)=0+\operatorname{dis}(x_1, y_1)+0$$

以及 $\operatorname{dis}(x_1, y_1) \leqq \operatorname{dis}(x, y)$，这就是 $\operatorname{dis}(x, y)=\operatorname{dis}(x_1, y_1)$. 于是(14)定义 G/E 中的一个距离.

系 5 群 G/E 关于距离 $\operatorname{dis}(\xi_x, \xi_y)$ 是拓扑群，即乘法运算 $\xi_x\xi_y$ 作为从乘积空间 $(G/E)\times(G/E)$ 到 G/E 上的映射是连续的，而运算 ξ_x^{-1} 作为从 G/E 到 G/E 上的映射是连续的.

证明 由(7)，有

$$\operatorname{dis}(su, s'u') \leqq \operatorname{dis}(su, s'u)+\operatorname{dis}(s'u, s'u')=\operatorname{dis}(s, s')+\operatorname{dis}(u, u')$$

以及

$$\operatorname{dis}(s^{-1}, u^{-1})=\operatorname{dis}(ss^{-1}u, su^{-1}u)=\operatorname{dis}(u, s)=\operatorname{dis}(s, u).$$

于是可以证明下面的

定理 1(A. Weil) 用(14)度量化的拓扑群 G/E 是完全有界的，而函数 $f(x)$ 产生的函数 $(\xi_x)(=f(x))$ 在此群 G/E 上一致连续.

证明 由于

$$|F(\xi_x)-F(\xi_y)|=|f(x)-f(y)|\leqq \mathrm{dis}(x,y)-\mathrm{dis}(\xi_x,\xi_y),$$

函数 $F(\xi_x)$ 的一致连续性是显然的. 根据(7)和(14), 由函数 $f(x)$的殆周期性就推出度量空间 G/E 是完全有界的.

根据上面的定理, 殆周期函数的理论简化为由满足条件(7)的距离函数 $\mathrm{dis}(g_1,g_2)$度量化的完全有界拓扑群 G 上的一致连续函数 $f(g)$的研究. 利用这个事实, 我们将给出殆周期函数的平均值的存在性的证明.

因 G 完全有界, 故对于任何 $\varepsilon>0$, 存在有限的一组元素 $g_1, g_2, \cdots, g_n$, 使得 $\min\limits_{1\leq j\leq n}\mathrm{dis}(g,g_j)\leq\varepsilon$ 对任何 $g\in G$ 成立. 因此, 当把相应于 $\varepsilon=1, 2^{-1}, 3^{-1}, \cdots$的各有限点组集中在一起时, 我们看出存在 $\subset G$ 的点的可数系$\{g_j\}$使得$\{g_j\}$在 G 中稠密. 取一正数序列 α_j 使得 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j=1$. 设 $C(G)$是定义在 G 上的一致连续复值函数 $h(g)$ 的全体所成的集合. 按照函数和的运算和范数 $\|h\|=\sup\limits_{g\in G}|h(g)|$, $C(G)$成为 B-空间. 我们定义映 $C(G)$入 $C(G)$内的算子 T 为

$$(T\cdot h)(g)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j h(g_j g). \tag{15}$$

由 $h(g)$在 G 上的一致连续性, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $\mathrm{dis}(g,g')\leqq\delta$ 就有$|h(g)-h(g')|\leqq\varepsilon$. 于是, 由(7), 只要 $\mathrm{dis}(g,g')\leqq\delta$, 就有 $|h(g_jg)-h(g_jg')|\leqq\varepsilon\,(j=1,2,\cdots)$. 因此由 $\alpha_j>0$ 和$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j=1$, 容易看出, T 是映 $C(G)$入 $C(G)$内的有界线性算子. 同理, 我们得知, 由

$$h_n(g)=n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(T^m h)(g),\ \text{它具有}\ h_n(g)=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j h(g_j'g)\ \text{的形式, 其中}\ \beta_j>0,\ \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j=1, \tag{16}$$

定义的函数 $h_n(g)$的集合关于 n 等度有界和等度连续. 因此, 根据 Ascoli-Arzelà 定理, 序列$\{h_n(g)\}$包含一个在 G 上一致收敛的子序列.

所以, 由平均遍历定理, 必存在 $h^*(g)\in C(G)$使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{g}|h_n(g)-h^*(g)|=0\ \text{和}\ Th^*=h^*. \tag{17}$$

命题 2 $h^*(g)$恒等于常数.

证明 不失一般性, 我们可以假设 $h(g)$和 $h^*(g)$是实值的. 假设存在一点 $g_0\in G$ 和正常数 δ 使得

$$h^*(g_0)\leqq\beta-2\delta,\ \text{其中}\ \beta=\sup_{g\in G}h^*(g).$$

由 $h^*(g)$的连续性, 存在正数 ε 使得只要 $\mathrm{dis}(g',g'')\leqq\varepsilon$就有$|h^*(g')-h^*(g'')|\leqq\delta$; 特别地, 只要 $\mathrm{dis}(g_0,g'')\leqq\varepsilon$ 就有 $h^*(g'')\leqq\beta-\delta$. 因为序列$\{g_j\}$在 G 中稠密, 则对任何 $\varepsilon>0$, 存在足标 n, 使得对于任何$g\in G$, 有 $\min\limits_{1\leq j\leq n}\mathrm{dis}(g,g_j)\leqq\varepsilon$ 成立. 因此, 由(7), 对于任何 $g\in G$, 有

$$\min_{1\leq j\leq n}\mathrm{dis}(g_0,g_jg)\leqq\varepsilon.$$

设这一最小值在 $j=j_0$ 达到. 则

$$h^*(g) = (Th^*(g)) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j h^*(g_j g) \le \alpha_{j_0}(\beta-\delta) + (1-\alpha_{j_0})\beta = \beta - \alpha_{j_0}\delta < \beta,$$

这同 g 是 G 的任意点的假设矛盾. 所以 $h^*(g)$ 恒等于常数.

定义 3 我们称常数值 $h^*(g)$ 是 $h(g)$ 的左平均值并用 $M_g^l(h(g))$ 表示它的值:

$$M_g^l(h(g)) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(T^m h)(g). \tag{18}$$

定理 2(J. von Neumann) 我们有

$$M_g^l(\alpha h(g)) = \alpha M_g^l(h(g)), \tag{i}$$

$$M_g^l(h_1(g)+h_2(g)) = M_g^l(h_1(g)) + M_g^l(h_2(g)), \tag{ii}$$

$$M_g^l(1) = 1, \tag{iii}$$

如果在 G 上 $h(g)\ge 0$, 则 $M_g^l(h(g))\ge 0$;

如果还有 $h(g)\not\equiv 0$, 则

$$M_g^l(h(g)) > 0, \tag{iv}$$

$$|M_g^l(h(g))| \le M_g^l(|h(g)|), \tag{v}$$

$$M_g^l(\overline{h(g)}) = \overline{M_g^l(h(g))}, \tag{vi}$$

$$M_g^l(h(ga)) = M_g^l(h(g)), \tag{vii}$$

$$M_g^l(h(ag)) = M_g^l(h(g)), \tag{vii'}$$

$$M_g^l(h(g^{-1})) = M_g^l(h(g)). \tag{viii}$$

证明 根据定义 (18), (i), (ii), (iii), (iv)的第一部分, (v)以及(vi) 的正确性都是显然的. (vii) 的正确性利用命题 2 就证明了. 而(vii')的证明如下.

从按照

$$(T'h)(g) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j h(gg_j)$$

所定义的线性算子 T' 着手, 我们同样可以定义右平均值 $M_g^r(h(g))$, 它作为 $h(g)$ 的泛函满足(i), (ii), (iii), (iv)的第一部分, (v), (vi)以及(vii'). 于是我们必须证明左平均值 $M_g^l(h(g))$ 同右平均值 $M_g^r(h(g))$ 重合. 由左平均值的定义, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在元素序列 $\{k_j\}\subseteq G$ 以及满足 $\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j = 1$ 的正数序列 β_j, 使得

$$\sup_g\left|\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j h(k_j g) - M_g^l(h(g))\right| < \varepsilon. \tag{19}$$

类似地, 存在元素序列 $\{s_j\}\subseteq G$ 以及满足 $\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j = 1$ 的正数序列 γ_j, 使得

$$\sup_g\left|\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j h(gs_j) - M_g^r(h(g))\right| \le \varepsilon. \tag{20}$$

由于(19)和(vii)，得到

$$\sup_g \left| \sum_{ij} \gamma_i \beta_j h(k_j g s_i) - M_g^l(h(g)) \right| \leq \varepsilon,$$

而类似地，由于(20)和(vii′)，得到

$$\sup_g \left| \sum_{ij} \gamma_i \beta_j h(k_j g s_i) - M_g^r(h(g)) \right| \leq \varepsilon.$$

因此必有 $M_g^l(h(g)) = M_g^r(h(g))$.

其次注意，根据性质(i)，(ii)，(iii)，(iv)的第一部分，(v)，(vi)以及(vii)(或(vii′)也一样)，唯一确定一个定义在 $C(G)$ 上的线性泛函 $M_g(h(g))$. 事实上，由(20)，我们有

$$M_g^r(h(g)) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i h(g s_i) \leq M_g^r(h(g)) + \varepsilon \text{ 对于实值的 } h(g) \text{ 成立.}$$

因此，对于实值的 $h(g)$，$M_g(h(g))$ 必同右平均 $M_g^r(h(g))$ 重合，因此亦同左平均 $M_g^l(h(g))$ 重合. 所以，我们得知必有 $M_g = M_g^r = M_g^l$. 由于等于右平均，M_g 必满足(vii′). 此外，由于 $M_g^l(h(g^{-1}))$ 作为线性泛函满足(i)，(ii)，(iii)，(iv)的第一部分，(v)，(vi)以及(vii′)，必有 $M_g^l(h(g^{-1})) = M_g^r(h(g)) = M_g^l(h(g))$.

最后我们来证明(iv)的后一部分. 假设 $h(g_0) > 0$. 对于任一 $\varepsilon > 0$，由 G 的完全有界性，存在有限的一组元素 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 使得

$$\min_{1 \leq i \leq n} \sup_g |h(g s_i) - h(g s)| < \varepsilon$$

对一切 $s \in G$ 成立. 这由 $h(g)$ 的一致连续性以及 $\mathrm{dis}(g s_i, g s) = \mathrm{dis}(s_i, s)$ 可以得到. 因此，对于 $\varepsilon = h(g_0)/2$，存在下标 i，$1 \leq i \leq n$，使得对于任何 $s \in G$ 有

$$h(g_0 s_i^{-1} s) \geq h(g_0)/2.$$

于是，由函数 $h(g)$ 的非负性，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n} h(g_0 s_i^{-1} s) \geq h(g_0)/2 \text{ 对于一切 } s \in G \text{ 成立.}$$

因此，在两端取右平均，就有

$$M_g^r\left(\sum_{i=1}^{n} h(g_0 s_i^{-1} s) \right) = n M_g^r(h(s)) \geq h(g_0)/2 > 0.$$

注 引入距离(14)的巧妙的思想是在 A. Weil[1] 中指出的. 平均遍历定理对于平均值的存在性的证明的应用属于本书作者. 也参看 W. Maak[1].

§6. 对偶算子的预解式

引理 1 设 X 和 Y 是复 B-空间. 设 T 是具有 $D(T)^a = X$ 和 $R(T) \subseteq Y$ 的线性算子. 则 $(T')^{-1}$ 存在当且仅当 $R(T)^a = Y$.

证明 如果 $T' y_0^* = 0$，则

$$\langle x, T'y_0^*\rangle = \langle Tx, y_0^*\rangle = 0 \quad 对于一切 x\in D(T) 成立,$$

因此 $y_0^*(R(T)^a)=0$. 于是由 $R(T)^a=Y$ 导致 $y_0^*=0$, 从而 T' 有逆. 另一方面, 如果 $y_0\overline{\in}R(T)^a$, 则 Hahn-Banach 定理断言必存在连续线性泛函 $y_0^*\in Y'$ 使得 $y_0^*(y_0)=1$ 且 $y_0^*(R(T)^a)=0$. 因而 $\langle Tx, y_0^*\rangle=0$ 对一切 $x\in D(T)$ 成立, 从而 $y_0^*\in D(T)$ 且 $T'y_0^*=0$, 而 $y_0^*(y_0)\neq 0$, 即 $y_0^*\neq 0$. 因此, 由条件 $R(T)^a\neq Y$ 导致 T' 不可能有逆.

定理 1 (R. S. Phillips[2]) 设 T 是有逆的线性算子而且 $D(T)^a=X$ 和 $R(T)^a=Y$, 这里 X 和 Y 是 B-空间. 则

$$(T')^{-1}=(T^{-1})'. \tag{1}$$

T^{-1} 在 Y 上为有界的当且仅当 T 是闭的且 $(T')^{-1}$ 在 X'_s 上是有界的.

证明 因为 $D(T^{-1})=R(T)$ 在 Y 中稠密, 故 $(T^{-1})'$ 存在. 由引理 1, $(T')^{-1}$ 存在. 我们必须证明等式(1)成立. 如果 $y\in R(T)$ 且 $y^*\in D(T')$, 则

$$\langle y, y^*\rangle=\langle TT^{-1}y, y^*\rangle=\langle T^{-1}y, T'y^*\rangle.$$

因此 $R(T')\subseteq D((T^{-1})')$ 且 $(T^{-1})'(T'y^*)=y^*$ 对一切 $y^*\in D(T')$ 成立. 于是 $(T^{-1})'$ 是 $(T')^{-1}$ 的扩张. 其次, 如果 $x\in D(T)$, 则

$$\langle x, x^*\rangle=\langle T^{-1}Tx, x^*\rangle=\langle Tx, (T^{-1})'x^*\rangle 对一切 x^*\in D((T^{-1})') 成立.$$

因此 $R((T^{-1})')\subseteq D(T')$ 且 $T'(T^{-1})'x^*=x^*$ 对一切 $x^*\in D((T^{-1})')$ 成立. 于是 $(T^{-1})'$ 是 $(T')^{-1}$ 的收缩. 因此(1)得证.

此外, 如果再设 T^{-1} 在 Y 上是有界的, 则 $(T^{-1})'$ 亦是有界的. 反之, 如果 $(T')^{-1}$ 在 X'_s 上有界, 则对于一切 $x\in R(T)$ 和 $x^*\in X'$, 由(1)我们有

$$|\langle T^{-1}x, x^*\rangle|=|\langle x, (T^{-1})'x^*\rangle|=|\langle x, (T')^{-1}x^*\rangle|\leqq\|(T')^{-1}\|\cdot\|x^*\|\cdot\|x\|.$$

由于 T^{-1} 是闭的以及 $R(T)^a=Y$, 则 T^{-1} 必是有界的.

引理 2 设 T 是线性算子, 且 $D(T)^a=X$, $R(T)\subseteq Y$, 这里 X 和 Y 是 B-空间. 如果 $R(T')$ 在 X' 中是弱*稠密的, 则 T 有逆.

证明 假设存在 $x_0\neq 0$, 使得 $Tx_0=0$. 则

$$\langle x_0, T'y^*\rangle=\langle Tx, y^*\rangle=0 对一切 y^*\in D(T^*) 成立.$$

这表示 $R(T')$ 的弱* 闭包是 X' 的真子空间, 同假设矛盾.

定理 2 (R. S. Phillips[2]) 设 X 是复 B-空间, 而 T 是闭线性算子, 其 $D(T)^a=X$ 和 $R(T)\subseteq X$, 则

$$\rho(T)=\rho(T') 和 R(\lambda; T)'=R(\lambda; T') 对 \lambda\in\rho(T) 成立. \tag{2}$$

证明 如果 $\lambda\in\rho(T)$, 则由定理 1, 有 $\lambda\in\rho(T')$ 及 $R(\lambda;T)'=R(\lambda;T')$. 另一方面, 如果 $\lambda\in\rho(T')$, 则由引理2, $(\lambda I-T)$ 有逆 $(\lambda I-T)^{-1}$, 它同 $(\lambda I-T)$ 都是闭的. 其次由引理1, $D((\lambda I-T)^{-1})=R(\lambda I-T)$ 在 Y 中强稠密. 因此, 根据定理 1, $\lambda\in\rho(T)$.

§ 7. Dunford 积分

设 X 是复 B-空间, T 是 $\in L(X, X)$ 的有界线性算子. 我们要用 Cauchy 型积分

$$f(T)=(2\pi i)^{-1}\int_C f(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda$$

定义T的函数$f(T)$. 为此，我们用$F(T)$表示所有复值函数$f(\lambda)$构成的族，它们在T的谱集$\sigma(T)$的某邻域内是解析的；此邻域无需是连通的，而且可以依赖于函数$f(\lambda)$. 设$f\in F(T)$，并设复平面的开集$U\supseteq\sigma(T)$包含于f的解析域内，再进一步假设U的边界∂U是由有限条正定向可求长Jordan曲线组成. 则有界线性算子$f(T)$将定义为

$$f(T)=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial U} f(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda, \tag{1}$$

且右边的积分可以称为Dunford积分. 根据Cauchy积分定理，值$f(T)$仅依赖于函数f和算子T，而不依赖于域U的选择.

如下的算子演算成立：

定理(N. Dunford) 如果f和g属于$F(T)$，而α和β是复数，则

$$\alpha f+\beta g\in F(T)\text{ 且 }\alpha f(T)+\beta g(T)=(\alpha f+\beta g)(T); \tag{2}$$

$$f\cdot g\in F(T)\text{ 且 }f(T)\cdot g(T)=(f\cdot g)(T); \tag{3}$$

如果f在$\sigma(T)$的邻域U内有收敛的Taylor展式$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n$，则$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nT^n$（按算子范数拓扑）； (4)

设$f_n\in F(T)$ $(n=1,2,\cdots)$在$\sigma(T)$的一固定邻域U是解析的. 如果$f_n(\lambda)$在U上一致收敛于$f(\lambda)$，则$f_n(T)$按算子范数拓扑收敛于$f(T)$； (5)

$$\text{如果 }f\in F(T)\text{，则 }f\in F(T')\text{ 且 }f(T')=f(T)'. \tag{6}$$

证明 (2)是显然的. (3)的证明：设U_1和U_2是$\sigma(T)$的开邻域，其边界∂U_1和∂U_2由有限条可求长Jordan曲线组成，再假设$U_1+\partial U_1\subseteq U_2$且$\partial U_2+U_2$包含于$f$和$g$的解析域. 则借助于预解方程和Cauchy积分定理，可得

$$\begin{aligned}f(T)g(T)&=-(4\pi^2)^{-1}\int_{\partial U_1} f(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda\cdot\int_{\partial U_2} g(\mu)R(\mu;T)d\mu\\
&=-(4\pi^2)^{-1}\int_{\partial U_1}\int_{\partial U_2} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(R(\lambda;T)-R(\mu;T))d\lambda d\mu\\
&=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial U_1} f(\lambda)R(\lambda;T)\left\{(2\pi i)^{-1}\int_{\partial U_2}(\mu-\lambda)^{-1}g(\mu)d\mu\right\}d\lambda\\
&\quad-(2\pi i)^{-1}\int_{\partial U_2} g(\mu)R(\mu;T)\cdot\left\{(2\pi i)^{-1}\int_{\partial U_1}(\mu-\lambda)^{-1}f(\lambda)d\lambda\right\}d\mu\\
&=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial U_1} f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda;T)d\lambda=(f\cdot g)(T).\end{aligned}$$

(4)的证明. 由假设，U必包含一圆域$\{\lambda;|\lambda|\leq r_\sigma(T)+\varepsilon\}$，$\varepsilon>0$，在其内部，其中$r_\sigma(T)$是$T$

的谱半径(第八章§2的定理4). 因此幂级数 $f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n$ 对某一 $\varepsilon>0$ 在圆域 $C=\{\lambda;\ |\lambda|\leq r_\sigma(T)+\varepsilon\}$ 上一致收敛. 因此, 由 Cauchy 积分定理和 $R(\lambda;T)$ 的 Laurent 展式 $R(\lambda;T)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n-1}$(第八章§2 (5)式)

$$f(T)=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial C}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k\right)R(\lambda;T)d\lambda=(2\pi i)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\int_{\partial C}\lambda^k R(\lambda;T)d\lambda$$

$$=(2\pi i)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\partial C}\lambda^{k-n}T^{n-1}d\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k T^k.$$

利用(1)得(5), 而利用(1)和前节的公式(2)得(6).

系 1 (谱映射定理) 若 $f\in F(T)$, 则 $f(\sigma(T))=\sigma(f(T))$.

证明 设 $\lambda\in\sigma(T)$, 并用 $g(\mu)=(f(\lambda)-f(\mu))/(\lambda-\mu)$ 定义函数 g. 由上述定理, $f(\lambda)I-f(T)=(\lambda I-T)g(T)$. 因此, 如果 $(f(\lambda)I-f(T))$ 有有界逆 B, 则 $g(T)B$ 必是 $(\lambda I-T)$ 的有界逆. 于是由 $\lambda\in\sigma(T)$ 导致 $f(\lambda)\in\sigma(f(T))$. 反之, 设 $\lambda\in\sigma(f(T))$, 且假设 $\lambda\overline{\in}f(\sigma(T))$. 则函数 $g(\mu)=(f(\mu)-\lambda)^{-1}$ 必属于 $F(T)$, 因而由前述定理, 有 $g(T)(f(T)-\lambda I)=I$, 这同假设 $\lambda\in\sigma(f(T))$ 矛盾.

系 2 如果 $f\in F(T)$, $g\in F(f(T))$ 和 $h(\lambda)=g(f(\lambda))$, 则 $h\in F(T)$ 且 $h(T)=g(f(T))$.

证明 $h\in F(T)$ 可由系 1 推出. 设 U_1 是 $\sigma(f(T))$ 的开邻域, 其边界 ∂U_1 由有限条可求长 Jordan 曲线组成且使得 $U_1+\partial U_1$ 包含于 g 的解析域. 设 U_2 是 $\sigma(T)$ 的邻域, 其边界 ∂U_2 由有限条可求长 Jordan 曲线组成且使得 $U_2+\partial U_2$ 包含于 f 的解析域以及 $f(U_2+\partial U_2)\subseteq U_1$. 则对于 $\lambda\in\partial U_1$, 我们有

$$R(\lambda;f(T))=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial U_2}(\lambda-f(\mu))^{-1}R(\mu;T)d\mu,$$

因为由(3), 右端算子 S 满足方程 $(\lambda I-f(T))S=S(\lambda I-f(T))=I$. 因此, 根据 Cauchy 积分定理, 有

$$g(f(T))=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial U_1}g(\lambda)R(\lambda;f(T))d\lambda=(-4\pi^2)^{-1}\int_{\partial U_1}\int_{\partial U_2}g(\lambda)(\lambda-f(\mu))^{-1}R(\mu;T)d\mu d\lambda$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int_{\partial U_2}R(\mu;T)g(f(\mu))d\mu=h(T).$$

注 建立在类似于公式(1)的基础上的算子演算的引入应追溯到 H. Poincare' 关于连续群的研究(1899 年). 这一节关于算子演算的介绍取材于 N. Dunford-J. Schwartz[1]. 在关于半群的下一章, 我们要经常使用对于无界闭算子 T 的 Dunford 积分.

§8. 预解式的孤立奇点

设 λ_0 是映复 B-空间 X 入 X 内的闭线性算子 T 的预解式 $R(\lambda;T)$ 的孤立奇点. 则 $R(\lambda;T)$ 可以展为 Laurent 级数

$$R(\lambda;T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n A_n,\quad A_n=(2\pi i)^{-1}\int_C(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}R(\lambda;T)d\lambda \tag{1}$$

其中 C 是半径充分小的圆周：$|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon$ 使得圆域 $|\lambda-\lambda_0|\leqq\varepsilon$ 不包含异于 $\lambda=\lambda_0$ 的奇点，而积分是沿反时针方向进行的．利用预解方程我们得到

定理 1 诸 A_n 是彼此可换的有界线性算子，并且

$$\begin{cases}TA_k=A_kT\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\\ A_kA_m=0\ \text{对于}\ k\geqq0,\ m\leqq1,\\ A_n=(-1)^nA_0^{n+1}\quad(n\geqq1),\\ A_{-p-q+1}=A_{-p}A_{-q}\quad(p,q\geqq1).\end{cases} \tag{2}$$

证明 诸 A_n 的有界性和彼此间的交换性以及诸 A_n 同 T 的交换性由诸 A_n 的积分表示显然可得．

我们将 $R(\lambda;T)$ 的展式代入预解方程 $R(\lambda;T)-R(\mu;T)=(\mu-\lambda)R(\lambda;T)R(\mu;T)$，就得到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k\frac{(\lambda-\lambda_0)^k-(\mu-\lambda_0)^k}{(\lambda-\lambda_0)-(\mu-\lambda_0)}=-\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}A_kA_m(\lambda-\lambda_0)^k(\mu-\lambda_0)^m.$$

在左边 A_n 的系数是

$$(\lambda-\lambda_0)^{n-1}+(\lambda-\lambda_0)^{n-2}(\mu-\lambda_0)+\cdots+(\mu-\lambda_0)^{n-1},\ n\geqq1,$$

$$-\{(\lambda-\lambda_0)^n(\mu-\lambda_0)^{-1}+(\lambda-\lambda_0)^{n+1}(\mu-\lambda_0)^{-2}+\cdots+(\lambda-\lambda_0)^{-1}(\mu-\lambda_0)^n\},\ n<0.$$

因此包含 $(\lambda-\lambda_0)^k(\mu-\lambda_0)^m$ 的项消失了，其中 $k\geqq0$ 而 $m\leqq-1$，因此必有正交性 $A_kA_m=0(k\geqq0,m\leqq-1)$．因此

$$R^+(\lambda;T)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\lambda-\lambda_0)^n\quad 和\quad R^-(\lambda;T)=\sum_{n=-\infty}^{-1}A_n(\lambda-\lambda_0)^n$$

必都满足预解方程．将 $R^+(\lambda;T)$ 的展式代入预解方程

$$R^+(\lambda;T)-R^+(\mu;T)=(\mu-\lambda)R^+(\lambda;T)R^+(\mu;T),$$

记 $(\lambda-\lambda_0)=h$，$(\mu-\lambda_0)=k$，我们得到

$$\sum_{p=1}^{\infty}A_p(h^p-k^p)=(k-h)\left(\sum_{p=0}^{\infty}A_ph^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}A_qk^q\right).$$

两端除以 $(k-h)$，就得到

$$-\sum_{p=1}^{\infty}A_p(h^{p-1}+h^{p-2}k+\cdots+k^{p-1})=\sum_{p,q=0}^{\infty}h^pk^qA_pA_q$$

因此我们有 $-A_{p+q+1}=A_pA_q(p,\ q\geqq0)$．于是，特别地，有 $A_1=-A_0^2$，$A_2=-A_1A_0=(-1)^2A_0^3,\cdots$，$A_n=(-1)^nA_0^{n+1}(n\geqq1)$．

类似地，由 $R^-(\lambda;T)$ 的预解方程，记 $(\lambda-\lambda_0)^{-1}=h$，$(\mu-\lambda_0)^{-1}=k$，得到

$$\sum_{p=1}^{\infty}A_{-p}(h^{p-1}+h^{p-2}k+\cdots+k^{p-1})=\sum_{p,q=1}^{\infty}h^{p-1}k^{q-1}A_{-p}A_{-q},$$

因此我们有 $A_{-p-q+1}=A_{-p}A_{-q}(p,q\geqq1)$．特别地，我们有

$$A_{-1}=A_{-1}^2,\quad A_{-2}=A_{-1}A_{-2},\cdots,A_{-n}=A_{-1}A_{-n}\quad (n\geqq 1).$$

定理 2 我们有

$$\begin{aligned} A_n &= (T-\lambda_0 I)A_{n+1}\quad (n\geqq 1), \\ (T-\lambda_0 I)A_{-n} &= A_{-(n+1)}=(T-\lambda_0 I)^n A_{-1}\quad (n\geqq 1), \\ (T-\lambda_0 I)A_0 &= A_{-1}-I. \end{aligned} \tag{3}$$

证明 由 A_k 的积分表示,我们知道值域 $R(A_k)$ 包含于 T 的定义域中,因此可以用 T 左乘 A_k. 于是我们的定理就由恒等式

$$\begin{aligned} I &= (\lambda I-T)\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(\lambda-\lambda_0)^k \\ &= \{(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-T)\}\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(\lambda-\lambda_0)^k \end{aligned}$$

得证.

定理 3 如果 λ_0 是 $R(\lambda;T)$ 的 m 阶极点,则 λ_0 是 T 的本征值. 我们有

$$R(A_{-1})=N((\lambda_0 I-T)^n) \text{ 和 } R(I-A_{-1})=R((\lambda_0 I-T)^n) \text{ 对于 } n\geqq m \text{ 成立.} \tag{4}$$

因此,特别地

$$X=N((\lambda_0 I-T)^n)\oplus R((\lambda_0 I-T)^n) \text{ 对于 } n\geqq m \text{ 成立.} \tag{5}$$

证明 因为 A_{-1} 是满足 $A_{-1}^2=A_{-1}$ 的有界线性算子,容易看出

$$N(A_{-1})=R(I-A_{-1}). \tag{6}$$

令 $X_1=N(A_{-1})=R(I-A_{-1})$,同时令

$$X_2=R(A_{-1}),\quad N_n=N((\lambda_0 I-T)^n) \text{ 以及 } R_n=R((\lambda_0 I-T)^n). \tag{7}$$

设 $x\in N_n$,其中 $n\geqq 1$. 则由 $(T-\lambda_0 I)^n A_{n-1}=(T-\lambda_0 I)A_0=A_{-1}-I$,我们得出 $0=A_{n-1}(T-\lambda_0 I)^n x=(T-\lambda_0 I)^n A_{n-1}x-(T-\lambda_0 I)A_0 x=A_{-1}x-x$,从而 $x=A_{-1}x\in X_2$. 于是 N_n 包含于 X_2,其中 $n\geqq 1$. 反之,设 $x\in X_2$. 则有 $x=A_{-1}y$,因此由 $A_{-1}=A_{-1}^2$,有 $x=A_{-1}A_{-1}y=A_{-1}x$;所以由 $(T-\lambda_0 I)^n A_{-1}=A_{-(n+1)}$ 有 $(T-\lambda_0 I)^n x=A_{-(n+1)}x$. 因为根据假设,对于 $n\geqq m$ 有 $A_{-(n+1)}=0$,这就推出对于 $n\geqq m$,$X_2\subseteqq N_n$,从而如果 $n\geqq m$ 就有

$$N_n=X_2. \tag{8}$$

因为 $(T-\lambda_0 I)A_{-m}=A_{-(m+1)}=0$ 和 $A_{-m}\neq 0$,数 λ_0 是 T 的本征值.

由 $(T-\lambda_0 I)^n A_{n-1}=A_{-1}-I$ 我们看出 $X_1=N(A_{-1})=R(I-A_{-1})\subseteqq R_n$. 如果 $n\geqq m$,则由 $x\in R_n\cap N_n$ 必导致 $x=0$. 这是因为,如果 $x=(\lambda_0 I-T)^n y$ 而 $(\lambda_0 I-T)^n x=0$,则由(8),$y\in N_{2n}=N_n$,因此 $x=0$. 其次,假设 $x\in R_n$,其中 $n\geqq m$,且记 $x=x_1+x_2$,这里 $x_1=(I-A_{-1})x\in X_1$,$x_2=A_{-1}x\in X_2$. 则因为 $X_1\subseteqq R_n$,有 $x_2=x-x_1\in R_n$,然而由(8),$x_2\in X_2=N_n$,从而 $X_2\in R_n\cap N_n$,$x_2=0$. 这就证明 $x=x_1\in X_1$. 所以如果 $n\geqq m$,我们就证明了 $R_n=X_1$.

定理 4 特别地,如果 T 是有界线性算子,且使得 $X_2=R(A_{-1})$ 是 X 的有限维线性子空间,则 λ_0 是 $R(\lambda;T)$ 的极点.

证明 设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是线性空间 X_2 的基. 因为 $x_1, Tx_1, T^2x_1, \cdots, T^kx_1$ 是 X_2 的线性相

关向量，故存在非零多项式 $P_1(\lambda)$ 使得 $P_1(T)x_1=0$. 类似地，存在非零多项式 $P_2(\lambda), \cdots, P_k(\lambda)$ 使得 $P_j(T)x_j=0 (j=2, 3, \cdots, k)$. 那么对于多项式 $P(\lambda)=\prod_{j=1}^{k}P_j(\lambda)$，必有 $P(T)x_j=0 (j=1, 2, \cdots, k)$，因此 $P(T)x=0$ 对每一 $x\in X_2$ 成立.

设

$$P(\lambda)=\alpha\prod_{j=0}^{s}(\lambda-\lambda_j)^{\nu_j} \quad (\alpha\neq 0)$$

是 $P(\lambda)$ 的因式分解. 则我们可以证明 $(T-\lambda_0 I)^{\nu_0}x=0$ 对于每一 $x\in X_2$ 成立. 假设相反，且设 $x_0\in X_2$ 使得 $(T-\lambda_0 I)^{\nu_0}x_0\neq 0$. 则由 $P(T)x_0=0$，我们得知至少存在某一 $\lambda_j (j\neq 0)$ 和多项式 $Q(\lambda)$ 使得

$$(T-\lambda_j I)Q(T)(T-\lambda_0 I)^{\nu_0}x_0=0$$

并有 $y=Q(T)(T-\lambda_0 I)^{\nu_0}x_0\neq 0$. 于是 $y\in X_2$ 是相应于本征值 λ_j 的本征向量. 因此 $(\lambda I-T)y=(\lambda-\lambda_j)y$. 从而用 $R(\lambda;T)$ 乘两边，我们得到 $y=(\lambda-\lambda_j)R(\lambda;T)y$，而这就推出

$$y=A_{-1}y=(2\pi i)^{-1}\int_C R(\lambda;T)y\,d\lambda=(2\pi i)^{-1}\int_C(\lambda-\lambda_j)^{-1}y\,d\lambda=0,$$

其中 C 取作以 λ_0 为心的充分小圆周. 这就得到矛盾，因此必存在正整数 m 使得 $(T-\lambda_0 I)^m X_2=0$. 于是，由 $X_2=R(A_{-1})$ 和 $(T-\lambda_0 I)^n A_{-1}=A_{-(n+1)}$，我们得知 $A_{-(n+1)}=0$ 对于 $n\geqq m$ 成立.

评注和参考文献

§6. 取材于 R. S. Phillips[2]，§8 取材于 M. Nagumo[1]和 A. Taylor [1]. 这两节的一部分结果可以很容易地推广到局部凸线性拓扑空间的情况. 请参看，例如，下一章的 §13.

第九章　半群的分析理论

Banach 空间中的有界线性算子半群的分析理论是处理无穷维函数空间中的指数函数的理论. 它是同确定最一般的满足方程

$$T(s+t)=T(t)\cdot T(s),\ T(0)=I$$

的有界线性算子值函数 $T(t)$, $t\geqq 0$, 的问题相关的. E. Hille[2]和 K. Yosida[5]在 1948 年左右彼此独立地研究了这个问题. 他们用定义

$$A=\text{s-}\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(T(t)-I)$$

引入 $T(t)$的无穷小生成元 A 的概念并讨论了 $T(t)$怎样由 A 而产生, 而且得到了用无穷小生成元 A 的谱性质表示 A 的特征的结果.

半群理论的基本结果可以作为将在后面阐明的 Hilbert 空间中的单参数酉算子群的 M. Stone[2]定理的自然推广. 这一理论对于随机过程和对于包括扩散方程, 波动方程和Schrödinger 方程在内的发展方程的积分的应用将在第十四章讨论.

在这一章里, 我们将不在 Banach 空间而在局部凸线性拓扑空间中讨论连续线性算子的半群理论.

§1. (C_0)类半群

命题(E. Hille)　设 X 是 B-空间, 而 T_t, $t\geqq 0$, 是 $L(X, X)$ 中满足半群性质

$$T_tT_s=T_{t+s}\quad \text{对于}\ t, s\geqq 0\ \text{成立} \tag{1}$$

的有界线性算子的单参数族. 如果 $p(t)=\log\|T_t\|$ 对于每一正数 a 在区间$(0, a)$有上界, 则

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\log\|T_t\|=\inf_{t>0} t^{-1}\log\|T_t\|. \tag{2}$$

证明　由 $\|T_{t+s}\|=\|T_tT_s\|\leqq\|T_t\|\|T_s\|$ 得 $p(t+s)\leqq p(t)+p(s)$. 设 $\beta=\inf\limits_{t>0} t^{-1}p(t)$. β 或有限或为$-\infty$. 假设 β 有限, 对任意 $\varepsilon>0$, 我们选一数 a, 使得 $p(a)\leqq(\beta+\varepsilon)a$. 设 $t>a$, n 是满足 $na\leqq t<(n+1)a$ 的整数. 那么

$$\beta\leqq\frac{p(t)}{t}\leqq\frac{p(na)}{t}+\frac{p(t-na)}{t}\leqq\frac{na}{t}\frac{p(a)}{a}+\frac{p(t-na)}{t}$$

$$\leqq\frac{na}{t}(\beta+\varepsilon)+p(t-na)/t.$$

由假设, $p(t-na)$当 $t\to\infty$时有上界. 那么, 在上面不等式中令 $t\to\infty$, 我们得到 $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}p(t)=\beta$. 对 $\beta=-\infty$的情况可类似处理.

定义 1　如果$\{T_t;\ t\geqq 0\}\subseteq L(X, X)$满足条件

$$T_t T_s = T_{t+s} \quad (t, s \geqq 0), \tag{1'}$$

$$T_0 = I \tag{3}$$

$$s\text{-}\lim_{t \to t_0} T_t x = T_{t_0} x \text{ 对于每一 } t_0 \geqq 0 \text{ 和每一 } x \in X \text{ 成立.} \tag{4}$$

则$\{T_t\}$称为 (C_0) 类半群.

依照前一命题，我们看出(C_0)类半群$\{T_t\}$满足条件

$$\|T_t\| \leq M e^{\beta t} \quad (0 \leq t < \infty), \tag{5}$$

其中常数$M>0$, $\beta<\infty$.

证明是容易的. 我们只须指出，对于任一区间$(0, a)$, 其中$\infty>a>0$, $\|T_t\|$在$(0, a)$有界. 假设相反，就设存在序列$\{t_n\} \subseteq (0, a)$使得$\|T_{t_n}\|>n$且$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0 \leq a$. 根据共鸣定理，$\|T_{t_n}x\|$必至少对某一$x \in X$无界. 这就同强连续条件(4)矛盾.

注 乘以$e^{-\beta t}$, 我们可以假设 (C_0) 类半群$\{T_t\}$等度有界:

$$\|T_t\| \leqq M \; (0 \leqq t < \infty). \tag{6}$$

特别地，若$M \leq 1$, 即若

$$\|T_t\| \leqq 1 \quad (0 \leqq t < \infty), \tag{7}$$

则半群$\{T_t\}$称为(C_0)类收缩半群.

至于强连续条件(4), 我们有如下

定理 设$L(X, X)$中的算子族$\{T_t; t \geqq 0\}$满足(1')和(3). 那么条件(4)等价于条件

$$w\text{-}\lim_{t \downarrow 0} T_t x = x \text{ 对于每一 } x \in X \text{ 成立.} \tag{8}$$

证明 假设(8)成立. 设x_0是X中任一固定元素. 我们将证明对于每一$t_0 \geqq 0$, $s\text{-}\lim\limits_{t \to t_0} T_t x_0 = T_{t_0} x_0$成立. 研究函数$x(t) = T_t x_0$. 对于每一$t_0 \geqq 0$, $x(t)$在t_0弱右连续，因为$w\text{-}\lim\limits_{t \downarrow t_0} T_t x = w\text{-}\lim\limits_{h \downarrow 0} T_h T_{t_0} x_0$. 其次我们证明$\|T_t\|$在$t=0$的邻近有界. 若其不然，就会存在序列$\{t_n\}$, 使得$t_n \downarrow 0$且$\lim\limits_{n\to\infty} \|T_{t_n} x_0\| = \infty$, 根据$x(t) = T_t x_0$的弱右连续性这与共鸣定理矛盾. 于是由(1'), 得知$T_t x_0 = x(t)$在t的任何紧区间上有界. 此外，$x(t)$是弱可测的，这是因为，右连续实值函数$f(t)$是 Lebesgue 可测的，而这可以由下列事实得证，即对于任何α, 集合$\{t; f(t)<\alpha\}$可表示为有正长度的诸区间的并. 其次设$\{t_n\}$是正有理数的全体，今考虑有限线性组合$\sum\limits_j \beta_j x(t_j)$, 其中$\beta_j$是有理数(若$X$是复线性空间，我们取$\beta_j = a_j + ib_j$, 其中$a_j$和$b_j$是有理系数). 这些元素形成可数集$M = \{x_n\}$使得$\{x(t); t \geqq 0\}$包含于$M$的强闭包. 因若不然，就存在一数$t'$使得$x(t')$不属于$M^a$. 然而(根据第五章§1定理 1 1)作为$X$的闭线性子空间，$M^a$是弱闭的；因此，条件$x(t') \bar{\in} M^a$同$x(t)$的弱右连续性，也就是同$x(t') = w\text{-}\lim\limits_{t_n \downarrow t'} x(t_n)$相矛盾.

于是可以应用第五章§4的 Pettis 定理，得知$x(t)$是强可测的，从而根据$\|x(t)\|$在t的任何紧区间上的有界性，我们可以定义 Bochner 积分$\int_\alpha^\beta x(t)\,dt$, 而且对于$0 \leqq \alpha < \beta < \infty$有

$$\left\|\int_\alpha^\beta x(t)\,dt\right\| \leqq \int_\alpha^\beta \|x(t)\|\,dt.$$

利用 $x(t)$ 在 t 的任何紧区间上的有界性所推出的积分 $\int_\alpha^\beta x(t+s)\,ds = \int_{\alpha+s}^{\beta+s} x(t)\,dt$ 关于 s 的强连续性, N. Dunford[3]曾证明 $x(t)$ 对于 $t>0$ 强连续, 我们将仿效他的证明.

设 $0\leqq\alpha<\eta<\beta<\xi-\varepsilon<\xi$, 其中 $\varepsilon>0$. 因为 $x(\xi)=T(\xi)x_0=T_\eta T_{\xi-\eta}x_0=T_\eta x(\xi-\eta)$, 我们有

$$(\beta-\alpha)x(\xi)=\int_\alpha^\beta x(\xi)\,d\eta=\int_\alpha^\beta T_\eta x(\xi-\eta)\,d\eta,$$

从而利用从(1′)和(3)所推出的, 与 $\|T_t\|$ 在 $t=0$ 邻近的有界性相联系的 $\sup\limits_{\alpha\leqq\eta\leqq\beta}\|T_\eta\|<+\infty$ 的事实, 我们得到

$$(\beta-\alpha)\{x(\xi\pm\varepsilon)-x(\xi)\}=\int_\alpha^\beta T_\eta\{x(\xi\pm\varepsilon-\eta)-x(\xi-\eta)\}\,d\eta,$$

$$(\beta-\alpha)\|x(\xi\pm\varepsilon)-x(\xi)\|\leqq\sup_{\alpha\leqq\eta\leqq\beta}\|T_\eta\|\cdot\int_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha}\|x(\tau\pm\varepsilon)-x(\tau)\|\,d\tau.$$

当用有限值函数逼近 $x(\tau)$ 时就可看出上式右端当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时趋向于零.

于是我们就证明了 $x(t)$ 对 $t>0$ 强连续. 为了证明 $x(t)$ 在 $t=0$ 强连续, 我们继续进行如下. 对于任何正有理数 t_n, 有 $T_t x(t_n)=T_t T_{t_n}x_0=T_{t+t_n}x_0=x(t+t_n)$. 因此, 根据上面已证明了的 $x(t)$ 对于 $t>0$ 的强连续性, 就得 $s\text{-}\lim\limits_{t\downarrow 0}T_t x(t_n)=x(t_n)$. 因为每一 $x_m\in M$ 是诸 $x(t_n)$ 的有限线性组合, 就得到 $s\text{-}\lim\limits_{t\downarrow 0}T_t x_m=x_m\ (m=1, 2, \cdots)$. 另一方面, 对任何 $t\in[0, 1]$, 我们有

$$\begin{aligned}\|x(t)-x_0\|&\leqq\|T_t x_m-x_m\|+\|x_m-x_0\|+\|T_t(x_0-x_m)\|\\&\leqq\|T_t x_m-x_m\|+\|x_m-x_0\|+\sup_{0\leqq t\leqq 1}\|T_t\|\cdot\|x_0-x_m\|.\end{aligned}$$

因此, $\overline{\lim\limits_{t\downarrow 0}}\|x(t)-x_0\|\leqq(1+\sup\limits_{0\leqq t\leqq 1}\|T_t\|)\|x_m-x_0\|$. 从而由 $\inf\limits_{x_m\in M}\|x_0-x_m\|=0$ 得 $s\text{-}\lim\limits_{t\downarrow 0}x(t)=x_0$.

§2. 局部凸空间中的(C_0)类等度连续半群. 半群的例

由前一节的启发, 我们将转到更一般的半群类.

定义 设 X 是局部凸线性拓扑空间, 而 $\{T_t; t\geqq 0\}$ 是 $L(X, X)$ 中的连续线性算子的单参数族且有

$$T_t T_s=T_{t+s},\quad T_0=I, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to t_0}T_t x=T_{t_0}x \text{ 对任何 } t_0\geqq 0 \text{ 及 } x\in X \text{ 成立}, \tag{2}$$

映射族 $\{T_t\}$ 关于 t 等度连续, 即对于 X 的任何连续半范数 p, 都存在 X 的连续半范数 q 使得对所有 $t\geqq 0$ 和所有 $x\in X$ 有 $p(T_t x)\leqq q(x)$ 成立. (3)

这样的算子族 $\{T_t\}$ 称为等度连续(C_0)类半群.

满足 §1 中的条件(1′), (3), (4)和(6)的半群 $\{T_t\}$ 是上述等度连续(C_0)类半群的例子. 下面

我们给出具体的例子.

例 1 设 $C[0, \infty)$ 是区间 $[0, \infty)$ 上的有界一致连续实值(或复值)函数空间, 而且定义映 $C[0, \infty)$ 入 $C[0, \infty)$ 内的 $T_t, t \geqq 0$, 为

$$(T_t x)(s) = x(t+s).$$

条件(1)是显然满足的. (2)由 $x(t)$ 的一致连续性推出. 最后, $\|T_t\| \leqq 1$, 从而 $\{T_t\}$ 是 (C_0) 类收缩半群. 在这个例子中, 我们可以用 $C(-\infty, \infty)$ 或 $L^p(-\infty, \infty)$ 代替 $C(0, \infty)$.

例 2 研究空间 $C(-\infty, \infty)$. 设

$$N_t(u) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-u^2/2t}, \ -\infty < u < \infty, \ t > 0,$$

这就是高斯概率密度. 定义映 $C(-\infty, \infty)$ 入 $C(-\infty, \infty)$ 内的 $T(t), t \geqq 0$, 为

$$(T_t x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u) x(u) du, \quad \text{对 } t > 0,$$

$$= x(s), \quad \text{对 } t = 0.$$

每一 T_t 是连续的, 因为, 由 $\int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u) du = 1$, 得

$$\|T_t x\| \leqq \|x\| \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u) du = \|x\|.$$

根据定义, $T_0 = I$, 而半群性质 $T_t T_s = T_{t+s}$ 是关于高斯概率分布的著名公式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+t')}} e^{-u^2/2(t+t')} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t'}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-v)^2/2t} e^{-v^2/2t'} dv$$

的推论. 回想一下第六章 §1 的(10)和(13)式, 这一公式可以在两侧用 Fourier 变换而得. 为了证明 T_t 对 t 的强连续性, 我们注意 $x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u) x(s) du$. 于是

$$(T_t x)(s) - x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)(x(u) - x(s)) du,$$

作变数代换 $(s-u)/\sqrt{t} = z$, 它就等于

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)(x(s - \sqrt{t} z) - x(s)) dz$$

根据 $x(s)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 的一致连续性, 对于任一 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得只要 $|s_1 - s_2| \leqq \delta$ 就有 $|x(s_1) - x(s_2)| \leqq \varepsilon$. 把上面的积分分成两部分, 我们得到

$$|(T_t x(s) - x(s)| \leqq \int_{|\sqrt{t} z| \leqq \delta} N_1(z) |x(s - \sqrt{t} z) - x(s)| dz + \int_{|\sqrt{t} z| > \delta} (\cdots) dz$$

$$\leqq \varepsilon \int_{|\sqrt{t} z| \leqq \delta} N_1(z) dz + 2\|x\| \int_{|\sqrt{t} z| > \delta} N_1(z) dz$$

$$\leqq \varepsilon + 2\|x\| \int_{|\sqrt{t} z| > \delta} N_1(z) dz.$$

因为积分 $\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z) dz$ 收敛, 故上式右端第二项当 $t \to 0$ 时趋于 0. 于是

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_s |(T_t x)(s) - x(s)| = 0$$

从而$s\text{-}\lim\limits_{t\downarrow 0}T_t x=x$；所以，根据前一节的定理，我们就证明了(2)。

在上面的例子中，我们可以用$L^p(-\infty,\infty)$代替$C[-\infty,\infty]$。作为例子，我们研究$L^1(-\infty,\infty)$。在这种情况，根据 Fubini 定理，有

$$\|T_t x\|\leqq\iint\limits_{-\infty}^{\infty}N_t(s-u)\,|x(u)|\,ds\,du\leqq\|x\|.$$

至于强连续性，同上面一样，我们有

$$\begin{aligned}\|T_t x-x\|&\leqq\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int N_1(z)\,(x(s-\sqrt{t}\,z)-x(s))dz\right|ds\\&\leqq\int_{-\infty}^{\infty}N_1(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x(s-\sqrt{t}\,z)-x(s)|\,ds\right]dz\\&\leqq 2\int_{-\infty}^{\infty}N_1(z)dz\cdot\|x\|.\end{aligned}$$

因此，根据 Lebesgue-Fatou 引理，并由于 Lebesgue 积分的平均连续性（这可以用有限值函数逼近$x(s)$而得，我们得到

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\|T_t x-x\|\leqq\int_{-\infty}^{\infty}N_1(z)\left(\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\int_{-\infty}^{\infty}|x(s-\sqrt{t}\,z)-x(s)|\,ds\right)dz=0.$$

例 3 研究$C(-\infty,\infty)$。设$\lambda>0$，$\mu>0$。定义映$C(-\infty,\infty)$入$C(-\infty,\infty)$内的T_t，$t\geqq 0$，为

$$(T_t x)(s)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}x(s-k\mu).$$

我们有

$$\begin{aligned}(T_w(T_t x))(s)&=e^{-\lambda w}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda w)^m}{m!}\left[e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}x(s-k\mu-m\mu)\right]\\&=e^{-\lambda(w+t)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left[p!\sum_{m=0}^{p}\frac{(\lambda w)^m}{m!}\frac{(\lambda t)^{p-m}}{(p-m)!}x(s-p\mu)\right]\\&=e^{-\lambda(w+t)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(\lambda w+\lambda t)^p x(s-p\mu)=(T_{w+t}x)(s).\end{aligned}$$

于是容易验证T_t是(C_0)类收缩半群。

§3. (C_0)类等度连续半群的无穷小生成元

设$\{T_t;\ t\geqq 0\}$是定义于局部凸线性拓扑空间X的(C_0)类等度连续半群，设X是序列完备的。我们用

$$Ax=\lim_{h\downarrow 0}h^{-1}(T_h-I)x,\tag{1}$$

定义T_t的无穷小生成元A，亦即，A是线性算子，其定义域是集$D(A)=\{x\in X;\ \lim\limits_{h\downarrow 0}h^{-1}(T_h-I)x$

在X中存在}，而且对于$x\in D(A)$，$Ax=\lim\limits_{h\downarrow 0}h^{-1}(T_h-I)x$. $D(A)$是非空的；它至少包含向量0. 实际上$D(A)$是比较大的. 我们可以证明

定理 1 $D(A)$在X中稠密.

证明 设$\varphi_n(s)=ne^{-ns}$，$n>0$. 研究线性算子C_{φ_n}，它是T_t的 Laplace 变换乘以n:

$$C_{\varphi_n}x=\int_0^\infty \varphi_n(s)T_s x\,ds \quad \text{对于 } x\in X, \tag{2}$$

其积分是在 Riemann 意义下的. 若用X中的连续半范数p代替数的绝对值时，定义数值函数的 Riemann 积分的通常程序就可以推广到在局部凸，序列完备的空间X中取值的函数上去. 广义积分的收敛性由T_t的等度连续性，等式

$$p(\varphi_n(s)T_s x)=ne^{-ns}p(T_s x)$$

以及X的序列完备性推出.

我们知道，由于

$$p(C_{\varphi_n}x)\leq\int_0^\infty ne^{-ns}p(T_s x)\,ds\leq\sup_{s\geq 0}p(T_s x),$$

算子C_{φ_n}是$L(X, X)$中的连续线性算子. 我们要证明

$$R(C_{\varphi_n})\subseteq D(A) \quad \text{对每一 } n>0 \text{ 成立} \tag{3}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}C_{\varphi_n}x=x \quad \text{对每一 } x\in X \text{ 成立}. \tag{4}$$

这样一来，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R(C_{\varphi_n})$就在$X$中稠密，当然更有$D(A)$在$X$中稠密. 为证(3)，我们从公式

$$h^{-1}(T_h-I)C_{\varphi_n}x=h^{-1}\int_0^\infty\varphi_n(s)T_hT_s x\,ds-h^{-1}\int_0^\infty\varphi_n(s)T_s x\,ds$$

着手，利用T_h的线性性质和连续性，可以改变次序：$T_h\int_0^\infty\cdots=\int_0^\infty T_h\cdots$. 于是

$$\begin{aligned}
h^{-1}(T_h-I)C_{\varphi_n}x&=h^{-1}\int_0^\infty\varphi_n(s)T_{s+h}x\,ds-h^{-1}\int_0^\infty\varphi_n(s)T_s x\,ds\\
&=\frac{e^{nh}-1}{h}n\int_h^\infty e^{-n\sigma}T_\sigma x\,d\sigma-\frac{1}{h}n\int_0^h e^{-ns}T_s x\,ds\\
&=\frac{e^{nh}-1}{h}\left\{C_{\varphi_n}x-\int_0^h ne^{-n\sigma}T_\sigma x\,d\sigma\right\}-\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_n(s)T_s x\,ds.
\end{aligned}$$

根据$\varphi_n(s)T_s x$关于s的连续性，上式右端的第二项当$h\downarrow 0$时趋向于$-\varphi_n(0)T_0x=-nx$. 类似地，右端的第一项当$h\downarrow 0$时趋向于$nC_{\varphi_n}x$. 于是我们有

$$AC_{\varphi_n}x=n(C_{\varphi_n}-I)x,\quad x\in X. \tag{5}$$

其次，我们证明(4). 由于$\int_0^\infty ne^{-ns}ds=1$，有

$$C_{\varphi_n}x-x=n\int_0^\infty e^{-ns}(T_s x-x)\,ds,$$

$p(C_{\varphi_n}x-x)\leqq n\int_0^\infty e^{-ns}p(T_sx-x)\,ds=n\int_0^\delta+n\int_\delta^\infty=I_1+I_2$, 这里 $\delta>0$ 是正数. 对于任一 $\varepsilon>0$, 根据 T_sx 对 s 的连续性, 我们可以选 $\delta>0$ 使得对 $0\leqq s\leqq\delta$ 有 $p(T_sx-x)\leqq\varepsilon$ 成立. 那么

$$I_1\leqq\varepsilon n\int_0^\delta e^{-ns}\,ds\leqq\varepsilon n\int_0^\infty e^{-ns}ds=\varepsilon.$$

对于固定的 $\delta>0$, 由于 $\{T_sx\}$ 对 $s\geqq0$ 等度有界, 有

$$I_2\leqq n\int_\delta^\infty e^{-ns}(p(T_sx)+p(x))\,ds\to0 \quad 当\ n\uparrow\infty\ 时.$$

这样, 我们证明了(4).

定义 对 $x\in X$, 我们定义

$$D_tT_tx=\lim_{h\to0}h^{-1}(T_{t+h}-T_t)x, \tag{6}$$

若右边极限存在.

定理 2 若 $x\in D(A)$, 则 $x\in D(D_tT_t)$, 且

$$D_tT_tx=AT_tx=T_tAx,\quad t\geqq0. \tag{7}$$

于是, 特别地, 算子 A 同 T_t 是可交换的.

证明 若 $x\in D(A)$, 那么因 T_t 是连续线性的, 我们有

$$\begin{aligned}T_tAx&=T_t\lim_{h\downarrow0}h^{-1}(T_h-I)x=\lim_{h\downarrow0}h^{-1}(T_tT_h-T_t)x=\lim_{h\downarrow0}h^{-1}(T_{t+h}-T_t)x\\&=\lim_{h\downarrow0}h^{-1}(T_h-I)T_tx=AT_tx.\end{aligned}$$

于是, 如果 $x\in D(A)$, 则 $T_tx\in D(A)$ 并且 $T_tAx=AT_tx=\lim\limits_{h\downarrow0}h^{-1}(T_{t+h}-T_t)x$. 我们于是证明了对每一 $x\in D(A)$, T_tx 的右导数存在. 我们将证明左导数亦存在且等于右导数.

为此, 任取 $f_0\in X'$. 那么, 对于固定的 $x\in D(A)$, 数值函数 $f_0(T_tx)=\langle T_tx,f_0\rangle$ 对 $t\geqq0$ 连续且有右导数 $d^+f_0(T_tx)/dt$, 根据上面所证, 右导数等于 $f_0(AT_tx)=f_0(T_tAx)$. 所以 $d^+f_0(T_tx)/dt$ 对于 t 连续. 我们在下面将证明一个著名的引理: 如果连续实值函数 $f(t)$ 的 Dini 导数

$$\bar{D}^+f(t),\quad \underline{D}^+f(t),\quad \bar{D}^-f(t)\text{和}\underline{D}^-f(t)$$

之一是有限的和连续的, 则 $f(t)$ 是可微的而且其导数, 当然, 也连续且等于 $\underline{D}^+f(t)$. 于是 $f_0(T_tx)$ 对 t 是可微的并有

$$\begin{aligned}f_0(T_tx-x)&=f_0(T_tx)-f_0(T_0x)=\int_0^t d^+f_0(T_sx)/ds\cdot ds=\int_0^t f_0(T_sAx)\,ds\\&=f_0\left(\int_0^t T_sAx\,ds\right).\end{aligned}$$

因为 $f_0\in X'$ 是任意的, 必有

$$T_tx-x=\int_0^t T_sAx\,ds\quad 对每一\ x\in D(A)\ 成立.$$

因为 T_sAx 对 s 是连续的, 于是 T_tx 对 t 按 X 的拓扑可微并且

$$D_t T_t x = \lim_{h\to 0} h^{-1}\int_t^{t+h} T_s Ax ds = T_t Ax.$$

于是我们证明了(7).

引理的证明 我们首先证明由条件: $\bar{D}^+ f(t)\geqq 0$ 对于 $a<t\leqq b$ 成立必推出 $f(b)-f(a)\geqq 0$. 假设不然,且设 $f(b)-f(a)<-\varepsilon(b-a)$ 对于某一 $\varepsilon>0$ 成立. 那么, 对于 $g(t)=f(t)-f(a)+\varepsilon(t-a)$, 就有 $\bar{D}^+ g(a)=\bar{D}^+ f(a)+\varepsilon>0$, 从而由 $g(a)=0$, 对邻近 a 的某一 $t_0>a$ 必有 $g(t_0)>0$. 由于 $g(t)$ 连续及 $g(b)<0$, 必存在 t_1 满足 $a<t_0<t_1<b$ 使得 $g(t_1)=0$ 且对于 $t_1<t<b$, $g(t)<0$. 于是我们有 $\bar{D}^+ g(t_1)\leqq 0$, 这无疑同 $\bar{D}^+ g(t_1)=\bar{D}^+ f(t_1)+\varepsilon>0$ 的事实矛盾.

对于 $f(t)-\alpha t$ 和 $\beta t-f(t)$ 应用类似的论证, 我们可证: 如果 Dini 导数之一 $Df(t)$ 满足

$$\alpha\leqq Df(t)\leqq\beta \text{ 在任何区间}[t_1, t_2]\text{上},$$

则 $\alpha\leqq(f(t_2)-f(t_1))/(t_2-t_1)\leqq\beta$. 从而连续实值函数 $f(t)$ 的四个 Dini 导数在 $[t_1, t_2]$ 上的上确界(suprema)(和下确界(infima))是相同的. 于是,特别地,若连续实值函数 $f(t)$ 的 Dini 导数之一在 $[t_1, t_2]$ 连续,则 $f(t)$ 的四个 Dini 导数在 $[t_1, t_2]$ 必然相等.

§4. 无穷小生成元 A 的预解式

定理 1 如果 $n>0$, 则算子 $(nI-A)$ 具有逆 $R(n;A)=(nI-A)^{-1}\in L(X,X)$, 并且

$$R(n;A)x=\int_0^\infty e^{-ns}T_s x ds \quad \text{对于 } x\in X \text{ 成立}. \tag{1}$$

换句话说,正实数属于 A 的预解集 $\rho(A)$.

证明 我们首先证明 $(nI-A)^{-1}$ 存在. 假设存在 $x_0\neq 0$ 使得 $(nI-A)x_0=0$, 即 $Ax_0=nx_0$. 设 f_0 是 $\in X'$ 且满足 $f_0(x_0)=1$ 的连续线性泛函; 并令 $\varphi(t)=f_0(T_t x_0)$. 因 $x_0\in D(A)$, 根据前节的定理 2 $\varphi(t)$ 是可微的, 并且

$$d\varphi(t)/dt=f_0(D_t T_t x_0)=f_0(T_t Ax_0)=f_0(T_t nx_0)=n\varphi(t).$$

如果我们在初始条件 $\varphi(0)=f_0(x_0)=1$ 之下解这微分方程, 就得 $\varphi(t)=e^{nt}$. 但 $\varphi(t)=f_0(T_t x_0)$ 对 t 有界, 因为 $T_t x_0$ 对 $t\geqq 0$ 等度有界且泛函 f_0 连续. 这就是矛盾, 于是逆 $(nI-A)^{-1}$ 必存在.

因为由前节的(5)式, $AC_{\varphi_n}x=n(C_{\varphi_n}-I)x$, 有 $(nI-A)C_{\varphi_n}x=nx$ 对一切 $x\in X$ 成立. 于是 $(nI-A)$ 一对一地映 $R(C_{\varphi_n})\subseteq D(A)$ 到 X 上. 因此, 由于 $(nI-A)^{-1}$ 存在, 更不用说, $(nI-A)$ 必是一对一地映 $D(A)$ 到 X 上了. 所以必有 $R(C_{\varphi_n})=D(A)$ 以及 $(nI-A)^{-1}=n^{-1}C_{\varphi_n}$.

系 1 复 λ-平面的右半平面在 A 的预解集 $\rho(A)$ 内, 且有

$$R(\lambda;A)x=(\lambda I-A)^{-1}x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x dt \quad \text{对 } Re(\lambda)>0 \text{ 和 } x\in X \text{ 成立}. \tag{2}$$

证明 对固定的实数 τ, $\{e^{-i\tau t}T_t;\ t\geqq 0\}$ 组成一 (C_0) 类等度连续半群. 容易看出该半群的无穷小生成元等于 $(A-i\tau I)$. 于是, 对任何 $\sigma>0$, 预解式 $R(\sigma+i\tau;A)=((\sigma+i\tau)I-A)^{-1}$ 存在, 并且

$$R((\sigma+i\tau)I-A)x=\int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+i\tau)s}T_s x ds \quad \text{对一切 } x\in X \text{ 成立}. \tag{2'}$$

系 2

$$D(A)=R((\lambda I-A)^{-1})=R(R(\lambda;A)) \quad \text{当 } Re(\lambda)>0 \text{ 时}, \tag{3}$$

$$AR(\lambda;A)x=R(\lambda;A)Ax=(\lambda R(\lambda;A)-I)x \quad \text{对 } x\in D(A), \tag{4}$$

$$AR(\lambda;A)x=(\lambda R(\lambda;A)-I)x \quad \text{对 } x\in X, \tag{5}$$

$$\lim_{\lambda\uparrow\infty}\lambda R(\lambda;A)x=x \quad \text{对 } x\in X. \tag{6}$$

证明 从 $R(\lambda;A)=(\lambda I-A)^{-1}$ 和前节的(4)式这些是显然的.

系 3 无穷小生成元 A 在下面的意义下是闭算子(参看第二章 § 6):
若 $x_h\in D(A)$ 以及 $\lim\limits_{h\to\infty} x_h=x\in X$, $\lim\limits_{h\to\infty} Ax_h=y\in X$, 则

$$x\in D(A) \text{ 且 } Ax=y.$$

证明 令 $(I-A)x_h=z_h$, 则 $\lim\limits_{h\to\infty} z_h=x-y$ 从而由 $(I-A)^{-1}$ 的连续性, 得 $\lim\limits_{h\to\infty} x_h=\lim\limits_{h\to\infty}(I-A)^{-1}z_h=(I-A)^{-1}(x-y)$, 即 $x=(I-A)^{-1}(x-y)$, $(I-A)x=x-y$. 这就证明了 $y=Ax$.

定理 2 算子族

$$\{(\lambda R(\lambda;A))^n\} \tag{7}$$

对于 $\lambda>0$ 及 $n=0, 1, 2, \cdots$ 等度连续.

证明 从预解方程(第八章 § 2, (2))

$$R(\mu;A)-R(\lambda;A)=(\lambda-\mu)R(\mu;A)R(\lambda;A),$$

我们得到

$$\lim_{\mu\to\lambda}(\mu-\lambda)^{-1}(R(\mu;A)-R(\lambda;A))x=dR(\lambda;A)x/d\lambda=-R(\lambda;A)^2x, \quad x\in X.$$

为了推出上面的公式, 我们需要藉助于(2)来证明 $\lim\limits_{\mu\to\lambda} R(\mu;A)y=R(\lambda;A)y$, $y\in X$.

因此, 当 $Re(\lambda)>0$ 时 $R(\lambda;A)x$ 关于 λ 是无限可微的, 而且

$$d^nR(\lambda;A)x/d\lambda^n=(-1)^n n!R(\lambda;A)^{n+1}x \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{8}$$

另一方面, 将(2)式对 λ 求 n 次微商, 我们有

$$d^nR(\lambda;A)x/d\lambda^n=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n T_t x\,dt. \tag{9}$$

这里可以在积分号下求微商, 这是因为 $\{T_t x\}$ 关于 t 等度有界并且当 $Re(\lambda)>0$ 时 $\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^n dt=(n!)/\lambda^{n+1}$. 因此

$$(\lambda R(\lambda;A))^{n+1}x=\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^n T_t x\,dt \quad \text{对 } x\in X \text{ 及 } Re(\lambda)>0 \text{ 成立}. \tag{10}$$

从而对于 X 的任何连续半范数 p 和 $\lambda>0$, $n>0$, 有

$$p((\lambda R(\lambda;A))^{n+1}x)\le\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^n dt\cdot\sup_{t\ge0}p(T_t x)=\sup_{t\ge0}p(T_t x). \tag{11}$$

根据 $\{T_t\}$ 关于 t 的等度连续性, 这就证明了定理 2.

§5. 无穷小生成元的例

对于 $n>0$，我们首先定义

$$J_n=(I-n^{-1}A)^{-1}=nR(n;A), \tag{1}$$

因此

$$AJ_n=n(J_n-I). \tag{2}$$

例 1 $C[0,\infty)$ 中的 $(T_tx)(s)=x(t+s)$. 记

$$y_n(s)=(J_nx)(s)=n\int_0^\infty e^{-nt}x(t+s)\,dt=n\int_s^\infty e^{-n(t-s)}x(t)\,dt,$$

我们得到 $y_n'(s)=-ne^{-n(t-s)}x(s)+n^2\int_s^\infty e^{-n(t-s)}x(t)\,dt=-nx(s)+ny_n(s)$. 将此式同一般公式(2):

$$(AJ_nx)(s)=n((J_n-I)x)(s)$$

比较，我们得到 $Ay_n(s)=y_n'(s)$. 因为 $R(J_n)=R(R(n;A))=D(A)$，有

$$Ay(s)=y'(s)\quad 对于每一\ y\in D(A)成立.$$

反之，设 $y(s)$ 和 $y'(s)$ 都属于 $C[0,\infty)$，那么我们将证明 $y\in D(A)$ 且 $Ay(s)=y'(s)$. 为此，用

$$y'(s)-ny(s)=-nx(s)$$

定义出 $x(s)$. 令 $(J_nx)(s)=y_n(s)$，正如上面指出的，就得到

$$y_n'(s)-ny_n(s)=-nx(s).$$

因此 $w(s)=y(s)-y_n(s)$ 满足 $w'(s)=nw(s)$，从而 $w(s)=Ce^{ns}$. 但是，w 必须属于 $C[0,\infty)$ 而这仅当 $C=0$ 时才是可能的. 因此 $y(s)=y_n(s)\in D(A)$ 且 $Ay(s)=y'(s)$.

所以，A 的定义域 $D(A)$ 恰是函数 $y\in C[0,\infty)$ 所成的集合，对这种函数 y，其一阶导数亦 $\in C[0,\infty)$ 且有 $Ay=y'$. 于是我们就将微分算子 d/ds 表征为在函数空间 $C[0,\infty)$ 上与对 t 的平移运算相联系的半群的无穷小生成元.

例 2 我们将给出二阶导数 d^2/dt^2 作为与具高斯核的积分算子相关联的半群的无穷小生成元的表征. 空间是 $C(-\infty,\infty)$，而

$$(T_tx)(s)=(2\pi t)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty e^{-(s-v)^2/2t}x(v)dv \text{ 若 } t>0,\ =x(s) \text{ 若 } t=0.$$

我们有

$$y_n(s)=(J_nx)(s)=\int_{-\infty}^\infty x(v)\left[\int_0^\infty n(2\pi t)^{-1/2}e^{-nt-(s-v)^2/2t}\,dt\right]dv$$

$$=\int_{-\infty}^\infty x(v)\left[2\sqrt{n}\int_0^\infty(2\pi)^{-1/2}e^{-\sigma^2-n(s-v)^2/2\sigma^2}d\sigma\right]dv \quad (作代换\ t=\sigma^2/n).$$

若暂时承认公式

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma^2+c/\sigma^2)}d\sigma=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c},\quad c=\sqrt{n}\,|s-v|/\sqrt{2}>0, \tag{3}$$

我们就得到

$$y_n(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(v)(n/2)^{\frac{1}{2}}e^{-\sqrt{2n}|s-v|}\,dv.$$

由于 $x(v)$ 是连续有界的，我们可以微分两次而且得出

$$y_n'(s)=n\int_s^{\infty}x(v)e^{-\sqrt{2n}(v-s)}\,dv-n\int_{-\infty}^{s}x(v)e^{-\sqrt{2n}(s-v)}\,dv,$$

$$y_n''(s)=n\Big\{-x(s)-x(s)+\sqrt{2}\sqrt{n}\int_s^{\infty}x(v)e^{-\sqrt{2n}(s-v)}\,dv$$

$$+\sqrt{2}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{s}x(v)e^{-\sqrt{2n}(s-v)}\,dv\Big\}=-2nx(s)+2ny_n(s).$$

将此式同一般公式(2)：

$$(Ay_n)(s)=(AJ_nx)(s)=n((J_n-I)x)(s)=n(y_n(s)-x(s))$$

比较，我们求得 $Ay_n(s)=y_n''(s)/2$. 因为 $R(J_n)=R(R(n;A))=D(A)$，我们就证明了

$$Ay(s)=y''(s)/2\quad 对每一 y\in D(A) 成立.$$

反之，设 $y(s)$ 和 $y''(s)$ 都属于 $C(-\infty,\infty)$. 用

$$y''(s)-2ny(s)=-2nx(s)$$

定义函数 $x(s)$. 令 $y_n(s)=(J_nx)(s)$，如上所指出的，得到

$$y_n''(s)-2ny_n(s)=-2nx(s).$$

因此 $w(s)=y(s)-y_n(s)$ 满足 $w''(s)-2nw(s)=0$，于是 $w(s)=C_1e^{\sqrt{2n}s}+C_2e^{-\sqrt{2n}s}$. 除非 C_1 和 C_2 都为零，这一函数不可能是有界的. 于是 $y(s)=y_n(s)$，从而 $y\in D(A)$，$(Ay)(s)=y''(s)/2$.

因此，**微分算子** $\frac{1}{2}d^2/dt^2$ 在函数空间 $C(-\infty,\infty)$ 上就表征为同具高斯核的积分变换相联系的半群的无穷小生成元.

(3) 的证明 我们从已知的公式

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2$$

着手. 令 $x=\sigma-c/\sigma$，得到

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\int_{\sqrt{c}}^{\infty}e^{-(\sigma-c/\sigma)^2}\left(1+\frac{c}{\sigma^2}\right)d\sigma=e^{2c}\int_{\sqrt{c}}^{\infty}e^{-(\sigma^2+c^2/\sigma^2)}(1+c/\sigma^2)d\sigma$$

$$=e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^{\infty}e^{-(\sigma^2+c^2/\sigma^2)}d\sigma+\int_{\sqrt{c}}^{\infty}e^{-(\sigma^2+c^2/\sigma^2)}\frac{c}{\sigma^2}d\sigma\right\}.$$

在最后一积分中令 $\sigma=c/t$，即得

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^{\infty}e^{-(\sigma^2+c^2/\sigma^2)}d\sigma-\int_{\sqrt{c}}^{0}e^{-(c^2/t^2+t^2)}dt\right\}=e^{2c}\int_0^{\infty}e^{-(t^2+c^2/t^2)}dt.$$

练习 证明在 $C(-\infty,\infty)$ 上由

$$(T_tx)(s)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)k}{k!}x(s-k\mu)\quad(\lambda,\mu>0)$$

给出的半群 $\{T_t\}$ 的无穷小生成元是**差分算子** A:

$$(Ax)(s)=\lambda\{x(s-\mu)-x(s)\}.$$

§6. 具等度连续幂的连续线性算子的指数函数

命题 设X是局部凸序列完备的线性拓扑空间. 设连续线性算子$B\in L(X,X)$使得$\{B^k; k=1, 2, \cdots\}$等度连续. 则对每一$x\in X$, 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1}(tB)^k x \quad (t\geqq 0)$$

收敛.

证明 对于X的任一连续半范数p, 根据$\{B^k\}$的等度连续性, 存在X的一连续半范数q使得$p(B^k x)\leqq q(x)$对于所有$k\geqq 0$和$x\in X$成立. 因此

$$p\left(\sum_{k=n}^{m}(tB)^k x/k!\right)\leqq\sum_{k=n}^{m}t^k p(B^k x)/k!\leqq q(x)\sum_{k=n}^{m}t^k/k!. \tag{1}$$

所以$\left\{\sum_{k=0}^{n}(tB)^k x/k!\right\}$是序列完备空间$X$中的 Cauchy 序列. 这序列的极限将用(1)表示.

系 1 映射 $x\to\sum_{k=0}^{\infty}(tB)^k x/k!$ 定义一个连续线性算子, 我们将用$\exp(tB)$表示.

证明 由于$\{B^k\}$等度连续, 我们可以证明$B_n=\sum_{k=0}^{n}(tB)^k/k!\ (n=0, 1, 2, \cdots)$当$t$遍取任一紧区间上的值时是等度连续的. 事实上, 有

$$p(B_n x)\leqq\sum_{k=0}^{n}t^k p(B^k x)/k!\leqq q(x)\cdot\sum_{k=0}^{n}t^k/k!\leqq e^t\cdot q(x).$$

因此. 极限$\exp(tB)$满足

$$p(\exp(tB)x)\leqq\exp(t)\cdot q(x)\quad(t\geqq 0). \tag{2}$$

系 2 设两个连续线性算子$B, C\in L(X, X)$使得$\{B^k\}$和$\{C^k\}$均等度连续. 此外, 如果$BC=CB$, 则有

$$\exp(tB)\exp(tC)=\exp(t(B+C)). \tag{3}$$

证明 我们有

$$p((B+C)^k x)\leqq\sum_{s=0}^{k}{}_kC_s p(B^{k-s}C^s x)\leqq\sum_{s=0}^{k}{}_kC_s q(C^s x)$$
$$\leqq 2^k\sup_{0\leqq s}q(C^s x).$$

因此, $\{2^{-k}(B+C)^k\}$等度连续, 而且可以定义$\exp(t(B+C))$. 利用可换性$BC=CB$, 我们重排级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(t(B+C))^k x/k!,$$

于是像数值级数$\sum_{k=0}^{\infty}(t(b+c))^k/k!$的情况一样，我们得到$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(tB)^k/k!\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(tC)^kx/k!\right)$.

系 3 对于每一$x\in X$

$$\lim_{h\downarrow 0}(\exp(hB)-I)x=Bx, \tag{4}$$

因此，利用上面证明的半群性质

$$\exp((t+h)B)=\exp(tB)\exp(hB), \tag{5}$$

我们得到

$$D_t\exp(tB)x=\exp(tB)Bx=B\exp(tB)x. \tag{6}$$

证明 对于X的任何连续半范数p，像上面一样，我们得到

$$p(h^{-1}(\exp(hB)-I)x-Bx)\leq\sum_{k=2}^{\infty}h^{k-1}p(B^kx)/k!\leq q(x)\sum_{k=2}^{\infty}h^{k-1}/k!,$$

当$h\downarrow 0$时此式一定趋向于0.

§7. (C_0)类等度连续半群用相应的无穷小生成元的表示和表征

我们将证明下面的基本

定理 设X是局部凸序列完备的线性拓扑空间. 假设A是其定义域$D(A)$在X中稠密而值域$R(A)$在X中的线性算子并且使得预解式$R(n;A)=(nI-A)^{-1}\in L(X, X)$对$n=1, 2, \cdots$存在. 则$A$是唯一确定的等度连续$(C_0)$类半群的无穷小生成元当且仅当算子$\{(I-n^{-1}A)^{-m}\}$对$n=1, 2, \cdots$和$m=0, 1, \cdots$等度连续.

证明 "仅当"部分已证过. 我们将证明"当"的部分.

令

$$J_n=(I-n^{-1}A)^{-1}, \tag{1}$$

我们将证明

$$\lim_{n\to\infty}J_nx=x \qquad 对每一x\in X成立. \tag{2}$$

事实上，对于$x\in D(A)$，有$AJ_nx=J_nAx=n(J_n-I)x$. 因此由于$\{J_n(Ax)\}$对于$n=1, 2, \cdots$的等度有界性，当$n\to\infty$时$J_nx-x=n^{-1}J_n(Ax)$趋向于0. 因为$D(A)$在X中稠密而$\{J_n\}$对于n等度连续 这就推出$\lim_{n\to\infty}J_nx=x$对于每一$x\in X$成立.

令

$$T_t^{(n)}=\exp(tAJ_n)=\exp(tn(J_n-I))=\exp(-nt)\exp(ntJ_n), \quad t\geqslant 0. \tag{3}$$

因为$\{J_n^k\}$对于n和k等度有界，故$\exp(tnJ_n)$即可定义，而且像前节的(2)式一样，我们有

$$p(\exp(ntJ_n)x)\leq\sum_{k=0}^{\infty}(nt)^k(k!)^{-1}p(J_n^k\cdot x)\leq\exp(nt)\cdot q(x).$$

因此，由于

$$p(T_t^{(n)}x)\leq q(x), \tag{4}$$

算子$\{T_t^{(n)}\}$对于$t\geqq 0$和$n=1, 2, \cdots$等度连续.

我们其次注意$J_nJ_m=J_mJ_n$对于$n, m>0$成立. 于是J_n同$T_t^{(m)}$可交换. 因而由前节已证明的$D_tT_t^{(n)}x=AJ_nT_t^{(n)}x=T_t^{(n)}AJ_nx$, 得到

$$p(T_t^{(n)}x-T_t^{(m)}x)=p\left(\int_0^t D_s(T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}x)\,ds\right)=p\left(\int_0^t T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}(AJ_n-AJ_m)x\,ds\right). \quad (5)$$

因此, 如果$x\in D(A)$, 必存在X中的连续半范数$\tilde{q}$使得

$$p(T_t^{(n)}x-T_t^{(m)}x)\leqq\int_0^t \tilde{q}((AJ_n-AJ_m)x)\,ds=t\tilde{q}((J_nA-J_mA)x).$$

所以, 由(2), 我们就证得当t在每一紧区间变化时$\lim\limits_{n,m\to\infty}p(T_t^{(n)}x-T_t^{(m)}x)=0$关于$t$一致成立. 因为$D(A)$在序列完备空间$X$中稠密, 而且因为算子$\{T_t^{(n)}\}$对$t\geqq 0$和$n$等度连续, 我们得知$\lim\limits_{n\to\infty}T_t^{(n)}x=T_tx$对于每一$x\in X$和$t\geqq 0$在$t$的每一紧区间关于$t$一致存在. 于是算子$\{T_t\}$关于$t\geqq 0$等度连续, 而且由于对$t$的一致收敛性, T_tx对于$t\geqq 0$是连续的.

我们其次证明T_t满足半群性质$T_tT_s=T_{t+s}$. 因为$T_{t+s}^{(n)}=T_t^{(n)}T_s^{(n)}$, 我们有

$$\begin{aligned}p(T_{t+s}x-T_tT_sx)&\leqq p(T_{t+s}x-T_{t+s}^{(n)}x)+p(T_{t+s}^{(n)}x-T_t^{(n)}T_s^{(n)}x)\\&\quad+p(T_t^{(n)}T_s^{(n)}x-T_t^{(n)}T_sx)+p(T_t^{(n)}T_sx-T_tT_sx)\\&\leqq p(T_{t+s}x-T_{t+s}^{(n)}x)+q(T_s^{(n)}x-T_sx)+p((T_t^{(n)}-T_t)T_sx)\to 0\end{aligned}$$

当$n\to\infty$时.

于是对于X的每一连续半范数p, 有$p(T_{t+s}x-T_tT_sx)=0$. 这就证得$T_{t+s}=T_tT_s$.

设$\hat{A}$是这一等度连续(C_0)类半群$\{T_t\}$的无穷小生成元. 我们要证明$\hat{A}=A$. 设$x\in D(A)$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}T_t^{(n)}AJ_nx=T_tAx$在$t$的每一紧区间关于$t$一致成立. 因为由(4), 我们有

$$\begin{aligned}p(T_tAx-T_t^{(n)}AJ_nx)&\leqq p(T_tAx-T_t^{(n)}Ax)+p(T_t^{(n)}Ax-T_t^{(n)}AJ_nx)\\&\leqq p((T_t-T_t^{(n)})Ax)+q(Ax-J_nAx),\end{aligned}$$

当$n\to\infty$时此式趋向于0, 这是因为$\lim\limits_{n\to\infty}J_nAx=Ax$. 因此

$$\begin{aligned}T_tx-x&=\lim_{n\to\infty}(T_t^{(n)}x-x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^t T_s^{(n)}AJ_nx\,ds\\&=\int_0^t(\lim_{n\to\infty}T_s^{(n)}AJ_nx)\,ds=\int_0^t T_sAx\,ds\end{aligned}$$

从而$\lim\limits_{t\downarrow 0}t^{-1}(T_tx-x)=\lim\limits_{t\downarrow 0}t^{-1}\int_0^t T_sAx\,ds$存在并等于$Ax$. 我们于是证明了由$x\in D(A)$必导致$x\in D(\hat{A})$以及$Ax=\hat{A}x$, 也就是说$\hat{A}$是$A$的扩张. 由于$\hat{A}$是半群$T_t$的无穷小生成元, 我们得知, 对于$n>0$, $(nI-\hat{A})$一对一地映$D(\hat{A})$到X上. 但是, 由假设, $(nI-A)$也一对一地映$D(A)$到X上. 所以A的扩张$\hat{A}$必同A相等.

最后, 半群T_t的唯一性证明如下. 设$\widetilde{T}_t$是等度连续(C_0)类半群, 其无穷小生成元恰是A. 我们构造半群$T_t^{(n)}$. 因为A同$\widetilde{T}_t$可交换, 得知AJ_n和$T_s^{(n)}$同$\widetilde{T}_t$可交换. 那么, 如同(5)中一样, 对$x\in D(A)$, 我们得到

$$p(T_t^{(n)}x-\widetilde{T}_t x)=p\left(\int_0^t D_s(\widetilde{T}_{t-s}T_s^{(n)}x)\,ds\right)=p\left(\int_0^t -\widetilde{T}_{t-s}T_s^{(n)}(A-AJ_n)x\,ds\right). \tag{6}$$

于是，由于对所有的 $x\in D(A)$，$\lim\limits_{n\to\infty}AJ_n x=Ax$，类似于上面 $\lim\limits_{n\to\infty}T_t^{(n)}x$，$x\in X$ 的存在性的证明，我们证得 $\lim\limits_{n\to\infty}T_t^{(n)}=\widetilde{T}_t x$ 对一切 $x\in X$ 成立.

所以，对所有 $x\in X$ 有 $T_t x=\widetilde{T}_t x$，即 $T_t=\widetilde{T}_t$.

注 上面的证明指出，如果 A 是等度连续(C_0)类半群 T_t 的无穷小生成元，则

$$T_t x=\lim_{n\to\infty}\exp(tA(I-n^{-1}A)^{-1})x,\quad x\in X, \tag{7}$$

而且(7)式中的收敛在 t 的每一紧区间上关于 t 是一致的. 这就是半群的表示定理.

系 1 如果 X 是 B-空间，则定理的条件写为：$D(A)^a=X$，预解式$(I-n^{-1}A)^{-1}$存在且满足

$$\|(I-n^{-1}A)^{-m}\|\leq C\quad (n=1,2,\cdots;m=1,2,\cdots) \tag{8}$$

其中正常数 C 不依赖于 n 和 m. 特别地，对于收缩半群的情况，条件写成：$D(A)^a=X$，预解式$(I-n^{-1}A)^{-1}$存在且满足

$$\|(I-n^{-1}A)^{-1}\|\leq 1\quad (n=1,2,\cdots). \tag{9}$$

注 上面的结果(9)是 E. Hille [2] 和 K. Yosida [5] 各自独立地得到的. 这一结果由W. Feller[1], R. S. Phillips[3]和 I. Miyadera[1]作了推广且其推广是用(8)的形式给出的. 应当注意的是在条件(8)和(9)中，我们可以用(对充分大的 n)代替($n=1,2,\cdots$). 象本书所给出的半群理论在局部凸线性拓扑空间中的推广是 L. Schwartz[3]提出的.

系 2 设 X 是 B-空间，$\{T_t;t\geqq 0\}$ 是 $L(X,X)$ 中的有界线性算子族且满足

$$T_tT_s=T_{t+s}(t,s\geqq 0),\quad T_0=I, \tag{10}$$

$$s\text{-}\lim_{t\downarrow 0}T_t x=x\quad 对一切\ x\in X, \tag{11}$$

$$\|T_t\|\leqq Me^{\beta t}\ 对一切\ t\geqq 0,\ 这里\ M>0\ 和\ \beta>0\ 是同\ t\ 无关的. \tag{12}$$

则$(A-\beta I)$是等度连续(C_0)类半群 $S_t=e^{-\beta t}T_t$ 的无穷小生成元. 这里 A 是通过 $Ax=s\text{-}\lim\limits_{t\downarrow 0}t^{-1}(T_t-I)x$ 定义的算子. 于是，根据系 1，我们得知：其 $D(A)^a=X$ 和 $R(A)\subseteq X$ 的闭线性算子 A 是满足(10)，(11)及(12)的半群 T_t 的无穷小生成元的必要且充分的条件是预解式

$$(I-n^{-1}(A-\beta I))^{-1}$$

存在且满足

$$\|(I-n^{-1}(A-\beta I))^{-m}\|\leqq M\quad (对\ m=1,2,\cdots 和充分大的\ n). \tag{13}$$

这一条件还可写为

$$\|(I-n^{-1}A)^{-m}\|\leqq M(I-n^{-1}\beta)^{-m}\quad (对\ m=1,2,\cdots 和充分大的\ n). \tag{13'}$$

特别地，对于满足(10)，(11)和

$$\|T_t\|\leqq e^{\beta t}\quad 对一切\ t\geqq 0\ 成立 \tag{14}$$

的那些半群 T_t，条件(13′)可换成

$$\|(I-n^{-1}A)^{-1}\|\leqq(I-n^{-1}\beta)^{-1}\quad (对充分大的\ n). \tag{13''}$$

表示定理对于证明 Weierstrass 多项式逼近定理的应用. 考虑在 $C[0,\infty)$ 上由 $(T_t x)(s)=x(t+s)$ 定义的半群 T_t. 表示定理给出

$$(T_t x)(s)=x(t+s)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\exp(tAJ_n x)(s)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}(AJ_n)^m x(s),$$

而且上面的 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}$ 在 t 的任何紧区间关于 t 是一致的. 从这个结果我们可以导出 Weierstrass 的多项式逼近定理. 设 $z(s)$ 是闭区间$[0,1]$上的连续函数. 设 $x(s)\in C[0,\infty)$ 使得对 $s\in[0,1]$ $x(s)=z(s)$. 在上面的 $x(t+s)$ 的表示式中令 $s=0$, 则我们在 $C[0,1]$中得到

$$(T_t x)(0)=x(t)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}t^m(AJ_n)^m/m!$$

在$[0,1]$上关于 t 一致成立. 因此 $z(t)$ 是关于 t 的多项式序列在$[0,1]$上的一致收敛极限.

§8. 收缩半群和耗散算子

G. Lumer 和 R. S. Phillips 曾利用半内积的概念讨论过收缩半群. 这类半群的无穷小生成元依照他们的术语称作耗散的.

命题(Lumer) 对于复(或实)赋范线性空间 X 中的每一元素对$\{x,y\}$, 我们可以对应一个复(或实)数$[x,y]$使满足

$$[x+y,z]=[x,z]+[y,z],\ [\lambda x,y]=\lambda[x,y],\ [x,x]=\|x\|^2, \tag{1}$$
$$|[x,y]|\leqq\|x\|\cdot\|y\|.$$

$[x,y]$便称为向量 x 和 y 的半内积.

证明 根据第四章§1定理1的系2, 对于每一 $x_0\in X$, 至少存在一个(就让我们恰好选取一个)有界线性泛函 $f_{x_0}\in X'$ 使得$\|f_{x_0}\|=\|x_0\|$及$\langle x_0,f_{x_0}\rangle=\|x_0\|^2$. 那么

$$[x,y]=\langle x,f_y\rangle \tag{2}$$

显然定义一个半内积.

定义 设复(或实)B-空间 X 赋有一个半内积 $[x,y]$. 其定义域 $D(A)$ 和值域 $R(A)$ 都在 X 中的线性算子 A 称为耗散的(关于$[x,y]$), 如果

$$Re[Ax,x]\leqq 0 \qquad \text{只要 } x\in D(A). \tag{3}$$

例 设 X 是 Hilbert 空间. 则满足$(Ax,x)\leqq 0$ 的对称算子 A 关于半内积$[x,y]=(x,y)$一定是耗散的, 这里(x,y)是通常的内积.

定理(Phillips 和 Lumer) 设 A 是线性算子, 其定义域 $D(A)$ 和值域 $R(A)$ 都在复(或实) B-空间 X 中, 且 $D(A)^a=X$. 则 A 在 X 中生成一个(C_0)类收缩半群当且仅当 A 是耗散的(关于任何半内积$[x,y]$)且 $R(I-A)=X$.

证明 "当"的部分. 设 A 是耗散的且 $\lambda>0$. 则逆算子$(\lambda I-A)^{-1}$ 存在而且当 $y\in D((\lambda I-A)^{-1})$ 时$\|(\lambda I-A)^{-1}y\|\leqq\lambda^{-1}\|y\|$. 因为, 如果 $y=\lambda x-Ax$, 则由于 A 是耗散的, 有

$$\lambda\|x\|^2=\lambda[x,x]\leqq Re(\lambda[x,x]-[Ax,x])=Re[y,x]\leqq\|y\|\|x\|. \tag{4}$$

根据假设，$R(I-A)=X$，因此 $\lambda=1$ 属于 A 的预解集 $\rho(A)$. 并根据(4)我们有 $\|R(1;A)\|\leqq 1$. 如果 $|\lambda-1|<1$，则预解式 $R(\lambda;A)$ 存在且由

$$R(\lambda;A)=R(1;A)\left(I+(\lambda-1)R(1;A)\right)^{-1}=R(1;A)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}((1-\lambda)R(1;A))^n$$

给出(参看第八章§2定理1). 此外，由(4)推出 $\|R(\lambda;A)\|\leqq\lambda^{-1}$ 对于使得 $|\lambda-1|<1$ 的 $\lambda>0$ 成立. 因此，对于满足 $|\mu-\lambda|\|R(\lambda;A)\|<1$ 的 $\mu>0$，再次利用

$$R(\mu;A)=R(\lambda;A)\left(I+(\mu-\lambda)R(\lambda;A)\right)^{-1}$$

成立，我们便能证明 $R(\mu;A)$ 的存在性以及 $\|R(\mu;A)\|\leqq\mu^{-1}$. 重复这样的过程，我们便知 $R(\lambda;A)$ 对于一切 $\lambda>0$ 存在而且满足估计式 $\|R(\lambda;A)\|\leqq\lambda^{-1}$. 由假设 $D(A)$ 稠密，利用前节的系1，便推出 A 生成一个 (C_0) 类收缩半群.

"仅当"部分. 假设 $\{T_t;t\geqq 0\}$ 是 (C_0) 类收缩半群，则

$$Re[T_tx-x,x]=Re[T_tx,x]-\|x\|^2\leqq\|T_tx\|\|x\|-\|x\|^2\leqq 0.$$

于是，对于 $x\in D(A)$，$D(A)$ 是 T_t 的无穷小生成元 A 的定义域，我们有 $Re[Ax,x]=\lim_{t\downarrow 0}Re\{t^{-1}[T_tx-x,x]\}\leqq 0$. 因此，$A$ 是耗散的. 此外，因为 A 是 (C_0) 类收缩半群的无穷小生成元，便知 $R(I-A)=D(R(1;A))=X$.

系 如果 A 是稠密地定义的闭线性算子，其 $D(A)$ 和 $R(A)$ 都在 B-空间 X 中，并且如果 A 和它的对偶算子 A' 都是耗散的，则 A 生成一 (C_0) 类收缩半群.

证明 只要证明 $R(I-A)=X$ 就够了. 但是，因为 $(I-A)^{-1}$ 同 A 一样是闭的并且是有界的，则 $R(I-A)$ 是 X 的闭线性子空间. 于是由 $R(I-A)\neq X$ 必推出存在非零元 $x'\in X'$ 使得

$$\langle(x-Ax),x'\rangle=0\qquad\text{对一切 }x\in D(A)\text{ 成立.}$$

因此，$x'-A'x'=0$，这同 A' 的耗散性和 $x'\neq 0$ 矛盾.

注 关于耗散算子的进一步的详细讨论，参看 G. Lumer-R. S. Phillips[1]. 也可参看 T. Kato[6].

§9. 等度连续(C_0)类群. Stone 定理

定义 等度连续 (C_0) 类半群 $\{T_t\}$ 称为等度连续 (C_0) 类群，如果存在等度连续 (C_0) 类半群 $\{\hat{T}_t\}$ 适合如下条件:

如果我们定义 S_t 为 $S_t=T_t$ 对于 $t\geqq 0$ 以及 $S_{-t}=\hat{T}_t$ 对于 $t\geqq 0$，则算子族 S_t，$-\infty<t<\infty$，具有群的性质

$$S_tS_s=S_{t+s}\ (-\infty<t,s<\infty),\quad S_0=I. \tag{1}$$

定理 设 X 是局部凸序列完备线性拓扑空间. 假设 A 是线性算子其定义域 $D(A)$ 在 X 内稠密且值域 $R(A)$ 亦在 X 内，则 A 是算子 $S_t\in L(X,X)$ 的等度连续 (C_0) 类群的无穷小生成元当且仅当算子 $(I-n^{-1}A)^{-m}$ 对于 $n=\pm1,\pm2,\cdots$ 和 $m=1,2,\cdots$ 是处处有定义的且等度连续的.

证明 "仅当"部分. 设 $T_t=S_t$ 对于 $t\geqq 0$，$\hat{T}_t=S_{-t}$ 对于 $t\geqq 0$. 设 A 和 $\hat{A}$ 分别是 T_t 和 $\hat{T}_t$ 的无穷小生成元. 我们要证明 $\hat{A}=-A$. 如果 $x\in D(\hat{A})$，那么，令 $x_h=h^{-1}(\hat{T}_h-I)x$ 且利用 T_h 的

等度连续性，即得

$$p(T_h x_h-\hat{A}x)\leq p(T_h x_h-T_h\hat{A}x)+p((T_h-I)\hat{A}x)\leq q(x_h-\hat{A}x)+p((T_h-I)\hat{A}x),$$

这里 p 和 q 是 X 的连续半范数，使得对于给定的 p，我们可以选一 q，对一切 $h\geqq 0$ 和一切 $x\in D(\hat{A})$ 同时满足上面的不等式．于是 $\lim\limits_{h\downarrow 0}T_h x_h=\hat{A}x$，从而由 $x\in D(\hat{A})$ 可推出 $\hat{A}x=\lim\limits_{h\downarrow 0}T_h(h^{-1}(\hat{T}_h-I))x=\lim\limits_{h\downarrow 0}h^{-1}(I-T_h)x=-Ax$，所以 $-A$ 是 $\hat{A}$ 的扩张．同样地，我们可以证明 $\hat{A}$ 是 $-A$ 的扩张．所以 $\hat{A}=-A$.

"当"的部分．对 $t\geqq 0$，定义

$$T_t x=\lim_{n\to\infty}T_t^{(n)}x=\lim_{n\to\infty}\exp(tA(I-n^{-1}A)^{-1})x,$$

$$\hat{T}_t x=\lim_{n\to\infty}\hat{T}_t^{(n)}x=\lim_{n\to\infty}\exp(t\hat{A}(I-n^{-1}\hat{A})^{-1})x,\ 这里\ \hat{A}=-A.$$

则 T_t 和 $\hat{T}_t$ 都是等度连续 (C_0) 类半群．根据 $\{T_t^{(n)}\}$ 对于 n 和 $t\geqq 0$ 的等度连续性，我们有

$$p(T_t\hat{T}_t x-T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x)\leq p(T_t\hat{T}_t x-T_t^{(n)}\hat{T}_t x)+p(T_t^{(n)}\hat{T}_t x-T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x)$$

$$\leq p((T_t-T_t^{(n)})\hat{T}_t x)+q(\hat{T}_t x-\hat{T}_t^{(n)}x).$$

于是，有 $\lim\limits_{n\to\infty}T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x=T_t\hat{T}_t x$．根据 $T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}$ 的等度连续性我们就附带证明了 $T_t\hat{T}_t$ 的等度连续性．另一方面，由 $(I-n^{-1}A)^{-1}$ 和 $(I-m^{-1}A)^{-1}$ 的可交换性，有 $T_t^{(n)}\hat{T}_s^{(m)}=\hat{T}_s^{(m)}T_t^{(n)}$．于是 $(T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)})(T_s^{(n)}\hat{T}_s^{(n)})=T_{t+s}^{(n)}\hat{T}_{t+s}^{(n)}$，因此 $(T_t\hat{T}_t)$ 对于 $t\geqq 0$ 具有半群性质 $(T_t\hat{T}_t)(T_s\hat{T}_s)=T_{t+s}\hat{T}_{t+s}$．所以 $\{T_t\hat{T}_t\}$ 是等度连续 (C_0) 类半群．如果 $x\in D(\hat{A})=D(A)$，则

$$\lim_{h\downarrow 0}h^{-1}(T_h\hat{T}_h-I)x=\lim_{h\downarrow 0}T_h\cdot h^{-1}(\hat{T}_h-I)x+\lim_{h\downarrow 0}h^{-1}(T_h-I)x=\hat{A}x+Ax=0,$$

所以 $\{T_t\hat{T}_t\}$ 的无穷小生成元 A_1 在每一 $x\in D(\hat{A})$ 为 0．因为 $(I-A_1)$ 是连续线性算子 $(I-A_1)^{-1}\in L(X,X)$ 的逆，我们就知 A_1 必是闭的．又由于 A_1 在 X 的稠密子集 $D(\hat{A})=D(A)$ 上为零，从而 A_1 必为 0．所以 $(T_t\hat{T}_t)x=\lim\limits_{n\to\infty}\exp(t\cdot 0(1-n^{-1}\cdot 0)^{-1})x=x$，即 $T_t\hat{T}_t=I$．我们于是就证明了 S_t，$-\infty<t<\infty$，有群的性质，这里 $S_t=T_t$ 和 $S_{-t}=\hat{T}_t$ 对于 $t\geqq 0$.

系 1 对于 B-空间 X 的情况，定理的条件成为：$D(A)^a=X$，预解式 $(I-n^{-1}A)^{-1}$ 存在且满足

$$\|(I-n^{-1}A)^{-m}\|\leqq M\quad(对于\ m=1,2,\cdots 和充分大的\ |n|,\ n\gtrless 0).\tag{2}$$

对于对一切 t，$-\infty<t<\infty$，满足 $\|S_t\|\leqq Me^{\beta|t|}$ $(\beta\geqq 0)$ 的群 S_t，其条件成为：$D(A)^a=X$，预解式 $(I-n^{-1}A)^{-1}$ 存在且满足

$$\|(I-n^{-1}A)^{-m}\|\leqq M(1-|n^{-1}|\beta)^{-m}\quad(对于\ m=1,2,\cdots 和充分大的\ |n|,\ n\lessgtr 0).\tag{3}$$

对于 $\|S_t\|\leqq e^{\beta|t|}$ 对所有的 t，$-\infty<t<\infty$，成立的特殊情况．其条件成为：$D(A)^a=X$，预解式 $(I-n^{-1}A)^{-1}$ 存在且满足

$$\|(I-n^{-1}A)^{-1}\|\leqq(1-|n^{-1}|\beta)^{-1}\quad(对充分大的\ |n|,\ n\gtrless 0).\tag{4}$$

证明 与第九章§7中的系1和系2的证明类似.

系 2 (Stone 定理) 设 U_t，$-\infty<t<\infty$，是 Hilbert 空间 X 中的 (C_0) 类酉算子群．则 U_t 的无穷小生成元 A 是 $\sqrt{-1}$ 乘以自伴算子 H.

证明 我们有$(U_tx, y)=(x, U_t^{-1}y)$，因此通过微分，得

$$(Ax, y)=(x, -Ay) \quad \text{对于 } x, y\in D(A) \text{ 成立.}$$

于是$-iA=H$是对称的. A作为U_t的无穷小生成元，$(I-n^{-1}A)^{-1}=(I-n^{-1}iH)^{-1}$必是有界线性算子并有$\|(I-n^{-1}iH)^{-1}\|\leq 1$对于$n=\pm 1, \pm 2, \cdots$成立. 因此，取$n=\pm 1$的情况，我们得知$H$的Cayley变换是酉的. 这就证明了$H$是自伴的.

注 如果A具有$A=\sqrt{-1}\,H$的形式，这里H是Hilbert空间X中的自伴算子，则利用Cayley变换理论可以证明系1的条件(4)一定满足. 因此A是X中的收缩算子群U_t的无穷小生成元. 容易看出这样的U_t是酉的. 因为对于映Hilbert空间X入X内的收缩算子U_t，如果$U_t^{-1}=U_{-t}$也是映X入X内的收缩算子，则U_t必是酉的.

§10. 解 析 半 群

我们将引入重要的一类半群，就是这样的半群T_t，它作为参变数t的函数可以解析延拓到复平面上包含正t轴在内的一扇形上去. 我们首先证明一个

引理 设X是局部凸序列完备的线性拓扑空间. 设$\{T_t;\ t\geq 0\}\subseteq L(X, X)$是等度连续$(C_0)$类半群. 假设对于一切$t>0$，$T_tX\subseteq D(A)$，$D(A)$是$T_t$的无穷小生成元$A$的定义域. 则对于任何$x\in X$，$T_tx$对于$t>0$是无穷可微的而且我们有

$$T_t^{(n)}x=(T'_{t/n})^nx \quad \text{对一切 } t>0 \text{ 成立,} \tag{1}$$

这里$T'_t=D_tT_t, T''_t=D_tT'_t, \cdots, T_t^{(n)}=D_tT_t^{(n-1)}$.

证明 如果$t>t_0>0$，由于A和T_s，$s\geq 0$，可交换则$T'_tx-AT_tx=T_{t-t_0}AT_{t_0}x$. 于是当$t>0$时$T'_tX\subseteq T_{t-t_0}X\subseteq D(A)$，因此对于一切$t>0$和$x\in X$，$T''_tx$存在. 因为$A$是闭线性算子，所以我们有

$$T''_tx=D_t(AT_t)x=A\cdot\lim_{h\to\infty}\cdot n(T_{t+1/n}-T_t)x=A(AT_t)x=AT_{t/2}AT_{t/2}x=(T'_{t/2})^2x.$$

重复同样的论证，我们即得(1).

设X是局部凸序列完备复线性拓扑空间. 设$\{T_t; t\geq 0\}\subseteq L(X, X)$是等度连续$(C_0)$类半群. 对于这样的半群，我们考虑下面三个条件:

(I) 对于一切$t>0$，$T_tx\in D(A)$并且存在正常数C使得算子族$\{(CtT'_t)^n\}$关于$n\geq 0$和t，$0<t\leq 1$，等度连续.

(II) T_t具有由

$$T_\lambda x=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-t)^nT_t^{(n)}x/n! \quad \text{对于} |\arg\lambda|<\tan^{-1}(Ce^{-1}), \tag{2}$$

给出的弱解析扩张T_λ，而且

算子族$\{e^{-\lambda}T_\lambda\}$对于适合$|\arg\lambda|<\tan^{-1}(2^{-k}Ce^{-1})$的$\lambda$等度连续，其中$k$是某一正常数. (3)

(III) 设A是T_t的无穷小生成元，则存在正常数C_1使得算子族$\{(C_1\lambda R(\lambda; A))^n\}$对于$n\geq 1$和满足$Re(\lambda)\geq 1+\varepsilon$，$\varepsilon>0$，的$\lambda$等度连续.

我们可以证明

定理 三个条件(I)、(II)和(III)是彼此等价的.

证明 **蕴涵(I)→(II)** 设 p 是 X 的任一连续半范数. 则由假设, 存在 X 的连续半范数 q 使得对于 $1\geqq t>0, n\geqq 0$ 和 $x\in X$, $p((tT'_t)^n x)\leqq C^{-n}q(x)$, $0<C$, 成立. 因而由(1), 对于任何 $t>0$, 我们得到

$$p((\lambda-t)^n T_t^{(n)}x/n!)\leqq\frac{|\lambda-t|^n}{t^n}\frac{n^n}{n!}\frac{1}{C^n}p\left(\left(\frac{t}{n}CT'_{t/n}\right)^n x\right)\leqq\left(\frac{|\lambda-t|}{t}C^{-1}e\right)^n\cdot q(x),$$

当 $0\leqq t/n\leqq 1$ 时.

于是(2)的右边对于 $|\arg\lambda|<\tan^{-1}(Ce^{-1})$ 收敛. 因此, 根据空间 X 的序列完备性, $T_\lambda x$ 是完全确定的而且对于适合 $|\arg\lambda|<\tan^{-1}(Ce^{-1})$ 的 λ 弱解析. 也就是, 对于任何 $x\in X$ 和 $f\in X'$, $t(t>0)$ 的数值函数 $f(T_tx)$ 对于 $|\arg\lambda|<\tan^{-1}(Ce^{-1})$ 具有解析扩张 $f(T_\lambda x)$; 于是, 根据 Hahn Banach 定理, 我们得知 $T_\lambda x$ 是 T_tx 对于 $|\arg\lambda|<\tan^{-1}(Ce^{-1})$ 的扩张. 其次令 $S_t=e^{-t}T_t$. 则 $S'_t=e^{-t}T'_t-e^{-t}T_t$. 因此, 由于 $0\leqq te^{-t}\leqq 1(0\leqq t)$ 和(I), 借助于$\{T_t\}$对于 $t>0$ 的等度连续性, 我们容易看出算子族$\{(2^{-k}CtS'_t)^n\}$对于 $t>0$ 和 $n\geqq 0$ 等度连续. 等度连续(C_0)类半群 S_t 满足这样的条件, 即 $t>0$ 蕴涵 $S_tX\subseteq D(A-I)=D(A)$, 这里$(A-I)$是 S_t 的无穷小生成元. 因而, 利用上面应用于 T_t 的同样的理由, 我们可以证明 $S_t=e^{-t}T_t$ 的弱解析扩张 $e^{-\lambda}T_\lambda$ 满足估计(3).

附带地, 我们可以证明

系(属于 E. Hille) 特别地, 如果 X 是复 B-空间且 $\overline{\lim\limits_{t\downarrow 0}}\|tT'_t\|<e^{-1}$, 则 $X=D(A)$.

证明 对于固定的 $t>0$, 我们有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|(t/n)T'_{t/n})\|<e^{-1}$, 因此级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-t)^n T_t^{(n)}x/n!=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda-t)^n}{t^n}\frac{n^n}{n!}\left(\frac{t}{n}T'_{t/n}\right)^n x$$

在复 λ-平面的某一扇形

$$\{\lambda;\ |\lambda-t|/t<1+\delta, \text{其中 } \delta>0 \text{ 是某一正数}\}$$

强收敛. 这一扇形一定包含 $\lambda=0$ 在其内部.

蕴涵(II)→(III) 由第九章 § 4 的(10)式, 我们有

$$(\lambda R(\lambda;A))^{n+1}x=\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^nT_txdt \quad \text{对于 } Re(\lambda)>0,$$

$$x\in X \text{ 成立.} \tag{4}$$

因而, 令 $S_t=e^{-t}T_t$, 我们得到

$$((\sigma+1+i\tau)R(\sigma+1+i\tau;A))^{n+1}x=\frac{(\sigma+1+i\tau)^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t}t^nS_txdt,\ \sigma>0.$$

设 $\tau<0$. 因为被积函数是弱解析的. 根据估计(3)和 Cauchy 积分定理, 我们可以将积分路径 $0\leqq t<+\infty$ 变为包含在复 λ-平面的扇形 $0<\arg\lambda<\tan^{-1}(2^{-k}Ce^{-1})$ 中的射线 $re^{i\theta}(0\leqq r<\infty)$. 我们于是得到

$$((\sigma+1+i\tau)R(\sigma+1+i\tau;A))^{n+1}x=\frac{(\sigma+1+i\tau)^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)re^{i\theta}}r^ne^{in\theta}S_{re^{i\theta}}xe^{i\theta}dr,$$

因此, 由(3), 得

$$p(((\sigma+1+i\tau)R(\sigma+1+i\tau;A))^{n+1}x)$$

$$\leqq \sup_{0<\tau<\infty} p(S_{re^{i\theta}}x)\frac{|(\sigma+1+i\tau)|^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{(-\sigma\cos\theta+\tau\sin\theta)r}r^n dr$$

$$\leqq q'(x)\frac{|\sigma+1+i\tau|^{n+1}}{|\tau\sin\theta-\sigma\cos\theta|^{n+1}},$$ 这里 q' 是 X 的连续半范数.

类似的估计亦可对 $\tau>0$ 的情况得到. 因此, 结合 § 4 中的(7)式, 我们得证(III).

蕴涵(III)→(I) 对于 X 的任何连续半范数 p, 存在 X 的连续半范数 q 使得

$$p((C_1\lambda R(\lambda;A))^n x)\leqq q(x) \quad \text{当 } Re(\lambda)\geqq 1+\varepsilon,\ \varepsilon>0 \text{ 和 } n\geqq 0 \text{ 时成立.}$$

因此, 如果 $Re(\lambda_0)\geqq 1+\varepsilon$, 我们有

$$p((\lambda-\lambda_0)^n R(\lambda_0;A)^n x)\leqq\frac{|\lambda-\lambda_0|^n}{(C_1|\lambda_0|)^n}q(x) \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

于是, 如果 $|\lambda-\lambda_0|/C_1|\lambda_0|<1$, 预解式 $R(\lambda;A)$ 存在而且由下式给出:

$$R(\lambda;A)x=\sum_{n=0}^\infty(\lambda_0-\lambda)^n R(\lambda_0;A)^{n+1}x \text{ 并有}$$

$$p(R(\lambda;A)x)\leqq(1-C_1^{-1}|\lambda_0|^{-1}|\lambda-\lambda_0|)^{-1}q(R(\lambda_0;A)x).$$

因而, 由(III), 存在辐角 θ_0, $\frac{\pi}{2}<\theta_0<\pi$, 使得在扇形 $\frac{\pi}{2}\leqq\arg\lambda\leqq\theta_0$ 和 $-\theta_0\leqq\arg\lambda\leqq-\frac{\pi}{2}$ 以及在 $Re(\lambda)\geqq 0$, 而 $|\lambda|$ 充分大时, $R(\lambda;A)$ 存在而且满足估计

$$p(R(\lambda;A)x)\leqq\frac{1}{|\lambda|}q'(x), \text{ 其中 } q' \text{ 是 } x \text{ 的某一连续半范数.} \tag{5}$$

因此积分

$$\hat{T}_t x=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2} e^{\lambda t}R(\lambda;A)x d\lambda \quad (t>0,\ x\in X) \tag{6}$$

收敛. 如果我们取积分路径 $C_2=\lambda(\sigma)$, $-\infty<\sigma<\infty$, 使得 $\lim_{|\sigma|\uparrow\infty}|\lambda(\sigma)|=\infty$ 并对于某一 $\varepsilon>0$

$$\pi/2+\varepsilon\leqq\arg\lambda(\sigma)\leqq\theta \text{ 以及 } -\theta_0\leqq\arg\lambda(\sigma)\leqq-\pi/2-\varepsilon$$

分别当 $\sigma\uparrow+\infty$ 和 $\sigma\downarrow-\infty$ 时成立; 而对于不大的 $|\sigma|$, $\lambda(\sigma)$ 属于复 λ- 平面的右半平面.

我们将证明 $\hat{T}_t$ 同半群 T_t 本身重合. 我们首先证明对于一切 $x\in D(A)$, $\lim_{t\downarrow 0}\hat{T}_t x=x$. 设 $x_0\in D(A)$ 是任何一个元素, 选积分围道 C_2 右侧的任一复数 λ_0, 同时记 $(\lambda_0 I-A)x_0=y_0$. 则由预解方程, 有

$$\hat{T}_t x_0=\hat{T}_t R(\lambda_0;A)y_0=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2} e^{\lambda t}R(\lambda;A)R(\lambda_0;A)y_0 d\lambda$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2} e^{\lambda t}(\lambda_0-\lambda)^{-1}R(\lambda;A)y_0 d\lambda-(2\pi i)^{-1}\int_{C_2} e^{\lambda t}(\lambda_0-\lambda)^{-1}R(\lambda_0;A)y_0 d\lambda.$$

当积分路径向左移动时便可看出右边的第二个积分等于零. 因此

$$\hat{T}_t x_0=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2} e^{\lambda t}(\lambda_0-\lambda)^{-1}R(\lambda;A)y_0 d\lambda,\ y_0=(\lambda_0 I-A)x_0.$$

由于估计(5), 积分号下取极限 $t\downarrow 0$ 是可以的, 因此

$$\lim_{t\downarrow 0}\hat{T}_t x_0=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2}(\lambda_0-\lambda)^{-1}R(\lambda;A)y_0 d\lambda,\ y_0=(\lambda_0 I-A)x_0.$$

为了求得右边积分的值，我们用原积分路径 C_2 在圆周 $|\lambda|=r$ 之内部的部分同圆周 $|\lambda|=r$ 在原积分路径 C_2 之右的弧段做成一闭围道，由于(5)，积分沿新圆弧段以及沿 C_2 被抛弃部分的值当 $r\uparrow\infty$ 时趋向于零. 因而积分的值等于在新闭围道内的残数. 也就是值 $R(\lambda_0;A)y_0=x_0$. 我们于是就证得 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\hat{T}_t x_0=x_0$ 当 $x_0\in D(A)$ 时成立.

我们其次指出对于 $t>0$ 和 $x\in X$ 有 $\hat{T}'_t x=A\hat{T}_t x$. 我们有 $R(\lambda;A)X=D(A)$ 及 $AR(\lambda;A)=\lambda R(\lambda;A)-I$, 所以，利用收敛因子 $e^{\lambda t}$, 积分 $(2\pi i)^{-1}\int_{C_2'}e^{\lambda t}AR(\lambda;A)xd\lambda$ 有意义. 用 Riemann 和逼近积分(6)并利用 A 封闭的事实: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}Ax_n=y$, 必有 $x\in D(A)$ 和 $Ax=y$, 就可得知上面的积分等于 $A\hat{T}_t x$. 因而

$$A\hat{T}_t x=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2}e^{\lambda t}AR(\lambda;A)xd\lambda,\ t>0.$$

另一方面，在积分号下微分(6)，我们得到

$$\hat{T}'_t x=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2}e^{\lambda t}\lambda R(\lambda;A)xd\lambda,\ t>0. \tag{7}$$

这两个积分的差是 $(2\pi i)^{-1}\int_{C_2}e^{\lambda t}xd\lambda$ 而且把积分路径向左移动时就可看出后一积分的值为零.

于是我们就证明了 $\hat{x}(t)=\hat{T}_t x_0,\ x_0\in D(A)$ 满足 i) $\lim\limits_{t\downarrow 0}\hat{x}(t)=x_0$, ii) $d\hat{x}(t)/dt=A\hat{x}(t)$ 对于 $t>0$ 成立以及 iii) $\{\hat{x}(t)\}$ 由于(6)当 $t\uparrow\infty$ 时按指数律增长. 另一方面，因为 $x_0\in D(A)$ 以及因为 $\{T_t\}$ 对于 $t\geqq 0$ 等度连续，我们看出 $x(t)=T_t x_0$ 也满足 $\lim\limits_{t\downarrow 0}x(t)=x_0$, $dx(t)/dt=Ax(t)$ 对于 $t\geqq 0$ 成立以及 $\{x(t)\}$ 当 $t\geqq 0$ 时是有界的. 我们令 $\hat{x}(t)-x(t)=y(t)$. 则 $\lim\limits_{t\downarrow 0}y(t)=0$, $dy(t)/dt=Ay(t)$ 对于 $t>0$ 成立以及 $\{y(t)\}$ 当 $t\uparrow\infty$ 时按指数律增长. 因此我们可以研究 Laplace 变换

$$L(\lambda;y)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}y(t)\,dt\quad \text{对于充分大的正}\ Re(\lambda).$$

用 Riemann 和逼近积分并利用 A 的封闭性，即有

$$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}y'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}Ay(t)\,dt=A\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}y(t)\,dt,\ 0\leqq\alpha<\beta<\infty.$$

应用分部积分法，我们得到

$$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}y'(t)\,dt=e^{-\lambda\beta}y(\beta)-e^{-\lambda\alpha}y(\alpha)+\lambda\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}y(t)\,dt,$$

当 $\alpha\downarrow 0,\beta\uparrow\infty$ 时这一积分趋向于 $L(\lambda;y)$. 因为，$y(0)=0$ 而且 $\{y(\beta)\}$ 当 $\beta\uparrow\infty$ 时是按指数律增长的，于是再利用 A 的封闭性，我们便得

$$AL(\lambda;y)=\lambda L(\lambda;y)\quad \text{对于充分大的正}\ Re(\lambda)\ \text{成立}.$$

因为在 $Re(\lambda)>0$ 时逆 $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在，因此当 $Re(\lambda)$ 是充分大的正数时必有 $L(\lambda;y)=0$. 于是，

对于任何连续线性泛函 $f\in X'$, 我们有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(y(t))\,dt=0 \text{ 当 } Re(\lambda) \text{ 为充分大的正数时.}$$

我们记 $\lambda=\sigma+i\tau$ 而且令

$$g_\sigma(t)=\begin{cases} e^{-\sigma t}f(y(t)) & \text{当 } t\geqq 0 \text{ 时,}\\ 0 & \text{当 } t<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

那么上面的等式表明 Fourier 变换 $(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\tau t}g_\sigma(t)\,dt$ 关于 τ, $-\infty<\tau<+\infty$, 恒为零, 从而由 Fourier 积分定理, 恒有 $g_\sigma(t)=0$. 于是 $f(y(t))=0$ 从而由 Hahn-Banach 定理, 必恒有 $y(t)=0$.

所以, 对于一切 $t>0$ 和 $x\in D(A)$, $\hat{T}_t x=T_t x$. 因为 $D(A)$ 在 X 中稠密而且 $\hat{T}_t$, T_t 都属于 $L(X,X)$, 我们容易得出结论, 对于一切 $x\in X$ 和 $t>0$, $\hat{T}_t x=T_t x$. 因此, 由定义 $\hat{T}_0=I$, 即有 $\hat{T}_t=T_t$ 对于一切 $t\geqq 0$ 成立. 因此, 由(7), $T'_t x=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2}e^{\lambda t}\lambda R(\lambda;A)x\,d\lambda$, $t>0$, 从而由(1)和(5), 我们得到

$$(T'_{t/n})^n x=T_t^{(n)}x=(2\pi i)^{-1}\int_{C_2}e^{\lambda t}\lambda^n R(\lambda;A)x\,d\lambda,\ t>0.$$

所以, 由(III)

$$p((tT'_t)^n x)\leqq(2\pi)^{-1}q(x)\int_{C_2}|e^{n\lambda t}|t^n|\lambda|^{n-1}d|\lambda|.$$

如果 $0<t\leqq 1$, 则最后的积分不超过 C_3^n, 这里 C_3 是确定的正常数. 当把积分路径 C_2 分为在右半平面 $Re(\lambda)\geqq 0$ 和在左半平面 $Re(\lambda)<0$ 之两部分的和, 而且回想一下 Γ 函数的积分表示时, 我们就可看出这一点.

参考文献 本节的结果属于 K. Yosida [6]. 也可参看 E. Hille [3] 和 E. Hille-R. S. Phillips[1].

§11. 闭算子的分数幂

设 X 是 B-空间, 而 $\{T_t;\,t\geqq 0\}\subseteq L(X,X)$ 是等度连续 (C_0) 类半群. 我们引入

$$f_{t,\alpha}(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{z\lambda-tz^\alpha}dz\ (\sigma>0,\ t>0,\ \lambda\geqq 0,\ 0<\alpha<1),\ =0\quad(\text{当 } \lambda<0 \text{ 时}). \tag{1}$$

这里 z^α 的分支取为当 $Re(z)>0$ 时有 $Re(z^\alpha)>0$. 这一分支在沿负实轴割开的 z-平面是单值函数. 由于有收敛因子 e^{-tz^α} 积分(1)的收敛性是显见的. 仿效 S. Bochner[2] 和 R. S. Phillips [5], 我们可以证明算子

$$\hat{T}_{t,\alpha}x=\hat{T}_t x=\int_0^\infty f_{t,\alpha}(s)T_s x\,ds\quad(t>0),\ =x\ (t=0). \tag{2}$$

构成一等度连续 (C_0) 类半群. 此外, 我们可以证明 $\{\hat{T}_t\}$ 是解析半群(K. Yosida[8] 和 V. Balakrishnan[1]). $\hat{T}_t$ 的无穷小生成元 $\hat{A}=\hat{A}_\alpha$ 同 T_t 的无穷小生成元 A 由

$$\hat{A}_\alpha x = -(-A)^\alpha x \quad 对于\ x\in D(A), \tag{3}$$

联系着，这里$(-A)$的分数幂$(-A)^\alpha$由

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda I - A)^{-1}(-Ax)d\lambda \quad 对于\ x\in D(A) \tag{4}$$

而且亦由

$$(-A)^\alpha x = \Gamma(-\alpha)^{-1}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}(T_\lambda - I)x d\lambda \quad 对于\ x\in D(A) \tag{5}$$

给出. 公式(4)和(5)是由 V. Balakrishnan 得到的. 对于$\hat{A}_\alpha$的预解式 T. Kato 给出如下的公式:

$$(\mu I - \hat{A}_\alpha)^{-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty (\tau I - A)^{-1}\frac{\tau^\alpha}{\mu^2 - 2\mu\tau^\alpha \cos \alpha\pi + \tau^{2\alpha}}d\tau. \tag{6}$$

利用这种方法，我们得知在等度连续(C_0)类半群类里面的解析半群是大量存在的.

为了证明上面的结果，我们用一系列的命题研究函数$f_{t,\alpha}(\lambda)$的性质.

命题 1 我们有

$$e^{-ta^\alpha} = \int_0^\infty e^{-\lambda a} f_{t,\alpha}(\lambda)d\lambda \quad (t>0, a>0) \tag{7}$$

证明 利用收敛因子$e^{-z^\alpha t}$容易看出函数$f_{t,\alpha}(\lambda)$关于λ是按指数律增长的. 根据 Cauchy 积分定理，积分(1)同$\sigma>0$无关. 设$a>\sigma=Re(z)>0$. 则由 Cauchy 残数定理

$$\int_0^\infty e^{-\lambda a} f_{t,\alpha}(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\frac{e^{\lambda(z-a)}}{z-a}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} e^{-z^\alpha t}dz$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{z-a}e^{-z^\alpha t}dz = e^{-ta^\alpha}.$$

命题 2 我们有

$$f_{t,\alpha}(\lambda) \geqq 0 \quad 对于一切\ \lambda>0\ 成立. \tag{8}$$

证明 如果我们令$a^\alpha = g(a)$, $e^{-tx} = h(x)$, 则

$$(-1)^{n-1}\cdot g^{(n)}(a) \geqq 0 \ (n=0,1,\cdots),\ g(a)\geqq 0\ 以及$$

$$(-1)^n\cdot h^{(n)}(x) \geqq 0 \quad (n=0,1,\cdots),\ 当\ a\geqq 0\ 和\ x\geqq 0\ 时.$$

因此$k(a) = h(g(a)) = e^{-ta^\alpha}$满足

$$\left\{\begin{aligned} &(-1)^n k^{(n)}(a) = (-1)h'(x)(-1)^{n-1}g^{(n)}(a) \\ &+\sum_{(p)} C^{(n)}_{(p_0 p_1 \ldots p_\nu)}(-1)^{p_0}h^{(p_0)}(x)(-1)^{p_1}g^{(p_1+1)}(a)\cdots(-1)^{p_\nu}g^{(p_\nu+1)}(a) \\ &\quad (C^{(n)}_{(p)}\geqq 0, p_0\geqq 2, p_1\geqq 0, \cdots, p_\nu\geqq 0\ 其\ p_0\leqq \sum_{i=1}^{\nu}p_i = n\ 以及\ \nu\ 任意) \\ &\quad \geqq 0, \ (n=0,1,2,\cdots) \end{aligned}\right. \tag{9}$$

也就是说，函数$k(a) = e^{-ta^\alpha}$对于$a\geqq 0$是**完全单调的**.

我们其次证明 **Post-Widder 反演公式**

$$f_{t,\alpha}(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{n+1} k^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda}\right), \lambda>0, \tag{10}$$

从而，由(9)，$f_{t,\alpha}(\lambda)\geqq 0$．(10)的证明如下．把(7)式微分 n 次，我们求得

$$k^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda}\right)=(-1)^n\int_0^\infty s^n e^{-sn/\lambda}f_{t,\alpha}(s)\,ds.$$

将它代入(10)的右端，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{e^n n!}\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty\left[\frac{s}{\lambda}\cdot\exp\left(1-\frac{s}{\lambda}\right)\right]^n f_{t,\alpha}(s)\,ds.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}n^n/\sqrt{2\pi n}\,e^n n!=1\quad(\text{Stirling 公式}),$$

所以我们需要证明

$$f_{t,\alpha}(\lambda_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0}\int_0^\infty n^{3/2}\left[\frac{s}{\lambda_0}\cdot\exp\left(1-\frac{s}{\lambda_0}\right)\right]^n f_{t,\alpha}(s)\,ds,\ \lambda_0>0. \tag{11}$$

设 η 是满足 $\eta<\lambda_0$ 的固定正数，我们将最后的积分分解为三部分

$$\int_0^\infty=\int_0^{\lambda_0-\eta}+\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta}+\int_{\lambda_0+\eta}^\infty=J_1+J_2+J_3.$$

因为 $x\cdot\exp(1-x)$ 在$[0,1]$单调增加地从 0 变到 1，利用 $f_{t,\alpha}(s)$ 关于 s 的有界性，我们看出 $\lim\limits_{n\to\infty}J_1=0$．其次，因为 $x\cdot\exp(1-x)$ 在$[1,\infty)$单调减少地从 1 变到 0，我们有

$$\frac{\lambda_0+\eta}{\lambda_0}\cdot\exp\left(1-\frac{\lambda_0+\eta}{\lambda_0}\right)<\beta<1,$$

从而，因为 $f_{t,\alpha}(s)$ 当 $s\uparrow\infty$ 时按指数律增长，所以

$$|J_3|\leqq n^{3/2}e^{n_0}\beta^{n-n_0}\int_0^\infty\left(\frac{s}{\lambda_0}\right)^{n_0}\exp\left(-\frac{n_0 s}{\lambda_0}\right)|f_{t,\alpha}(s)|\,ds\to 0\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时}.$$

根据 $f_{t,\alpha}(s)$ 关于 s 的连续性，对于任何正数 ε，我们有

$$f_{t,\alpha}(\lambda_0)-\varepsilon\leqq f_{t,\alpha}(s)\leqq f_{t,\alpha}(\lambda_0)+\varepsilon\ \text{成立，只要}\ \lambda_0-\eta\leqq s\leqq\lambda_0+\eta,$$

如果我们取 $\eta>0$ 充分小．于是

$$(f_{t,\alpha}(\lambda_0)-\varepsilon)J_0\leqq J_2\leqq(f_{t,\alpha}(\lambda_0)+\varepsilon)J_0, \tag{12}$$

这里

$$J_0=\int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta}n^{3/2}\left[\frac{s}{\lambda_0}\cdot\exp\left(1-\frac{s}{\lambda_0}\right)\right]^n ds. \tag{13}$$

整个前面的论证对于完全单调函数的特殊情况

$$k(a)=a^{-1}=\int_0^\infty e^{-\lambda a}d\lambda$$

是正确的．在这种情况，$k^{(n)}(n/\lambda_0)=(-1)^n n!\,(\lambda_0/n)^{n+1}$．把它代入(10)，我们求得 (10) 对于 $f_{t,\alpha}(\lambda)\equiv 1$ 成立．因为(10)和(11)是等价的，(11)对于 $f_{t,\alpha}(\lambda)\equiv 1$ 也必成立．于是，因为对于一般的 $f_{t,\alpha}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}J_1=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}J_3=0$，我们得到

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}\,\lambda_0^{-1}J_0.$$

因此，由(12)，我们即得(11)并且证明了等价的公式(10)．

命题 3

$$\int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda)d\lambda=1, \tag{14}$$

$$f_{t+s,\alpha}(\lambda)=\int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)f_{s,\alpha}(\mu)d\mu. \tag{15}$$

证明 由于函数 $f_{t,\alpha}(\lambda)$ 是非负的，根据 Lebesgue-Fatou 引理和(7)式，我们有

$$\int_0^\infty \lim_{a\downarrow 0}(e^{-\lambda a}f_{t,\alpha}(\lambda))d\lambda\leqq \lim_{a\downarrow 0} e^{-ta\alpha}=1.$$

于是 $f_{t,\alpha}(\lambda)$ 关于 λ 在 $(0,\infty)$ 可积，从而再次应用 Lebesgue-Fatou 引理和(7)式，我们便得(14).
由(7)，我们还有

$$\int e^{-\lambda\alpha}\left\{\int f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)f_{s,\alpha}(\mu)d\mu\right\}d\lambda=\int e^{-(\lambda-\mu)a}f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)d(\lambda-\mu)\cdot\int e^{-\mu a}f_{s,\alpha}(\mu)d\mu$$

$$=e^{-ta^\alpha}e^{-sa^\alpha}=e^{-(t+s)a^\alpha}=\int e^{-\lambda a}f_{t+s,\alpha}(\lambda)d\lambda,\quad a>0.$$

因此，像前节一样应用逆 Laplace 变换，我们便得(15).

命题 4 我们有

$$\int_0^\infty \partial f_{t,\alpha}(\lambda)/\partial t\cdot d\lambda=0,\ t>0. \tag{16}$$

证明 将(1)中的积分路径变为 $re^{-i\theta}(-\infty<-r<0)$ 和 $re^{i\theta}(0<r<\infty)$ 两部分的并，这里 $\pi/2\leqq\theta\leqq\pi$，我们得到

$$f_{t,\alpha}(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(sr\cdot\cos\theta-tr^\alpha\cos\alpha\theta)\cdot\sin(sr\cdot\sin\theta-tr^\alpha\sin\alpha\theta+\theta)dr. \tag{17}$$

类似地，在

$$\partial f_{t,\alpha}(\lambda)/\partial t=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{z\lambda-z^\alpha t}(-z^\alpha)dz$$

中将积分路径变为 $re^{-i\theta}(-\infty<-r<0)$ 和 $re^{i\theta}(0<r<\infty)$ 两部分的并，我们得到

$$f'_{t,\alpha}(s)=\partial f_{t,\alpha}(s)/\partial t=\frac{(-1)}{\pi}\int_0^\infty \exp(sr\cdot\cos\theta-tr^\alpha\cos\alpha\theta)$$
$$\times\sin(sr\cdot\sin\theta-tr^\alpha\sin\alpha\theta+\alpha\theta+\theta)r^\alpha dr. \tag{18}$$

若取

$$\theta=\theta_\alpha=\pi/(1+\alpha),$$

则

$$f'_{t,\alpha}(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp((sr+tr^\alpha)\cos\theta_\alpha)\cdot\sin((rs-tr^\alpha)\sin\theta_\alpha)r^\alpha dr. \tag{19}$$

于是利用因子 $r^\alpha(0<\alpha<1)$ 我们看出，$f'_{t,\alpha}(s)$ 关于 s 在 $(0,\infty)$ 可积．因此，将(14)对 t 微分，我们即得(16).

我们现在可以证明

定理 1 $\{\hat{T}_t\}$ 是解析半群.

证明 由于(2)和(15) $\{\hat{T}_t\}$具有半群性质 $\hat{T}_t\hat{T}_s=\hat{T}_{t+s}(t, s>0)$是显然的. 利用(2)以及具有 $\theta=\theta_\alpha$ 的(17)式, 我们有

$$\hat{T}_t x=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty T_s x ds\int_0^\infty \exp((sr+tr^\alpha)\cos\theta_\alpha)$$
$$\times\sin((rs-tr^\alpha)\sin\theta_\alpha+\theta_\alpha)dr, \tag{20}$$

作变量代换

$$s=vt^{1/\alpha},\quad r=ut^{-1/\alpha}, \tag{21}$$

这就给出

$$\hat{T}_t x=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty T_{vt^{1/\alpha}}\cdot x dv\int_0^\infty \exp((uv+u^\alpha)\cos\theta_\alpha)$$
$$\times\sin((uv-u^\alpha)\sin\theta_\alpha+\theta_\alpha)du. \tag{20'}$$

右边的第二个积分恰好是 $\pi\cdot f_{1,\alpha}(v)$, 因此, 根据$\{\|T_t x\|\}$对于 $t\geqq 0$ 的一致有界性, 由(14), 我们得出

$$\|\hat{T}_t x\|\leqq\sup_{t\geq 0}\|T_t x\|\int_0^\infty f_{1,\alpha}(v)dv=\sup_{t\geq 0}\|T_t x\|. \tag{22}$$

因 $f_{1,\alpha}(v)$在$[0,\infty)$可积, 故可以在(20')中取极限 $t\downarrow 0$, 由(14), 我们就得

$$s\text{-}\lim_{t\downarrow 0}\hat{T}_t x=\int_0^\infty f_{1,\alpha}(v)dv\cdot x=x.$$

因此$\{\hat{T}_t\}$是使得(22)成立的等度连续(C_0)类半群.

由 $f'_{t,\alpha}(s)=\partial f_{t,\alpha}(s)/\partial t$ 在$[0,\infty)$的可积性和$\{T_t\}$ 的等度连续性, 在积分号下关于 t 微分(2), 我们得到

$$\hat{T}'_t x=\int_0^\infty f'_{t,\alpha}(s)T_s x ds$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty T_s x ds\int_0^\infty \exp((sr+tr^\alpha)\cos\theta_\alpha)\cdot\sin((rs-tr^\alpha)\sin\theta_\alpha)r^\alpha dr, \tag{23}$$

作变量代换(21), 它就

$$=\int_0^\infty (T_{vt^{1/\alpha}}\cdot x)\cdot f'_{1,\alpha}(v)dv\cdot t^{-1}$$

于是, 由 $f'_{1,\alpha}(v)$在$[0,\infty)$的可积性和$\{T_t\}$对于 $t\geqq 0$ 的等度连续性, 我们得知

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\|t\hat{T}'_t\|<\infty,$$

即$\{\hat{T}_t\}$是解析半群.

定理 2 $\hat{T}_t$ 的无穷小生成元 $\hat{A}_\alpha$ 同 T_t 的无穷小生成元 A 是由(3)相联系的, 这里 $(-A)^\alpha$ 是由(4)并且亦由(5)定义. 此外, 我们有(6).

证明 由(16)和(23), 我们得到

$$\hat{T}'_t x=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (T_s-I)x ds\int_0^\infty \exp((rs+tr^\alpha)\cos\theta_\alpha)$$
$$\times\sin((sr-tr^\alpha)\sin\theta_\alpha)r^\alpha dr, \tag{24}$$

如果$x\in D(A)$，则 $s\text{-}\lim_{s\downarrow 0} s^{-1}(T_s-I)x=Ax$ 且$\|(T_s-I)\cdot x\|$关于 $s\geqq 0$ 有界. 于是，在 (24) 中让 $t\downarrow 0$，我们得到

$$s\text{-}\lim_{t\downarrow 0}\hat{T}'_t x=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty (T_s-I)x\,ds\int_0^\infty \exp(sr\cdot\cos\theta_\alpha)\cdot\sin(sr\cdot\sin\theta_\alpha)r^\alpha dr$$
$$=(-\Gamma(-\alpha))^{-1}\int_0^\infty s^{-\alpha-1}(T_s-I)x\,ds.$$

因为，由Γ函数的公式

$$\Gamma(z)=c^z\int_0^\infty e^{-cr}r^{z-1}dr \quad (Re(z)>0, Re(c)>0) \tag{25}$$

和

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z, \tag{26}$$

利用$(\alpha+1)\theta_\alpha=\pi$，我们得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(sr\cdot\cos\theta_\alpha)\cdot\sin(sr\cdot\sin\theta_\alpha)r^\alpha dr=(\pi i)^{-1}Im\left\{\int_0^\infty e^{-r(-se^{i\theta_\alpha})}r^\alpha dr\right\}$$
$$=(\pi i)^{-1}I_m((-se^{i\theta_\alpha})^{-\alpha-1})\Gamma(1+\alpha)=s^{-\alpha-1}\pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\Gamma(1+\alpha)$$
$$=s^{-\alpha-1}\frac{-\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}=(-\Gamma(-\alpha))^{-1}s^{-\alpha-1}.$$

于是，利用 $\hat{T}'_t x=\hat{A}_\alpha\hat{T}_t x$（当 $t>0$ 时），$\hat{T}_t x$ 在 $t=0$ 的连续性以及无穷小生成元 $\hat{A}_\alpha$ 的封闭性，我们得到

$$\hat{A}_\alpha x=(-\Gamma(-\alpha))^{-1}\int_0^\infty s^{-\alpha-1}(T_s-I)x\,ds \quad \text{当 } x\in D(A)\text{时}.$$

因此，由(25)，(26)和$(tI-A)^{-1}=\int_0^\infty e^{-ts}T_s ds$，便得

$$\hat{A}_\alpha x=\Gamma(-\alpha)^{-1}\Gamma(1+\alpha)^{-1}\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt\right\}(I-T_s)x\,ds$$
$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha((tI-A)^{-1}-t^{-1}I)x\,dt$$
$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(tI-A)^{-1}Ax\,dt \quad \text{对于 } x\in D(A).$$

最后，由在(17)中取 $\theta=\pi$ 以及(2)，我们有

$$(\mu I-\hat{A}_\alpha)^{-1}=\int_0^\infty e^{-\mu t}\hat{T}_t\,dt$$
$$=\pi^{-1}\int_0^\infty dr\int_0^\infty e^{-sr}T_s ds\int_0^\infty \exp(-\mu t-tr^\alpha\cos\alpha\pi)\cdot\sin(tr^\alpha\sin\alpha\pi)\,dt$$
$$=\pi^{-1}\int_0^\infty (rI-A)^{-1}\left\{\int_0^\infty \exp(-\mu t-tr^\alpha\cos\alpha\pi)\cdot\sin(tr^\alpha\sin\alpha\pi)\,dt\right\}dr$$
$$=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty (rI-A)^{-1}\frac{r^\alpha}{\mu^2-2r^\alpha\mu\cos\alpha\pi+r^{2\alpha}}dr.$$

注 公式(2)是 S. Bochner[2]发现的但未详细证明，请参看 R. S. Phillips[5]，$\hat{T}_t$ 是解析

半群为 K. Yosida[8], V. Balakrishnan[1]和 T. Kato[2]所证明. 公式(4) 和(5) 属于 V. Balakrishnan[1], 借助于(4), 他定义出满足条件:

$$\text{预解式 } R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} \text{ 对于 } Re(\lambda) > 0 \text{ 存在}$$

$$\text{且} \sup_{Re(\lambda)>0} |Re(\lambda)| \cdot \|R(\lambda; A)\| < \infty \tag{27}$$

的闭线性算子 A 的分数幂$(-A)^\alpha$. 他还证明$(-A)^\alpha$具有分数幂所要求的性质. 事实上我们有

定理 3 设闭线性算子 A 满足条件(27). 则由(4), 线性算子$(-A)^\alpha$有定义且有

$$(-A)^\alpha(-A)^\beta x = (-A)^{\alpha+\beta} x \tag{28}$$

$$\text{如果 } x \in D(A^2) \text{ 和 } 0 < \alpha, \beta \text{ 以及 } \alpha + \beta < 1,$$

$$s\text{-}\lim_{\alpha \uparrow 1} (-A)^\alpha x = -Ax \quad \text{如果 } x \in D(A), \tag{29}$$

$$s\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} (-A)^\alpha x = x \quad \text{如果 } s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda R(\lambda; A) x = 0, \tag{30}$$

并且如果 A 是等度连续(C_0)类半群 T_t 的无穷小生成元, 则

$$(A_\alpha)_\beta = A_{\alpha\beta}, \text{ 这里 } A_\alpha \text{ 是通过 Kato 公式(6)定义的算子 } \hat{A}_\alpha. \tag{31}$$

注 最后的公式(31)属于 J. Watanabe[1].

证明 由(27), 当 $r \uparrow \infty$ 时$\|r^{\alpha-1}(rI-A)^{-1}(-Ax)\|$是 $0(r^{\alpha-2})$阶的, 而且由$(rI-A)^{-1}(-Ax) = x - r(rI-A)^{-1}x$ 和(27), 当 $r \downarrow 0$ 时它是 $O(r^{\alpha-1})$阶的. 于是(4)的右端是收敛的.

很明显, $x \in D(A^2)$蕴涵$(-A)^\beta x \in D(A)$. 因为, 以 Riemann 和逼近积分并利用 A 的封闭性, 即有$(-A)^\beta x \in D(A)$. 我们于是可以定义$(-A)^\alpha(-A)^\beta x$.

当积分域分割成为 $\lambda \geqq \mu$ 和 $\lambda < \mu$ 这两部分时

$$(-A)^\alpha(-A)^\beta x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\sin \beta\pi}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{\beta-1} \mu^{\alpha-1} R(\lambda; A) R(\mu; A) A^2 x \, d\lambda \, d\mu$$

可以写成

$$\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\sin \beta\pi}{\pi} \int_0^1 (\sigma^{\beta-1} + \sigma^{\alpha-1}) d\sigma \int_0^\infty \lambda^{\alpha+\beta-1} R(\lambda\sigma; A) R(\lambda; A) A^2 x \, d\lambda.$$

由预解方程 $R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A)$ 以及 $R(\lambda; A)(-A) = I - \lambda R(\lambda; A)$ 在 $D(A)$上成立, 我们得到

$$R(\lambda\sigma; A) R(\lambda; A) A^2 x = (1-\sigma)^{-1} \{-\sigma R(\lambda\sigma; A) + R(\lambda; A)\}(-Ax),$$

所以

$$\begin{aligned} (-A)^\alpha(-A)^\beta x &= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\sin \beta\pi}{\pi} s\text{-}\lim_{t \uparrow 1} \int_0^t (\sigma^{\beta-1} + \sigma^{\alpha-1})(1-\sigma)^{-1} d\sigma \\ &\quad \times \int_0^\infty \lambda^{\alpha+\beta-1} (-\sigma R(\lambda\sigma; A) + R(\lambda; A))(-Ax) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\sin \beta\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{\sigma^{\beta-1} + \sigma^{\alpha-1} - \sigma^{-\alpha} - \sigma^{-\beta}}{1-\sigma} d\sigma \right) \\ &\quad \times \lambda^{\alpha+\beta-1} R(\lambda; A)(-Ax) d\lambda. \end{aligned}$$

上面的系数( )经计算为 $\pi^{-1} \sin \pi(\alpha+\beta)$, 当把$(1-\sigma)^{-1}$展开成为$\sigma$的幂级数时就可看出. 于

是我们证明了(28).

为了证明(29), 我们要利用$\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(1+\lambda)^{-1}d\lambda=\pi/\sin\alpha\pi$. 于是

$$(-A)^\alpha x-(-A)x=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}\left(R(\lambda;A)-\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)(-Ax)d\lambda.$$

我们将积分分为两部分, 一部分从 0 到 C, 另一部分从 C 到 ∞. 对于固定的 C, 当 $\alpha\uparrow 1$ 时第一部分趋向于零, 因为 $R(\lambda;A)(-Ax)=x-\lambda R(\lambda;A)x$ 对于 $\lambda>0$ 是有界的. 第二部分按范数是

$$\leq\frac{\sin\alpha\pi}{\pi(1-\alpha)}C^{\alpha-1}\sup_{\lambda\geq C}\left\|\left(\lambda R(\lambda;A)-\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)Ax\right\|.$$

由 $x-\lambda R(\lambda;A)x=R(\lambda;A)(-Ax)$ 和(27), 我们有 $s\text{-}\lim\limits_{\lambda\uparrow\infty}\lambda R(\lambda;A)x=x$. 因此第二部分的 $s\text{-}\lim\limits_{\alpha\uparrow 1}$ 任意接近于 0 如果我们取 C 充分地大. 这就证明了(29).

为了证明(30), 我们将积分分为两部分, 其一从 0 到 C 而另外的从 C 到 ∞. 由于(27), 当 $\alpha\downarrow 0$ 时第二部分趋向于 0. 根据 $R(\lambda;A)(-Ax)=x-\lambda R(\lambda;A)x$ 和假设 $s\text{-}\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\lambda R(\lambda;A)x=0$, 对于充分小的 C, 第一部分任意接近于$(\alpha\pi)^{-1}\sin\alpha\pi\cdot C^\alpha x$, 而当 $\alpha\downarrow 0$ 时这又趋向于 x. 这就证明了(30).

我们来证明(31). 由于表达式(6), 我们得到

$$(\mu I-(A_\alpha)_\beta)^{-1}=\int_0^\infty\int_0^\infty(2\pi i)^{-2}\left(\frac{1}{\mu-\lambda^\beta\cdot e^{-i\pi\beta}}-\frac{1}{\mu-\lambda^\beta\cdot e^{i\pi\beta}}\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{\lambda-\xi^\alpha\cdot e^{-i\pi\alpha}}-\frac{1}{\lambda-\xi^\alpha\cdot e^{i\pi\alpha}}\right)(\xi I-A)^{-1}d\lambda d\xi.$$

这个二重积分按范数绝对收敛, 从而我们可以交换积分次序. 因此便得(31), 因为内层的积分是

$$=(2\pi i)^{-2}\int_C\frac{-1}{\mu-z^\beta}\left(\frac{1}{z-\xi^\alpha e^{-i\pi\alpha}}-\frac{1}{z-\xi^\alpha e^{i\pi\alpha}}\right)dz=(2\pi i)^{-1}\left(\frac{-1}{\mu-\xi^{\alpha\beta}e^{-i\pi\alpha\beta}}-\frac{-1}{\mu-\xi^{\alpha\beta}e^{i\pi\alpha\beta}}\right)$$

这里积分路径 C 是从 $\infty e^{i\pi}$ 变到 0 并从 0 变到 $\infty e^{-i\pi}$.

分数幂的一个例子 如果 $\alpha=\frac{1}{2}$, 在(17)中取 $\theta=\pi$. 则我们有

$$f_{t,1/2}(s)=\pi^{-1}\int_0^\infty e^{-sr}\sin(tr^{1/2})dr=\pi^{-1}\sqrt{\pi}\,t(2^3\sqrt{s})^{-3}e^{-t^2/4s}. \tag{32}$$

于是, 若我们取与高斯核相联系的半群$\{T_t\}$:

$$(T_t x)(u)=\frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\int_{-\infty}^\infty e^{-(u-v)^2/4s}x(v)dv,\ x\in C(-\infty,\infty),$$

则

$$(\hat{T}_{t,1/2}x)(u)=\int_{-\infty}^\infty\left\{\int_0^\infty x(v)\frac{t}{4\pi s^2}e^{-((u-v)^2+t^2)/4s}ds\right\}dv=\frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{t^2+(u-v)^2}x(v)dv,$$

即半群$\{\hat{T}_t\}$是同 Poisson 核相联系的. 在这种情况下, T_t 的无穷小生成元 A 是由微分算子$\frac{d^2}{ds^2}$给出的, 可是 $\hat{T}_t$ 的无穷小生成元 $\hat{A}$ 是由奇异积分算子

$$(\hat{A}_{1/2}x)(s)=s\text{-}\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(s-v)-x(s)}{v^2+h^2}dv,$$

而不是由微分算子 d/ds 给出. 另外的例子, 请参看 K. Yosida [30]

§ 12. 半群的收敛性. Trotter-Kato 定理

我们用 $\exp(tA)$ 表示具无穷小生成元 A 的 (C_0) 类半群. 关于半群的收敛性, 我们有

定理 1 设 X 是局部凸序列完备复线性空间. 设 $\{\exp(tA_n)\}\subseteq L(X, X)$ 是等度连续 (C_0) 类半群序列, 且使得算子族 $\{\exp(tA_n)\}$ 关于 $t\geqq 0$ 和关于 $n=1, 2, \cdots$ 等度连续. 这即是假设, 对于 X 的任何连续半范数 $p(x)$, 存在 X 的连续半范数 $q(x)$ 使得

$$\begin{cases}p(\exp(tA_n)x)\leqq q(x) \quad \text{对于一切 } t\geqq 0, x\in X \text{ 和} \\ \qquad\qquad n=1, 2, \cdots \text{成立.}\end{cases} \tag{1}$$

假设对于某一合于 $Re(\lambda_0)>0$ 的 λ_0

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} R(\lambda_0; A_n)x=J(\lambda_0)x \quad \text{对于一切 } x\in X \text{ 存在} \\ \text{且使得值域 } R(J(\lambda_0)) \text{ 在 } X \text{ 中稠密.}\end{cases} \tag{2}$$

则 $J(\lambda_0)$ 是 X 中的等度连续 (C_0) 类半群 $\exp(tA)$ 的无穷小生成元 A 的预解式而且

$$\lim_{n\to\infty}\exp(tA_n)x=\exp(tA)x \quad \text{对于每一 } x\in X \text{ 成立.} \tag{3}$$

此外, (3) 中的收敛性在 t 的每一紧区间上关于 t 是一致的.

为了证明定理, 我们先证一个

引理 设 $T_t=\exp(tA)$ 是 X 中的等度连续 (C_0) 类半群, 则对于 X 的任何连续半范数 $p(x)$, 存在 X 的连续半范数 $q(x)$ 使得

$$\begin{cases}p(T_tx-(I-tn^{-1}A)^{-n}x)\leqq(2n)^{-1}t^2q(A^2x)\ (n=1, 2, \cdots) \\ \qquad\qquad \text{只要 } x\in D(A^2).\end{cases} \tag{4}$$

证明 令 $T(t, n)=(I-n^{-1}tA)^{-n}$. 那么我们知道 (第九章 § 7) $\{T(t, n)\}$ 关于 $t\geqq 0$ 及 $n=1, 2, \cdots$ 为等度连续. 此外, 对于任何 $x\in D(A)$, 有 (第九章 § 4)

$$D_t(T(t, n))=(I-n^{-1}tA)^{-n-1}Ax=A(I-n^{-1}tA)^{-n-1}x,$$

$$D_tT_tx=T_tAx=AT_tx.$$

于是, 由于 T_t 和 $T(t, n)$ 可交换, 有

$$\begin{aligned}T_tx-T(t, n)x&=\int_0^t[D_sT(t-s, n)T_sx]ds\\&=\int_0^t T(t-s, n)T_s\left(Ax-\left(I-\frac{t-s}{n}A\right)^{-1}Ax\right)ds, x\in D(A).\end{aligned} \tag{5}$$

因此, 如果 $x\in D(A^2)$, 由 $(I-m^{-1}A)^{-1}Ax=-m(I-(I-m^{-1}A)^{-1})x$, 我们有

$$p(T_tx-T(t, n)x)\leqq\int_0^t p\left[T(t-s, n)T_s(I-n^{-1}(t-s)A)^{-1}\frac{t-s}{n}A^2x\right]ds,$$

于是, 由 $T(t, n)$ 和 T_t 的等度连续性, 存在 X 上的连续半范数 $q(x)$, 它与 x, t 和 n 无关, 使得

$$p(T_tx-T(t, n)x)\leqq(2n)^{-1}t^2q(A^2x).$$

系 对于任意 $x\in D(A^2)$, $s>0$ 和 $t\geqq 0$

$$\begin{cases} p(T_t x-(I-sA)^{-[t/s]}x)\leqq sq_1(Ax)+\dfrac{ts}{2}q(A^2x),\ \text{这里}\ q_1(x)\ \text{是}\ X\ \text{上的连续半} \\ \text{范数它不依赖于}\ x,t\ \text{和}\ s,\ \text{而}[t/s]\ \text{是}\leqq t/s\ \text{的最大整数.} \end{cases} \tag{6}$$

证明 对于 $t=ns$, 我们有

$$p(T_{ns}x-(I-sA)^{-n}x)\leqq 2^{-1}stq(A^2x).$$

若 $t=ns+u$, 其中 $0\leqq u<s$ 以及 $n=[t/s]$, 则

$$p(T_t x-T_{ns}x)=p\left(\int_{ns}^t T'_\sigma x\,d\sigma\right)\leqq\int_{ns}^t p(T_\sigma Ax)d\sigma\leqq sq_1(Ax).$$

定理 1 的证明 根据(1)和第九章§4 的(11), 我们得知$\{(Re(\lambda)R(\lambda;A_n)^m)\}$ 对于 $Re(\lambda)>0$, $n=1,2,\cdots$ 和 $m=0,1,2,\cdots$ 等度连续. 由此并利用(2), 我们可以证明 $J(\lambda_0)=(\lambda_0I-A)^{-1}$ 关于某一 A 成立并且只要 $Re(\lambda)>0$ 就有

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}R(\lambda;A_n)x=R(\lambda;A)x,\ \text{且其收敛性在右半平面}\ Re(\lambda)>0\ \text{的每一紧子集上} \\ \text{关于}\ \lambda\ \text{是一致的.} \end{cases} \tag{7}$$

为此, 我们考查

$$R(\lambda;A_n)=\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^m R(\lambda_0;A_n)^{m+1}x\quad(\text{对于}\ |\lambda-\lambda_0|/Re(\lambda_0)<1)$$

而且由于$\{(Re(\lambda_0)R(\lambda_0;A_n))^m\}$关于 $n=1,2,\cdots$ 和 $m=0,1,2,\cdots$ 等度连续, 这级数对于$|\lambda-\lambda_0|/Re(\lambda_0)\leqq 1-\varepsilon$ 和 $n=1,2,\cdots$ 一致收敛, 这里 ε 是固定的正数. 因而, 对于任何 $\delta>0$, 存在 m_0 和 X 上的连续半范数 $q(x)$ 使得对于$|\lambda-\lambda_0|/Re(\lambda_0)\leqq 1-\varepsilon$, 有

$$p(R(\lambda;A_n)x-R(\lambda;A'_n)x)\leqq\sum_{m=0}^{m_0}|\lambda_0-\lambda|^m$$

$$\times p(R(\lambda_0;A_n)^{m_0+1}x-R(\lambda_0;A_{n'})^{m_0+1}x)+2\delta q(x)\quad\text{对一切}\ x\in X\ \text{成立.}$$

所以, 由(2), 我们便知 $\lim\limits_{n\to\infty}R(\lambda;A_n)x=J(\lambda)x$ 对于$|\lambda-\lambda_0|/Re(\lambda_0)\leqq 1-\varepsilon$ 一致存在. 用这种方法扩张序列$\{R(\lambda;A_n)\}$的收敛域, 我们即知

$\lim\limits_{n\to\infty}R(\lambda;A)x=J(\lambda)x$ 存在且其收敛性在右半平面 $Re(\lambda)>0$ 中的 λ 的任何紧集上是一致的.

于是 $J(\lambda)$ 是伪预解式, 因为 $J(\lambda)$ 同 $R(\lambda;A_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 一样满足预解方程. 然而, 由 $R(J(\lambda_0))^a=X$ 和第八章§4 中关于人为预解式的遍历定理, 便知 $J(\lambda)$ 是某一闭线性算子 A 的预解式, 它使得 $J(\lambda)=R(\lambda;A)$ 和 $D(A)=R(R(\lambda;A))$ 在 X 中稠密.

于是我们看出 $\exp(tA)$ 是 X 中的等度连续(C_0)类半群. 我们要证明(3)成立. 但由(6), 有

$$p((\exp(tA_n)-(I-sA_n)^{-[t/s]})(I-A_n)^{-2}x)$$
$$\leqq sq_1(A_n(I-A_n)^{-2}x)+2^{-1}tsq(A_n^2(I-A_n)^{-2}x),$$

对于任意 $x\in X$, $s>0$ 和 $t\geqq 0$ 成立.

算子

$$A_n(I-A_n)^{-1}=(I-A_n)^{-1}-I,\ A_n(I-A)^{-2}=A_n(I-A_n)^{-1}(I-A_n)^{-1}$$
$$\text{以及 } A_n^2(I-A_n)^{-2}=(A_n(I-A_n)^{-1})^2$$

关于 $n=1, 2, \cdots$ 是等度连续的. 另一方面, 由(7)

$$\lim_{n\to\infty}(I-sA_n)^{-[t/s]}(I-A_n)^{-2}x=(I-sA)^{-[t/s]}(I-A)^{-2}x$$

关于 s 和 t 是一致的, 如果 $s>0$ 在任意给定的两个正数之间, 而且 t 在 $[0, \infty)$ 的紧区间上变化. 此外, 由(6), 有

$$p((\exp(tA)-(I-sA)^{-[t/s]})(I-A)^{-2}x)\leqq sq_1(A(I-A)^{-2}x)+2^{-1}tsq(A^2(I-A)^{-2}x)$$

对于每一 $x\in X$, $s>0$ 和 $t\geqq 0$ 成立. 于是, 取 $s>0$ 充分小, 我们得知

$$\lim_{n\to\infty}\exp(tA_n)y=\exp(tA)y \quad \text{对于任何 } y\in R(1;A)^2\cdot X \text{ 成立},$$

而其收敛性在 t 的每一紧区间上关于 t 是一致的. 由于 $R(1;A)^2\cdot X$ 在 X 中稠密, 利用 $\exp(tA)$ 和 $\exp(tA_n)$ 关于 $t\geqq 0$ 和 $n=1, 2, \cdots$ 的等度连续性, 便知(3)成立.

定理 2 设 X 中的等度连续 (C_0) 类半群序列 $\{\exp(tA_n)\}$ 使得 $\{\exp(tA_n)\}$ 关于 $t\geqq 0$ 和 $n=1, 2, \cdots$ 等度连续. 如果对于每一 $x\in X$

$$\lim_{n\to\infty}\exp(tA_n)x=\exp(tA)x$$

在 t 的每一紧区间上关于 t 是一致的, 则对于每一 $x\in X$ 和 $Re(\lambda)>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}R(\lambda;A_n)x=R(\lambda;A)x$, 且其收敛性在右半平面 $Re(\lambda)>0$ 中的 λ 的每一紧集合上是一致的.

证明 我们有

$$R(\lambda;A)x-R(\lambda;A_n)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\exp(tA)-\exp(tA_n))x\,dt.$$

因此, 如将积分分为两部分, 其一从 0 到 C 而另外的从 C 到 ∞, 我们即得结果.

注 对于 Banach 空间 X 的情况, 定理 1 首先由 H. F. Trotter[1] 证明. 但在这篇文章中, 关于 $J(\lambda)$ 是预解式 $R(\lambda;A)$ 的证明是有些不清楚的. 这是 T. Kato 指出的. 上面给出的证明是在 Kato 对于 Trotter 证明的改进的基础上改写的.

§ 13. 对偶半群. Phillips 定理

设 X 是局部凸序列完备线性拓扑空间, 而 $\{T_t;\ t\geqq 0\}\subseteq L(X, X)$ 是等度连续 (C_0) 类半群. 则 $L(X', X')$ 中的算子族 $(T_t^*;\ t\geqq 0\}$ 满足半群性质: $T_t^*T_s^*=T_{t+s}^*$, $T_0^*=I^*=X_s'$ 中的恒等算子(参看第七章 §1 定理 3), 这里 $(*)$ 在这一节表示对偶运算. 然而, 一般地, 它不是 (C_0) 类的. 因为映射 $T_t\to T_t^*$ 不一定保持关于 t 的连续性(参看第七章 §1 命题 1). 但是我们可以证明 $\{T_t^*\}$ 关于 $t\geqq 0$ 是等度连续的. 因为我们可以证明

命题 1 如果 $\{S_t;\ t\geqq 0\}\subseteq L(X, X)$ 关于 t 是等度连续的, 则 $\{S_t^*;\ t\geqq 0\}\subseteq L(X', X')$ 关于 t 也是等度连续的.

证明 对于 X 中的任何有界集 B, 由假设, 集合 $\bigcup\limits_{t\geq 0}S_t\cdot B$ 是 X 中的有界集. 设 U' 和 V' 是 B 和 $\bigcup\limits_{t\geq 0}S_t\cdot B$ 的极集合: $U'=\{x'\in X';\ \sup\limits_{b\in B}|\langle b, x'\rangle|\leqq 1\}$, $V'=\{x'\in X';\ \sup\limits_{b\in B, t\geq 0}|\langle S_t\cdot b, x'\rangle|\leqq$

1}. 则(参看第四章§7)U' 和 V' 都是 X'_s 中的 0 的邻域. 从

$$|\langle S_t\cdot b, x'\rangle| = |\langle b, S_t^* x'\rangle| \leq 1 \quad (\text{当 } b\in B, x'\in V' \text{ 时})$$

我们看出对于一切 $t\geq 0$, $S_t^*\cdot V'\subseteq U'$. 这就证明$\{S_t^*\}$关于 $t\geq 0$ 是等度连续的.

设 A 是半群 T_t 的无穷小生成元. 则 $D(A)^a=X$, $R(A)\subseteq X$, 而且对于 $\lambda>0$ 预解式 $(\lambda I-A)^{-1}\in L(X,X)$ 存在且使得

$$\{\lambda^m(\lambda I-A)^{-m}\}\text{关于 } \lambda>0 \text{ 和关于 } m=0,1,2,\cdots\text{等度连续.} \tag{1}$$

我们可以证明(参看第八章§6定理2)

命题 2 对于 $\lambda>0$, 预解式$(\lambda I^*-A^*)^{-1}$存在且

$$(\lambda I^*-A^*)^{-1}=((\lambda I-A)^{-1})^*. \tag{2}$$

证明 我们有 $(\lambda I-A)^*=\lambda I^*-A^*$. 因为$(\lambda I-A)^{-1}\in L(X,X)$, 故算子 $((\lambda I-A)^{-1})^*\in L(X',X')$存在. 我们将证明$(\lambda I^*-A^*)^{-1}$存在而且等于$((\lambda I-A)^{-1})^*$. 假设存在 $x'\in X'$ 使得 $(\lambda I^*-A^*)x'=0$. 则 $0=\langle x,(\lambda I^*-A^*)x'\rangle=\langle(\lambda I-A)x,x'\rangle$ 对于一切 $x\in D(A)$ 成立. 但是, 因为 $R(\lambda I-A)=X$, 所以必有 $x'=0$. 因此逆$(\lambda I^*-A^*)^{-1}$必存在. 对于 $x\in X$, $x'\in D(A^*)$, 我们有

$$\langle x,x'\rangle=\langle(\lambda I-A)(\lambda I-A)^{-1}x,x'\rangle=\langle(\lambda I-A)^{-1}x,(\lambda I^*-A^*)x\rangle.$$

于是 $D(((\lambda I-A)^{-1})^*)\supseteq R(\lambda I^*-A^*)$并且对于每一 $x'\in D(A^*)$, $((\lambda I-A)^{-1})^*\cdot(\lambda I^*-A^*)x'=x'$. 这就证明了$((\lambda I-A)^{-1})^*\supseteq(\lambda I^*-A^*)^{-1}$. 另一方面, 如果 $x\in D(A)$ 和 $x'\in D(((\lambda I-A)^{-1})^*)$, 则

$$\langle x,x'\rangle=\langle(\lambda I-A)^{-1}(\lambda I-A)x,x'\rangle=\langle(\lambda I-A)x,((\lambda I-A)^{-1})^*x'\rangle.$$

这就证明 $D(A^*)=D((\lambda I-A)^*)\supseteq R(((\lambda I-A)^{-1})^*)$ 以及 $(\lambda I-A)^*\cdot((\lambda I-A)^{-1})^*x'=x'$ 对于每一 $x'\in D(((\lambda I-A)^{-1})^*)$成立, 即$((\lambda I-A)^{-1})^*\subseteq(\lambda I^*-A^*)^{-1}$. 于是我们证明了(2).

我们现在即可证明

定理 设X是局部凸序列完备线性拓扑空间而且它的强对偶空间 X' 也是序列完备的. 设 $\{T_t\}\subseteq L(X,X)$, $t\geq 0$, 是其无穷小生成元为A的等度连续(C_0)类半群. 我们用X^+表示定义域 $D(A^*)$按 X' 中的强拓扑的闭包 $D(A^*)^a$. 设 T_t^+是 T_t^* 在 X^+上的限制. 则 $T_t^+\in L(X^+,X^+)$ 并且 $\{T_t^+;t\geq 0\}$是等度连续(C_0)类半群而它的无穷小生成元 A^+是其定义域和值域都在X^+中的 A^*的最大限制.

注 上面的定理是 R. S. Phillips[2]对于 B-空间X这一特殊情况证明的. 上面的推广属于 H. Komatsu[4].

定理的证明 我们有预解方程 $R(\lambda;A)-R(\mu;A)=(\mu-\lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A)$ 以及$\{\lambda^m R(\lambda;A)^m\}$对于 $\lambda>0$ 与 $m=0,1,2,\cdots$等度连续. 于是由命题 1 和 2, 有

$$(\lambda I^*-A^*)^{-1}-(\mu I^*-A^*)^{-1}=(\mu-\lambda)(\lambda I^*-A^*)^{-1}(\mu I^*-A^*)^{-1} \tag{3}$$

$$\{\lambda^m(\lambda I^*-A^*)^{-m}\}\text{对于 } \lambda>0 \text{ 和 } m=0,1,2,\cdots\text{等度连续.} \tag{4}$$

因此, 如果我们用 $J(\lambda)$表示$(\lambda I^*-A^*)^{-1}$ 对于 X^+ 的限制, 我们就有

$$J(\lambda)-J(\mu)=(\mu-\lambda)J(\lambda)J(\mu), \tag{3'}$$

$$\{\lambda^m J(\lambda)^m\}\text{对于 } \lambda>0 \text{ 和 } m=0,1,2,\cdots\text{等度连续.} \tag{4'}$$

根据 X' 的序列完备性和(4′)，如同第九章§7一样，我们便知 $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda J(\lambda)x=x$ 对于 $x\in X^+$ 成立.

于是我们有 $R(J(\lambda))^a=X^+$，因此由第八章§4中的(7′)，有 $N(J(\lambda))=\{0\}$. 于是伪预解式 $J(\lambda)$ 必是 X^+ 上的某一闭线性算子 A^+ 的预解式. 因而，根据 X^+ 的序列完备性和(4′)，A^+ 是等度连续 (C_0) 类算子半群 $T_t^+\in L(X^+, X^+)$ 的无穷小生成元. 对于任何 $x\in X$ 和 $y'\in X^+$，有

$$\langle (I-m^{-1}tA)^{-m}x, y'\rangle=\langle x, (I^*-m^{-1}tA^+)^{-m}y'\rangle,$$

因此，应用前节的结果，当 $m\to\infty$ 时我们便得等式 $\langle T_tx, y'\rangle=\langle x, T_t^+y'\rangle$. 从而 $T_t^*y'=T_t^+y'$，即 T_t^+ 是 T_t^* 对于 X^+ 的限制.

我们最后指出 A^+ 是其定义域和值域均在 X^+ 中的 A^* 的最大限制. 显然，由上面对于算子 A^+ 的推导，知 A^+ 是 A^* 的限制. 假设 $x'\in D(A^*)$ 和 $x'\in X^+$，$A^*x'\in X^+$. 则 $(\lambda I^*-A^*)x'\in X^+$，因此 $(\lambda I^*-A^+)^{-1}(\lambda I^*-A^*)x'=x'$. 于是，以 (λI^*-A^+) 从左作用于两边，我们便得 $A^*x'=A^+x'$. 这就证明了 A^+ 是其定义域及值域均在 X^+ 中的 A^* 的最大限制

第十章 紧 算 子

设 X, Y 都是 B-空间，又设 S 是 X 内的单位球. 一个算子 $T\in L(X, Y)$ 称为是**紧的**或**全连续的**，如果象 $T\cdot S$ 在 Y 内是相对紧的. 有关线性积分方程的 Fredholm 理论可以推广到带复参数 λ 的线性泛函方程 $Tx-\lambda x=y$ 上去，在这种意义下，对于一个紧算子 $T\in L(X, X)$ 的特征值问题可以讨论得相当完全. 这个结果通常称为 **Riesz-Schauder 理论**. 可参看 F. Riesz[2] 以及 J. Schauder[1].

§1. B-空间中的紧集

线性拓扑空间中的一个紧集必定有界. 然而，逆命题一般是不成立的；我们知道（第三章§2），赋范线性空间 X 的闭单位球是强紧的，当且仅当 X 是有限维的. 若 S 是一个紧的度量空间，又若 $C(S)$ 是 S 上的实值或复值连续函数 $x(s)$ 赋予范数 $\|x\|=\sup\limits_{s\in S}|x(s)|$ 后所成的 B-空间. 我们知道（第三章§3），$C(S)$ 的一个子集 $\{x_\alpha(s)\}$ 在 $C(S)$ 内是强相对紧的，当且仅当 $\{x_\alpha(s)\}$ 对 α 是等度有界和等度连续的. 对于 $L^p(S, \mathfrak{B}, m), 1\leqq p<\infty$, 空间的情形，我们有

定理 (Fréchet-Kolmogorov) 若 S 是实线，$\mathfrak{B}$ 是 S 的 Baire 子集 B 所成的 σ-环，且 $m(B)=\int_B dx$ 是子集 B 的通常的 Lebesgue 测度. 那末 $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$，$1\leqq p<\infty$，的一个子集 K 是强 pre-紧的，当且仅当 K 满足条件：

$$\sup_{x\in K}\|x\|=\sup_{x\in K}\left(\int_S|x(s)|^p ds\right)^{1/p}<\infty, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0}\int_S|x(t+s)-x(s)|^p ds=0 \quad \text{对 } x\in K \text{ 一致地成立}, \tag{2}$$

$$\lim_{\alpha\uparrow\infty}\int_{|s|>\alpha}|x(s)|^p ds=0 \quad \text{对 } x\in K \text{ 一致地成立}, \tag{3}$$

证明 若 K 是强相对紧的. 那末 K 是有界的，所以(1)式是成立的. 设给了 $\varepsilon>0$，便存在属于 L^p 的有限个函数：$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 使得对于每一个 $f\in K$，总存在一个 j 使 $\|f-f_j\|\leqq\varepsilon$ 成立. 否则，我们就有一无限序列 $\{f_j\}\subseteq K$，对于 $j\neq i$ 有 $\|f_j-f_i\|>\varepsilon$ 成立，这与 K 的相对紧性相矛盾. 因此，由 Lebesgue 积分的定义，我们能找到有限值的函数 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 使得 $\|f_j-g_j\|\leqq\varepsilon$ $(j=1, 2, \cdots, n)$. 因为每一个有限值的函数 $g_j(x)$ 在某个充分大的区间之外为零，所以，对于充分大的 α，我们有

$$\left(\int_\alpha^\infty+\int_{-\infty}^{-\alpha}|f(s)|^p ds\right)^{1/p}\leqq\left(\int_\alpha^\infty+\int_{-\infty}^{-\alpha}|f(s)-g_j(s)|^p ds\right)^{1/p}$$
$$+\left(\int_\alpha^\infty+\int_{-\infty}^{-\alpha}|g_j(s)|^p ds\right)^{1/p}\leqq\|f-g_j\|+\left(\int_\alpha^\infty+\int_{-\infty}^{-\alpha}|g_j(s)|^p ds\right)^{1/p}.$$

由$\|f-g_j\|\leq\|f-f_j\|+\|f_j-g_j\|\leq 2\varepsilon$. 便证明了(3)式.

(2)式的证明是根据这样的事实，即对于某个有限区间I上的特征函数$C_I(s)$，有$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|C_I(s+t)-C_I(s)|^p ds=0$成立（参看第0章§3）. 因此(2)式对于诸有限值函数$g_j(s)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$成立. 于是对于任意的$f\in K$，我们都有

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+t)-f(s)|^p ds\right)^{1/p}\leq\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+t)-f_j(s+t)|^p ds\right)^{1/p}$$

$$+\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_j(s+t)-g_j(s+t)|^p ds\right)^{1/p}+\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g_j(s+t)-g_j(s)|^p ds\right)^{1/p}$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g_j(s)-f_j(s)|^p ds\right)^{1/p}+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_j(s)-f(s)|^p ds\right)^{1/p}\leq\varepsilon+\varepsilon+0+\varepsilon+\varepsilon,$$

这只要取f_j使得$\|f-f_j\|\leq\varepsilon$即可. 这就证明了(2)式.

以下我们来证明定理条件的充分性. 我们用$(T_tf)(s)=f(t+s)$来定义平移算子T_t. 条件(2)是说: $s\text{-}\lim_{t\to 0} T_tf=f$对$f\in K$一致地成立. 其次，我们定义平均值$(M_af)(s)=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}(T_tf)(s)\,dt$. 那么由 Hölder 不等式和 Fubini-Tonelli 定理，如果$1\leq p<\infty$，就有

$$\|M_af-f\|\leq\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-a}^{a}(2a)^{-1}|f(s+t)-f(s)|\,dt\right\}^p ds\right)^{1/p}$$

$$\leq(2a)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}|f(s+t)-f(s)|^p dt\cdot(2a)^{p/p'}ds\right)^{1/p}$$

$$\leq\left((2a)^{-1}\int_{-a}^{a}dt\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+t)-f(s)|^p ds\right)^{1/p}\text{成立.}$$

因此我们有

$$\|M_af-f\|\leq\sup_{|t|\leq a}\|T_tf-f\|,$$

所以$s\text{-}\lim_{a\downarrow 0}M_af=f$对$f\in K$一致地成立. 为此我们必须证明对于一个充分小而固定的$a>0$，集合$\{M_af; f\in K\}$具有相对紧性.

对于一个固定的$a>0$，我们要证明函数集合$\{(M_af)(s); f\in K\}$是等度有界和等度连续的. 事实上，如上面那样，我们有

$$|(M_af)(s_1)-(M_af)(s_2)|\leq(2a)^{-1}\int_{-a}^{a}|f(s_1+t)-f(s_2+t)|\,dt$$

$$\leq\left((2a)^{-1}\int_{-a}^{a}|f(s_1+t)-f(s_2+t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

因此，由(2)我们证明了函数集合$\{M_af(s); f\in K\}$对于固定的$a>0$的等度连续性. 这个集合的等度有界性可类似地证明. 于是由 Ascoli-Arzelà 定理，对于任意的正数$\alpha>0$，都存在有限个函数$M_af_1, M_af_2, \cdots, M_af_n$其中$f_j\in K$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，使得对于任何的$f\in K$，都存在这样的j，使得$\sup_{|s|\leq\alpha}|(M_af)(s)-(M_af_j)(s)|\leq\varepsilon$成立. 所以有

$$\|M_af-M_af_j\|^p\leq\int_{-\alpha}^{\alpha}|(M_af)(s)-(M_af_j)(s)|^p ds$$

$$+\int_{|s|>\alpha}|(M_af)(s)-(M_af_j)(s)|^p ds. \tag{4}$$

由 Minkowski 不等式, 右边第二项小于

$$\left(\|M_af-f\|+\left(\int_{|s|>\alpha}|f(s)-f_j(s)|^p ds\right)^{1/p}+\left(\int_{|s|>\alpha}|f_j(s)-(M_af_j)(s)|^p ds\right)^{1/p}\right)^p.$$

对于充分小的 $a>0$, $\|M_af-f\|$这一项是小的, 又由于(3), 当 $a>0$ 有界时, 对于充分大的 $\alpha>0$, $\int_{|s|>\alpha}|f(s)-f_j(s)|^p ds$ 和$\int_{|s|>\alpha}|f_j(s)-(M_af_j)(s)|^p ds$ 两者都是小的. (4) 式右边第一项对于适当选择的 j 也是小于 $2\alpha\varepsilon^p$ 的. 这些估计式对于 $f\in K$ 是一致成立的. 因此我们证明了对于充分小的 $a>0$, 集合$\{M_af; f\in K\}$在 L^p 内的相对紧性.

§2. 紧算子和核算子

定义 1 若X和Y是 B-空间, 又设 S 是X的单位球. 一个算子 $T\in L(X, Y)$ 称为紧的或全连续的, 如果象 $T\cdot S$ 在Y内是相对紧的.

例 1 设 $K(x, y)$是定义在$-\infty<a\leqq a, b<\infty$ 上的实值或复值连续函数. 则由

$$(Kf)(x)=\int_a^b K(x, y)f(y)dy \tag{1}$$

所确定的积分算子K是属于 $L(C[a, b], C[a, b])$的一个紧算子.

证明 显然, K 把 $C[a, b]$ 映入 $C[a, b]$. 记 $\sup\limits_{x,y}|K(x, y)|=M$. 那么 $\|K\cdot f\|\leqq(b-a)M\|f\|$, 所以 $K\cdot S$ 是等度有界的. 由 Schwarz 不等式, 我们有

$$|(Kf)(x_1)-(Kf)(x_2)|^2\leqq\int_a^b|K(x_1, y)-K(x_2, y)|^2 dy\cdot\int_a^b|f(y)|^2dy,$$

因而 $K\cdot S$ 是等度连续的, 即

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{|x_1-x_2|\leqq\delta}|(Kf)(x_1)-(Kf)(x_2)|=0 \quad 对于 f\in S 一致地成立.$$

所以根据 Ascoli-Arzelà 定理(第三章 § 3)集合 $K\cdot S$ 在 $C[a, b]$内是相对紧的.

例 2 若 $K(x, y)$是测度空间$(S, \mathfrak{B}, m)$上的一个实或复值的 $\mathfrak{B}$-可测函数, 且使得

$$\int_S\int_S|K(x, y)|^2m(dx)m(dy)<\infty. \tag{2}$$

那末由核 $K(x, y)$所定义的积分算子:

$$(Kf)(x)=\int_S K(x, y)f(y)m(dy),\ f\in L^2(S)=L^2(S, \mathfrak{B}, m), \tag{3}$$

是属于 $L(L^2(S), L^2(S))$的一个紧算子. 满足条件(2)的核 $K(x, y)$称为 Hilbert-Schmidt 型的.

证明 从 $L^2(S)$ 的单位球中取任一序列 $\{f_n\}$. 我们必须证明序列 $\{K\cdot f_n\}$ 在 $L^2(S)$ 内是相对紧的. 因为 Hilbert 空间 $L^2(S)$ 是局部序列弱紧的, 我们可以假定 $\{f_n\}$ 弱收敛于属于 $L^2(S)$的一个元素 f; 否则, 我们选择一个适当的子序列. 由(2)和 Fubini-Tonelli 定理, 有

$\int_S |K(x, y)|^2 m(dy) < \infty$ 对于 m-a.e. x 成立. 于是对于这样的一个 x, 有

$$\lim_{n\to\infty}(Kf_n)(x) = \lim_{n\to\infty}\int_S K(x, y)f_n(y)m(dy) = \lim_{n\to\infty}(f_n(\cdot), \overline{K(x, \cdot)})$$

$$= (f(\cdot), \overline{K(x, \cdot)}) = \int_S K(x, y)f(y)m(dy).$$

另一方面, 由 Schwarz 不等式, 我们有

$$|(Kf_n)(x)|^2 \leqq \int_S |K(x, y)|^2 m(dy) \cdot \int_S |f_n(y)|^2 m(dy) \leqq \int_S |K(x, y)|^2 m(dy)$$

对于 m-a.e. x 成立. (4)

于是, 由 Lebesgue-Fatou 定理, $\lim_{n\to\infty}\int_S |(Kf_n)(x)|^2 m(dx) = \int_S |(Kf)(x)|^2 m(dx)$. 如果把这个结果与 $w\text{-}\lim_{n\to\infty} K\cdot f_n = K\cdot f$ 合在一起, 按第五章 § 1 定理 8 便导致 $s\text{-}\lim_{n\to\infty} K\cdot f_n = K\cdot f$. 如证明(4)一样, 我们有

$$\int_S |(Kh)(x)|^2 m(dx) \leqq \int_S\int_S |K(x, y)|^2 m(dy)m(dx) \cdot \int_S |h(y)|^2 m(dy),$$

从而

$$\|K\| \leqq \left(\int_S\int_S |K(x, y)|^2 m(dx)m(dy)\right)^{1/2}. \tag{5}$$

于是, 由 $w\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$, 我们得到 $w\text{-}\lim_{n\to\infty} K\cdot f_n = K\cdot f$, 这是因为对于任何 $g \in L^2(S)$, $\lim_{n\to\infty}(K\cdot f_n, g) = \lim_{n\to\infty}(f_n, K^*g) = (f, K^*g) = (K\cdot f, g)$.

定理 (i) 诸紧算子的一个线性组合仍是紧的. (ii) 一个紧算子与一个有界线性算子的乘积仍是紧的; 因此, 属于 $L(X, X)$ 的诸紧算子所成的集合构成了算子代数 $L(X, X)$ 的一个闭的双边理想. (iii) 设属于 $L(X, Y)$ 的紧算子所成的序列 $\{T_n\}$ 在一致算子拓扑意义下收敛于某个算子 T, 即 $\lim_{n\to\infty}\|T - T_n\| = 0$. 则 T 也是紧的.

证明 从紧算子的定义 (i) 和 (ii) 是显然的. 在一致算子拓扑意义下, 在代数 $L(X, X)$ 里的紧算子的理想的闭性可以由 (iii) 导出.

我们来证明 (iii). 设 $\{x_h\}$ 是 X 的闭单位球 S 中的一个序列. 由每个 T_n 的紧性, 用对角线方法, 我们能选出一个子序列 $\{x_{h'}\}$ 使得 $s\text{-}\lim_{h\to\infty} T_n x_{h'}$ 对每一个固定的 n 存在. 我们有

$$\|T_{x_{h'}} - T_{x_{k'}}\| \leqq \|T_{x_{h'}} - T_n x_{h'}\| + \|T_n x_{h'} - T_n x_{k'}\| + \|T_n x_{k'} - T x_{k'}\| \leqq \|T - T_n\| + \|T_n x_{h'} - T_n x_{k'}\| + \|T_n - T\|,$$

从而有 $\overline{\lim_{h', k'\to\infty}}\|T\cdot x_{h'} - T\cdot x_{k'}\| \leqq 2\|T - T_n\|$. 于是 $\{T_{x_{k'}}\}$ 是 B-空间 Y 内的一个 Cauchy 序列.

核算子 作为定理的一个应用, 我们来考察由 A. Grothendieck[2] 引进的核算子.

定义 2 若 X, Y 是 B-空间且 $T \in L(X, Y)$. 如果存在序列 $\{f'_n\} \subseteq X'$, 序列 $\{y_n\} \subseteq Y$ 和数列 $\{c_n\}$ 使得

$$\begin{cases}\sup\limits_n\|f'_n\|<\infty,\ \sup\limits_n\|y_n\|<\infty,\ \sum\limits_n|c_n|<\infty\text{以及}\\ T\cdot x=s\text{-}\lim\sum\limits_{n=1}^{m}c_n<x,f'_n>y_n\text{在 }y\text{ 内对每个 }x\in X\text{ 成立.}\end{cases}\tag{6}$$

则 T 称为映 X 入 Y 内的一个**核算子**.

注 (6)式中 s-lim 的存在性是显然的, 这是因为 $\|\sum\limits_{j=n}^{m}c_j<x,f'_j>y_j\|\leqq\sum\limits_{j=n}^{m}|c_j|\cdot\|x\|\cdot\|f'_j\|\cdot\|y_j\|\leqq$常数$\sum\limits_{j=n}^{m}|c_j|\cdot\|x\|$. 核算子所满足的条件(6)是说: 对于每个 $x\in X$, $s\text{-}\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}c_n<x,\ f'_n>y_n$ 是等于 $T\cdot x$ 的.

命题 核算子 T 是紧的.

证明 用

$$T_nx=\sum_{j=1}^{n}c_j<x,f'_j>y_j\tag{7}$$

定义 算子 T_n. 因为值域 $R(T_n)$ 是有限维的, 所以可以用 Bolzano-Weierstrass 定理来证明 T_n 是紧的. 再者, 由(6)式和

$$\|Tx-T_nx\|=\|\sum_{j=n+1}^{\infty}c_j<x,f'_j>y_j\|\leqq\text{常数}\sum_{j=n+1}^{\infty}|c_j|\cdot\|x\|,$$

我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T-T_n\|=0$, 从而 T 一定是紧的.

核算子的一个例 若 G 是 R^n 的一个有界开区域, 并考察 Hilbert 空间 $H_0^k(G)$. 设 $(k-j)>n$. 则映射 T

$$H_0^k(G)\ni\varphi\to\varphi\in H_0^j(G)\tag{8}$$

是属于 $L(H_0^k(G),H_0^j(G))$ 的一个核算子.

证明 我们可以假定有界区域 G 包含在多面体 P:

$$0\leqq x_j\leqq 2\pi\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

的内部. 我们回忆起 $H_0^k(G)$ 是 $\hat{H}_0^k(G)=C_0^k(G)$ 关于范数 $\|\varphi\|_k=\left(\sum\limits_{|s|\leqq k}\int_G|D^s\varphi(x)|^2dx\right)^{1/2}$ 的完备化(参看第一章 § 10). 我们用在 $P-G$ 内定义函数值为 0 的办法把属于 $\hat{H}_0^k(G)$ 的函数延拓成每个变量 x_s 的以 2π 为周期的函数. 诸函数

$$f_\beta(x)=(2\pi)^{-n/2}\exp(i\beta\cdot x),\text{ 其中 }\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

$$\text{是一 }n\text{ 整数组且 }\beta\cdot x=\sum_{s=1}^{n}\beta_sx_s\tag{9}$$

构成 $L^2(P)=H_0^0(P)$ 的一完全标准正交系. 因此, 以 D^s 表示分布导数时, 对于 $|s|\leqq k$, 我们得到诸函数 $D^s\varphi(x)$, 其中 $\varphi\in\hat{H}_0^k(G)$, 在 $L^2(G)$ 内的 Fourier 展式:

$$D^s\varphi(x)=\sum_\beta(D^s\varphi,f_\beta)_0f_\beta,\quad\text{其中 }(\psi,f_\beta)_0=\int_P\psi(x)\overline{f_\beta(x)}dx.\tag{10}$$

由

$$(D^s\varphi, f_\beta)_0 = (-1)^{|s|}(\varphi, D^s f_\beta)_0 = \prod_{m=1}^{n}(i\beta_m)^{s_m}(\varphi, f_\beta)_0$$

和 Parseval 关系

$$\sum_\beta |(D^s\varphi, f_\beta)_0|^2 = \int_P |D^s\varphi(x)|^2 dx \leqq \|\varphi\|_k^2 \qquad (|s| \leqq k),$$

我们有不等式

$$|(\varphi, (1+|\beta|^2)^{k/2} f_\beta)_0|^2 \leqq 常数 \sum_{|s|\leq k} |(D^s\varphi, f_\beta)_0|^2 \leqq 常数 \|\varphi\|_k^2.$$

所以由

$$\langle \varphi, f'_\beta \rangle = (\varphi, (1+|\beta|^2)^{k/2} f_\beta)_0$$

定义的泛函 $f'_\beta \in H_0^k(G)'$ 满足 $\sup_\beta \|f'_\beta\| < \infty$. 再者由 $D^s f_\beta = \prod_{t=1}^{n}(i\beta_t)^{s_t} f_\beta$ 有

$$y_\beta = (1+|\beta|^2)^{-j/2} f_\beta$$

满足 $\sup_\beta \|y_\beta\|_j < \infty$. 我们同样有

$$\sum_\beta |c_\beta| < \infty, 其中\ c_\beta = (1+|\beta|^2)^{(j-k)/2},$$

这是因为, 对于正整数 β_s 及 $\frac{(k-j)}{n} > 1$ 有

$$\sum_\beta \frac{1}{(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)^{k-j}} = \sum_\beta \left(\frac{1}{(\beta_1-\beta_2+\cdots+\beta_n)^n}\right)^{(k-j)/n}$$

$$\leqq \sum_\beta \left(\frac{1}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\right)^{(k-j)/n} = \sum_{\beta_1}\left(\frac{1}{\beta_1}\right)^{(k-j)/n} \cdot \sum_{\beta_2}\left(\frac{1}{\beta_2}\right)^{(k-j)/n} \cdots$$

$$\sum_{\beta_n}\left(\frac{1}{\beta_n}\right)^{(k-j)/n} < \infty.$$

所以我们证明了(Fourier)展式

$$\varphi = \sum_\beta c_\beta < \varphi, f'_\beta > y_\beta.$$

注 如果存在给定的有界线性算子 $K \in L(L^2(S), L^2(S))$ 的本征函数的一完全标准正交系 $\{\varphi_j\}$ 使得 $K\varphi_j = \lambda_j \varphi_j (j=1, 2, \cdots)$, 则从 Fourier 展式

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)\varphi_j, \quad f \in L^2(S),$$

可得

$$Kf = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, \varphi_j)\varphi_j.$$

我们有 $\lambda_j = (K\varphi_j, \varphi_j)$, 从而, 如果诸本征值 λ_j 都>0 且 $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j < \infty$, 则算子$K$是核算子. 如果

用核

$$\begin{cases} K(x, y) = \int_S \overline{K_2(z, x)} K_1(z, y) m(dz), \text{其中核 } K_1(x, y) \\ \text{和 } K_2(x, y) \text{是 Hilbert-Schmidt 型的}, \end{cases}$$

来定义算子K，那么条件$\sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j, \varphi_j)| < \infty$一定是满足的. 因为

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(K_2^* K_1 \varphi_j, \varphi_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} |(K_1\varphi_j, K_2\varphi_j)| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|K_1\varphi_j\|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|K_2\varphi_j\|^2 \right)^{1/2},$$

又由 Parseval 关系我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|K_1\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_S \left| \int_S K_1(z, y)\varphi_j(y) m(dy) \right|^2 m(dz)$$

$$= \int_S \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_S K_1(z, y)\varphi_j(y) m(dy) \right|^2 m(dz) = \int_S \left\{ \int_S |K_1(z, y)|^2 m(dy) \right\} m(dz) < \infty,$$

且对于$\sum_{j=1}^{\infty} \|K_2\varphi\|^2$有类似的结果. 可分 Hilbert 空间$X$中的一个有界线性算子$K$叫做属于**迹类**，如果对于$X$的任何两个完全标准正交系$\{\varphi_j\}$和$\{\psi_j\}$都有$\sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j, \psi_j)| < \infty$成立. 有关迹类和核算子的一般理论可参看 R. Schatten[1], 和 I. M. Gelfand-N. Y. Vilenkin[3].

§ 3. Rellich-Gårding 定理

定理(Gårding[1]) 设G是R^n的一个有界开区域. 如果一个算子$T \in L(H_0^k(G), H_0^k(G))$，对于$j < k$和所有的$\varphi \in H_0^k(G)$，适合条件:

$$\|T\varphi\|_k \leq C\|\varphi\|_j, \text{其中 } C \text{ 是一常数}, \tag{1}$$

则T是属于$L(H_0^k(G), H_0^k(G))$的一个紧算子.

证明 按照空间$H_0^k(G)$的定义(参看第一章 § 10), 只要证明下述结果就够了: 设序列$\{\varphi_\nu\} \subseteq \hat{H}_0^k(G) = C_0^k(G)$是合$\|\varphi_\nu\|_k \leq 1$ ($\nu = 1, 2, \cdots$)条件的. 那末序列$\{T\varphi_\nu\}$含有一子序列在$H_0^k(G)$内强收敛. 由 Schwarz 不等式, Fourier 变换$\hat{\varphi}_\nu(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_G \varphi_\nu(x) \exp(-ix \cdot \xi)\, dx$满足

$$|\hat{\varphi}_\nu(\xi)|^2 \leq (2\pi)^{-n} \int_G dx \int_G |\varphi_\nu(x)|^2 dx \leq (2\pi)^{-n} \int_G dx,$$

于是当$\xi \in R^n$时$\{\hat{\varphi}_\nu(\xi)\}$对$\nu$是等度有界的. 根据$\|\varphi_\nu\|_0$的有界性, 我们可以假设有一子序列$\{\varphi_{\nu'}\}$在$L^2(G) = H_0^0(G)$内是弱收敛的. 因为, 对每个$\xi$, 函数$\exp(-ix \cdot \xi)$是属于$L^2(G)$的, 所以我们可知, 在每个$\xi$处, 诸有界函数$\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) = (\varphi_{\nu'}, (2\pi)^{-n/2} \exp(-ix \cdot \xi))$. 所成序列是收敛的. 因此, 根据(1)和有关 Fourier 变换的 Parseval 关系(第六章 § 2)有

$$\|T\varphi_{\nu'} - T\varphi_{\mu'}\|_k^2 = \|T(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'})\|_k^2 \leq C^2 \|\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'}\|_j^2$$

$$= C^2 \sum_{|s| \leq j} \|D^s(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'})\|_0^2 = C^2 \sum_{|s| \leq j} \|\widehat{(D^s(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'}))}\|_0^2$$

$$=C^2\sum_{|s|\leq j}\left\|\prod_{i=1}^{n}(i\xi_i)^{s_i}(\hat{\varphi}_{\nu'}-\hat{\varphi}_{\mu'})(\xi)\right\|_0^2$$

$$\leq C^2\sum_{|s|\leq j}\int_{|\xi|\leq r}\left|\prod_{i=1}^{n}\xi_i^{s_i}(\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi)-\hat{\varphi}_{\mu'}(\xi))\right|^2 d\xi+C^2C_1\int_{|\xi|>r}|\xi|^{2j}|\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi)-\hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi,$$

其中 C_1 是一正常数.

对于固定的 r，右边第一项随 ν' 和 $\mu'\to\infty$ 而收敛于 0. 这个事实由 Lebesgue-Fatou 引理就可看出. 对于 $r>1$, 右边第二项是

$$\leq C^2C_1 r^{2j-2k}\int_{|\xi|>r}|\xi|^{2k}\cdot|\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi)-\hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq C^2C_1 r^{2j-2k}\int_{R^n}|\xi|^{2k}|\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi)-\hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq C^2C_1C_2 r^{2j-2k}\sum_{|s|\leq k}\|\widehat{(D^s\varphi_{\nu'}-D^s\varphi_{\mu'})}\|_0^2$$

$$=C^2C_1C_2 r^{2j-2k}\sum_{|s|\leq k}\|D^s(\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'})\|_0^2$$

$$=C^2C_1C_2 r^{2j-2k}\|\varphi_{\nu'}-\varphi_{\mu'}\|_k^2\leq 4C^2C_1C_2 r^{2j-2k}$$

其中 C_2 是一常数.

由 $j<k$, 后一项随 $r\to\infty$ 而收敛于 0. 所以有 $\lim\limits_{\nu,\mu\to\infty}\|T\varphi_{\nu'}-T\varphi_{\mu'}\|_k=0$.

§ 4. Schauder 定理

定理(Schauder)　一个算子 $T\in L(X,Y)$ 是紧的, 当且仅当它的对偶算子 T' 是紧的.

证明　设 S, S' 分别是 X, Y 内的闭单位球, 又设 $T\in L(X,Y)$ 是紧的. 今设 $\{y_j'\}$ 是 S' 内的任一序列. 诸函数 $F_j(y)=\langle y, y_j'\rangle$ 在

$$|F_j(y)-F_j(z)|=|\langle y-z, y_j'\rangle|\leq\|y-z\|$$

的意义下是等度连续的. 再者, 因为 $|F_j(y)|\leq\|y\|$, 所以 $\{F_j(y)\}$ 在 y 的任一有界集上, 对 j 是等度有界的. 于是我们把 Ascoli-Arzelà 定理用到定义在紧集 $(T\cdot S)^a$ 上的函数系 $\{F_j(y)\}$ 时, 可得某一子序列 $\{F_{j'}(y)\}$ 对 $y\in(T\cdot S)^a$ 一致收敛. 因而 $\langle Tx, y_{j'}'\rangle=\langle x, T'y_{j'}'\rangle$ 对 $x\in S$ 一致收敛, 从而 $\{T'\cdot y_{j'}'\}$ 在 X' 的强拓扑下是收敛的. 这就证明了 T' 是紧的.

反之, 设 T' 是紧的. 那末根据上面已证的结果 T'' 是紧的. 于是, 如果 S'' 是 X'' 内的闭单位球, 则 $(T''\cdot S'')$ 是相对紧的. 我们知道 Y 是等距地被嵌入 Y'' 内的 (参看第四章 § 8 定理 2). 于是 $T\cdot S\subseteq T''\cdot S''$, 从而 $T\cdot S$ 在 Y'' 的强拓扑下是相对紧的, 因而也在 Y 的强拓扑下是相对紧的. 所以 T 是紧的.

§ 5. Riesz-Schauder 理论

我们先来证明

引理(F. Riesz[2])　若 V 是属于 $L(X,X)$ 的一个紧算子, 其中 X 是一个 B-空间. 那末, 对

于任何的复数 $\lambda_0\neq 0$, 值域$R(\lambda_0 I-V)$是强闭的.

证明 我们可以假定 $\lambda_0=1$. 设$\{x_n\}$是X的一个序列, 它使得 $y_n=(I-V)x_n$强收敛于 y. 如果$\{x_n\}$是有界的, 根据算子V的紧性, 则必有一子序列$\{x_{n'}\}$使得$\{Vx_{n'}\}$强收敛. 因为 $x_{n'}=y_{n'}+Vx_{n'}$, $\{x_{n'}\}$收敛于某个 x, 从而 $y=(I-V)x$.

其次, 我们假定$\{\|x_n\|\}$是无界的. 记 $T=(I-V)$且令 $\alpha_n=\mathrm{dis}(x_n, N(T))$, 其中 $N(T)=\{x; Tx=0\}$. 取一个 $w_n\in N(T)$ 使得 $\alpha_n\leqq\|x_n-w_n\|\leqq(1+n^{-1})\alpha_n$. 则有 $T(x_n-w_n)=Tx_n$. 从而当$\{\alpha_n\}$有界时, 我们能象上面一样证明 $y\in R(T)=R(I-V)$. 假定 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$. 因为 $z_n=(x_n-w_n)/\|x_n-w_n\|$满足条件: $\|z_n\|=1$ 和 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}Tz_n=0$, 我们能象上面一样证明存在一子序列$\{z_{n'}\}$使得 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}z_{n'}=w_0$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}Tz_{n'}=0$. 于是 $w_0\in T(N)$. 而如果我们令 $z_n-w_0=u_n$, 则在

$$x_n-w_n-w_0\|x_n-w_n\|=u_n\|x_n-w_n\|$$

的左边第二和第三项均属于 $N(T)$, 因此我们一定有$\|u_n\|\cdot\|x_n-w_n\|\geqq\alpha_n$. 这是一个矛盾, 因为 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, $\|x_n-w_n\|\leqq(1+n^{-1})\alpha_n$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$.

我们现在可以来证明 Riesz-Schauder 理论; 为方便起见, 我们依次用下面三个定理来叙述.

定理 1 若 $V\in L(X, X)$是一个紧算子, 如果 $\lambda_0\neq 0$ 不是V的本征值, 则 λ_0是在V的预解式集合中.

证明 利用上面的引理及假设, 算子 $T_{\lambda_0}=(\lambda_0 I-V)$给出了$X$到集合 $R(T_{\lambda_0})$上的一个一对一的映射, 其中 $R(T_{\lambda_0})$在X内是强闭的. 于是根据第二章 §5 的开映射定理的系, T_{λ_0}具有一个连续的逆. 我们必须证明 $R(T_{\lambda_0})=X$. 如若不然, X 的拓扑象 $X_1=T_{\lambda_0}X$ 是 X 的一个真闭子空间. 于是, 如果我们记 $X_2=T_{\lambda_0}X_1$, $X_3=T_{\lambda_0}X_2, \cdots$, 那末 X_{n+1} 是 $X_n(n=0, 1, 2, \cdots, X_0=X)$的一个真闭子空间. 根据第三章 §2 中的 F. Riesz 定理, 存在一序列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\in X_n$, $\|y_n\|=1$ 以及 $\mathrm{dis}(y_n, X_{n+1})\geqq\frac{1}{2}$. 因此, 如果 $n>m$ 就有

$$\lambda_0^{-1}(Vy_m-Vy_n)=y_m+\{-y_n-(T_{\lambda_0}y_m-T_{\lambda_0}y_n)/\lambda_0\}=y_m-y$$

关于某个 $y\in X_{m+1}$ 成立.

于是$\|Vy_n-Vy_m\|\geqq|\lambda_0|/2$, 这与算子$V$的紧性相矛盾.

定理 2 若 $V\in L(X,X)$是一个紧算子. 则(i) 它的谱由复平面上至多是可数的点集合所组成, 且该集合除 $\lambda=0$ 可能是聚点外无其它聚点; (ii) V 的谱的每一个非零数都是V的一个有限重的本征值; (iii) 一个非 0 数是V的一个本征值, 当且仅当它是 V' 的一个本征值.

证明 由定理 1, V 的谱的一个非 0 数是V的一个本征值. 对 V' 有同样的结论, 这是因为, 利用 Schauder 定理, 当V是紧时, V'是紧的. 而对于V和 V' 其预解式集合是相同的(参看第三章 §6). 于是(iii)得证. 因为分别属于V的不同的本征值的诸本征向量是线性无关的, 于是如果我们能从以下情况:

存在一线性无关的向量序列$\{x_n\}$使得

$$Vx_n=\lambda_n x(n=1, 2, \cdots) \text{且} \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda\neq 0.$$

推导出一个矛盾，则(i)和(ii)的证明便完成了.

为了导出一个矛盾，我们考虑由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所张成的闭子空间 X_n. 根据第三章§2中的F. Riesz 定理，必存在一序列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\in X_n$, $\|y_n\|=1$ 且 $\text{dis}(X_n, X_{n-1})\geqq 1/2$ $(n=2, 3, \cdots)$. 如果 $n>m$, 那么

$$\lambda_n^{-1}Vy_n-\lambda_m^{-1}Vy_m=y_n+(-y_m-\lambda_n^{-1}T_{\lambda_n}y_n+\lambda_m^{-1}T_{\lambda_m}y_m)=y_n-z,$$

其中 $z\in X_{n-1}$.

因为，如果 $y_n=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j$, 则有 $y_n-\lambda_n^{-1}Vy_n=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\lambda_n^{-1}\lambda_j x_j\in X_{n-1}$ 且类似地有 $T_{\lambda_m}y_m\in X_m$. 所以 $\|\lambda_n^{-1}Vy_n-\lambda_m^{-1}Vy_m\|\geqq 1/2$. 这就同与假设 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n\neq 0$ 密切有关的 V 的紧性相矛盾了.

定理 3 若 $\lambda_0\neq 0$ 是紧算子 $V\in L(X, X)$ 的一个本征值. 那么根据以上定理 λ_0 也是 V' 的一个本征值. 我们能证明：(i) 对 V 和 V' 本征值 λ_0 的重数是相同的. (ii) 方程 $(\lambda_0 I-V)x=y$ 有解 x, 当且仅当 $y\in N(\lambda_0 I'-V')^{\perp}$, 即当且仅当从 $V'f=\lambda_0 f$ 可导致 $\langle y, f\rangle=0$. (iii) 方程 $(\lambda_0 I'-V')f=g$ 有解 f, 当且仅当 $g\in N(\lambda_0 I-V)^{\perp}$, 即当且仅当从 $Vx=\lambda_0 x$ 可导致 $\langle x, g\rangle=0$.

证明 因为本征值 $\lambda_0\neq 0$ 是预解式 $R(\lambda; V)=(\lambda I-V)^{-1}$ 的一个孤立奇点，我们可以把 $R(\lambda; V)$ 展成 Laurent 级数：

$$R(\lambda; V)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n A_n.$$

我们特别感兴趣的是残数 $A_{-1}=(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon}R(\lambda; V)d\lambda$. 如第三章§8中所证明的，$A_{-1}$ 是一个幂等元，即是 $A_{-1}^2=A_{-1}$. 如果我们令 $(\lambda I-V)^{-1}=\lambda^{-1}I+V_\lambda$, 那么从 $(\lambda I-V)(\lambda^{-1}I+V_\lambda)=I$ 我们得到 $V_\lambda=V(\lambda^{-1}V_\lambda+\lambda^{-2}I)$, 从而当 V 是紧时，V_λ 是紧的. 于是利用

$$A_{-1}=(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon}R(\lambda; V)d\lambda=(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon}\lambda^{-1}d\lambda\cdot I+(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon}V_\lambda d\lambda$$
$$=(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon}V_\lambda d\lambda.$$

因此，根据第十章§2的定理知，A_{-1} 是一紧算子.

所以根据 $A_{-1}X=A_{-1}(A_{-1}X)$ 和 A_{-1} 的紧性，赋范线性空间 $A_{-1}X$ 的单位球是相对紧的. 于是根据第三章§2中的 F. Riesz 定理，值域 $R(A_{-1})$ 是有限维的. 另一方面，由 $Vx=\lambda_0 x$, $x\neq 0$, 可导致 $(\lambda I-V)^{-1}x=(\lambda-\lambda_0)^{-1}x$, 这是由于 $(\lambda I-V)x=(\lambda-\lambda_0)x$, 从而又有 $A_{-1}x=(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\epsilon}(\lambda-\lambda_0)^{-1}d\lambda\cdot x=x$. 所以，本征方程 $Vx=\lambda_0 x$ 等价于 $Vx=\lambda_0 x$, $x\in R(A_{-1})$. 用同样的方法，我们可以证明本征值方程 $V'f=\lambda_0 f$ 等价于 $V'f=\lambda_0 f$, $f\in R(A'_{-1})$. 而 $R(A_{-1})$ 和 $R(A'_{-1})$ 具有相同的维数. 因为 $A'_{-1}f=g$ 满足 $A'_{-1}g=A'_{-1}(A'_{-1}f)=g$, 而这是等价于对于所有的 $x\in X$, 有 $\langle x, g\rangle=\langle A_{-1}x, g\rangle$ 成立，从而泛函 g 可以认为定义在有限维空间 $R(A_{-1})$ 上的一个泛函.

现在利用矩阵论中熟知的定理，本征值方程 $Vx=\lambda_0 x$ (在 $R(A_{-1})$ 内) 与它的转置方程 $V'f=$

$\lambda_0 f$(在 $R(A'_{-1})$内)两者具有同样数目的线性无关的解. 因此我们便证明了(i). 命题(ii)和(iii)利用引理和闭值域定理(第七章§5)即可证明.

Riesz-Schauder 理论的推广 若对某个正整数 n, $V\in L(X, X)$的幂 V^n 是紧的. 那末根据第八章§7 中的谱映射定理有 $\sigma(V^n)=\sigma(V)^n$ 以及根据 V^n 的紧性, $\sigma(V^n)$或是一有限集或是仅在 0 处凝聚的一可数集. 所以 $\sigma(V)$或是一有限集或是仅在 0 处凝聚的一可数集. 因为 V^n 是紧的, 所以对于 $\sigma(V^n)$的任何 $\lambda_0\neq 0$ 以及充分小的 $\varepsilon>0$, 有

$$(2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} R(\lambda; V^n)\,d\lambda$$

具有有限维的值域. 于是 λ_0 是 $R(\lambda; V^n)$ 的一个极点 (参看第八章§8). 而 $(\lambda^n I-V^n)=(\lambda I-V)(\lambda^{n-1}I+\lambda^{n-2}V+\cdots+V^{n-1})$所以有

$$(\lambda^n I-V^n)^{-1}(\lambda^{n-1}I+\cdots+V^{n-1})=(\lambda I-V)^{-1},$$

这就证明了 $\sigma(V^n)$ 的任何 $\lambda_0\neq 0$ 都是 $R(\lambda; V)$ 的一个极点, 从而是 V 的一个本征值. 这些事实使我们能把 Riesz-Schauder 理论推广到这样一些算子 V, 即算子 V 的某个幂 V^n 是紧的. 从把 Riesz-Schauder 理论应用到积分方程的一些具体问题(例如有关位势的 Dirichlet 问题)的观点来看, 这个推广是很重要的. 这可参看 O. D. Kellogg[1]. 可以证明 Riesz-Schauder 理论当 $\lambda_0=1$ 时, 对于算子 $V\in L(X, X)$也是成立的, 如果存在正整数 m 及紧算子 $K\in L(X, X)$使得 $\|K-V^m\|<1$. 参看 K. Yosida[9]. 此处应注意, 如果对于 $0\leq s, t\leq 1$, $K_1(s, t)$和 $K_2(s, t)$是有界可测的, 那末由

$$x(s)\to(Tx)(s)=(K_1K_2x)(s),\ \text{其中}$$

$$(K_jx)(s)=\int_0^1 K_j(s, t)x(t)\,dt,$$

所定义的积分算子 T 作为 $L(L'(0, 1), L'(0, 1))$的一个算子是紧的. 参看 K. Yosida-Y. Mimura-S. Kakutani[10].

§6. Dirichlet 问题

设 G 是 R^n 的一有界开区域, 且

$$L=\sum_{|s|,|t|\leq m} D^s C_{st}(x) D^t$$

是一个具有实的 $C^\infty(G^a)$ 系数 $C_{st}(x)=C_{ts}(x)$的强椭圆微分算子. 我们将只考虑实值函数. 若给定 $f\in L^2(G)$和 $u_1\in H^m(G)$. 考察

$$Lu=f\ \text{的满足条件}\quad (u_0-u_1)\in H_0^m(G) \tag{1}$$

的一个分布解 $u_0\in L^2(G)$. 条件$(u_0-u_1)\in H_0^m(G)$意味着诸分布导数

$$(D^j u_0-D^j u_1)\qquad \text{对}\ |j|\leq m \tag{2}$$

中的每一个都是某序列$\{D^j\varphi_{h,j}\}$, 其中 $\varphi_{h,j}\in C_0^\infty(G)$, 的 $L^2(G)$-极限(参看第一章§10). 因此它粗糙地给出了边界条件:

$$\text{对于}\ |j|<m,\ \text{在}\ G\ \text{的边界}\ \partial G\ \text{上有}$$

$$D^j u_0 = D^j u_1 \text{ 成立}. \tag{3}$$

在这样的意义下，(1)式称为算子L的Dirichlet问题。我们仿照L. Gårding [1] 对问题的提法和解法。

首先，我们求解问题

$$u+\alpha Lu=f, \qquad (u-u_1)\in H_0^m(G), \tag{4}$$

其中正常数α选得使Gårding不等式

$$(\varphi+\alpha L^*\varphi, \varphi)_0 \geqq \delta \|\varphi\|_m^2 \text{ 成立，只要 } \varphi\in C_0^\infty(G). \tag{5}$$

这里$L^* = \sum_{|s|,|t|\leq m} (-1)^{|s|+|t|} D^t c_{st}(x) D^s$，而$\delta$是正常数。如果系数$c_{st}(x)$在$G$的闭包$G^a$上是连续的，则这样的$\alpha$的存在性是保证了的。求$m$次偏导数我们又有不等式

$$|(\varphi+\alpha L^*\varphi, \psi)_0| \leq \gamma \|\varphi\|_m \cdot \|\psi\|_m, \text{ 当 } \varphi, \psi\in C_0^\infty(G) \text{ 时}, \tag{6}$$

其中γ是与φ, ψ无关的另一正常数。

对于$u_1\in H^m(G)$和$\varphi\in C_0^\infty(G)$，求偏导数我们有

$$(L^*\varphi, u_1)_0 = \sum_{s,t} ((-1)^{|s|+|t|} D^t c_{st} D^s\varphi, u_1)_0$$

$$= \sum_{s,t} (-1)^{|s|} (c_{st} D^s\varphi, D^t u_1)_0.$$

利用Schwarz不等式，再回忆诸系数c_{st}在G^a上都是有界的，我们可得

$$|(L^*\varphi, u_1)_0| \leq \eta \sum_{|s|,|t|\leq m} \|D^s\varphi\|_0 \|D^t u_1\|. \quad (\sup_{s,t;x} |c_{st}(x)| = \eta).$$

右边小于常数乘$\|\varphi\|_m$.

因此线性泛函

$$F(\varphi) = (\varphi+\alpha L^*\varphi, u_1)_0, \quad \varphi\in C_0^\infty(G),$$

可以延拓为定义在$H_0^m(G)$上的一个有界线性泛函，而$H_0^m(G)$是$C_0^\infty(G)$关于范数$\|\varphi\|_m$的完备化。类似地，从

$$|(\varphi, f)_0| \leq \|\varphi\|_0 \cdot \|f\|_0 \leq \|\varphi\|_m \cdot \|f\|_0,$$

我们看出$\varphi\in C_0^\infty(G)$的线性泛函$(\varphi, f)_0$可以延拓为$\varphi\in H_0^m(G)$的一个有界线性泛函。于是，应用F. Riesz表示定理到Hilbert空间$H_0^m(G)$，必存在一个$f' = f'(f, u_1)\in H_0^m(G)$使得

$$\text{当 } \varphi\in C_0^\infty(G) \text{ 时}, (\varphi, f)_0 - (\varphi+\alpha L^*\varphi, u_1)_0 = (\varphi, f')_m \text{ 成立}.$$

于是利用第三章§7中的Milgram-Lax定理，把它应用到Hilbert空间$H_0^m(G)$上，我们有

$$(\varphi, f)_0 - (\varphi+\alpha L^*\varphi, u_1)_0 = (\varphi, f')_m = B(\varphi, sf'), \quad sf'\in H_0^m(G), \tag{7}$$

其中

$$B(\varphi, \psi) = (\varphi+\alpha L^*\varphi, \psi)_0 \qquad \text{对于 } \varphi\in C_0^\infty(G), \psi\in H_0^m(G). \tag{8}$$

因此当$\varphi\in C_0^\infty(G)$时，有

$$(\varphi, f)_0 = (\varphi+\alpha L^*\varphi, u_1+sf')_0,$$

从而$u_0 = u_1 + sf'$是所要求的(4)式的属于$L^2(G)$的解。

下面我们来讨论原方程(1). 如果 $u_0\in L^2(G)$ 满足(1), 则 $u_2=u_0-u_1\in H_0^m(G)$ 满足

$$(u_0, L^*\varphi)_0=(u_1, L^*\varphi)_0+(u_2, L^*\varphi)_0=(f, \varphi)_0,\quad \varphi\in C_0^\infty(G).$$

如上, 使用分部积分, 我们得到

$$|(u_1, L^*\varphi)_0|\leq a\|\varphi\|_m,$$

$$|(f, \varphi)_0|\leq\|f\|_0\cdot\|\varphi\|_0\leq\|f\|_0\cdot\|\varphi\|_m.$$

因此, 我们可以把 $H_0^m(G)$ 中的F. Riesz 表示定理应用到 $\varphi\in C_0^\infty(G)$ 的线性泛函 $(f, \varphi)_0-(u_1, L^*\varphi)_0$ 上. 于是存在唯一确定的 $v\in H_0^m(G)$ 使得

$$(f, \varphi)_0-(u_1, L^*\varphi)_0=(v, \varphi)_m,\quad \text{当 } \varphi\in C_0^\infty(G) \text{ 时}.$$

应用 Milgram-Lax 定理到 $(v, \varphi)_m$, 我们得到一个 $S_1v\in H_0^m(v)$ 使得

$$(v, \varphi)_m=B(S_1v, \varphi),\quad \text{当 } \varphi\in C_0^\infty(G),\quad v\in H_0^m(G)\text{时}.$$

因此, Dirichlet 问题(1)等价于问题: 对给定的 $S_1v\in H_0^m(G)$, 求

$$(u_2, L^*\varphi)_0=B(S_1v, \varphi),\quad \varphi\in C_0^\infty(G) \tag{1'}$$

的一个解 $u_2\in H_0^m(G)$.

今对给定的 $u\in L^2(G)=H_0^0(G)$,

$$|(u, \varphi)_0|\leq\|u\|_0\cdot\|\varphi\|_0\leq\|u\|_0\cdot\|\varphi\|_m$$

所以根据 Hilbert 空间 $H_0^m(G)$ 中的 F. Riesz 表示定理, 存在唯一确定的 $u'=Tu\in H_0^m(G)$ 使得, 当 $\varphi\in C_0^\infty(G)$ 时, 有

$$(u, \varphi)_0=(u', \varphi)_m\quad 及\quad \|u'\|_m\leq\|u\|_0.$$

因此根据 Milgram-Lax 定理, 我们得到

$$(u, \varphi)_0=(u', \varphi)_m=B(S_1u', \varphi)=B(S_1Tu, \varphi),$$

$$\|S_1Tu\|_m\leq\delta^{-1}\|u\|. \tag{9}$$

所以, 由(1'), 当 $\varphi\in C_0^\infty(G)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}B(u_2,\varphi)&=(u_2,\varphi+\alpha L^*\varphi)_0=(u_2, \varphi)_0+\alpha(u_2, L^*\varphi)_0\\&=B(S_1Tu_2, \varphi)+\alpha B(S_1v,\varphi),\end{aligned}$$

即是

$$B(u_2-S_1Tu_2-\alpha S_1v,\varphi)=0.$$

由 B 的正性 $B(\varphi, \varphi)>0$, 我们一定有

$$u_2-S_1Tu_2=\alpha S_1v. \tag{1''}$$

右边的项 $\alpha S_1v\in H_0^m(G)$ 是已知函数. 利用 $\|S_1Tu\|_m\leq\delta^{-1}\|u\|_0$, 我们知道把 $H_0^m(G)$ 映入 $H_0^m(G)$ 的算子 S_1T 是紧的(第十章 §3 中的 Rellich-Gårding 定理). 所以我们可以应用 Riesz-Schauder 理论来说明以下互斥的结论之一是成立的:

$$\begin{cases}\text{或者齐次方程 } u-S_1Tu=0 \text{ 具有一个非平凡解 } u\in H_0^m(G),\\ \text{或者非齐次方程 } u-S_1Tu=w, \text{ 对于每一给定的 } w\in H_0^m(G),\\ \text{具有唯一确定的解 } u\in H_0^m(G).\end{cases}$$

第一个结论相应于 $(u, \varphi+\alpha L^*\varphi)_0=(u, \varphi)_0$ 的情形, 即相应于 $Lu=0$ 的情形. 所以回到原方程,

(1), 我们有

定理 以下互斥的结论之一成立: 或者(i) 齐次方程 $Lu=0$ 具有非平凡解 $u\in H_0^m(G)$, 或者(ii) 对于任何的 $f\in L^2(G)$ 和任何的 $u_1\in H_0^m(G)$, $Lu=f$, $u-u_1\in H_0^m(G)$ 具有唯一确定的解 $u_0\in L^2(G)$.

第十章 附录 A. Grothendieck 的核空间

第十章 § 2 中定义的核算子可以如下地扩张到局部凸空间去.

命题 1 若 X 是局部凸线性拓扑空间, Y 是一个 B-空间. 假定存在 X 上的连续线性泛函的一个等度连续序列 $\{f_j'\}$, 存在诸元素 $y_j'\in Y$ 所成的一有界序列 $\{y_j'\}$ 以及合于条件 $\sum_{j=1}^{n} c_j<\infty$ 的非负数序列 $\{c_j\}$, 则

$$T\cdot x=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} c_j\langle x, f_j'\rangle y_j \tag{1}$$

定义了一个把 X 映入 Y 内的连续线性算子.

证明 根据 $\{f_j'\}$ 的等度连续性, 存在 X 上的一个连续半范数 p 使得对 $x\in X$, 有 $\sup_j|\langle x, f_j'\rangle|\leqq p(x)$ 成立. 因此, 对于 $m>n$, 有

$$\left\|\sum_{j=n}^{m} c_j\langle x, f_j'\rangle y_j\right\|\leqq p(x)\sup_{j\geq 1}\|y_j\|\cdot\sum_{j=m}^{n} c_j \text{ 成立.}$$

这就证明了(1)的右边存在并定义了一个把 X 映入 B-空间 Y 内的连续线性算子.

定义 1 一个形如(1)的算子 T, 称为把 X 映入 B-空间 Y 内的核算子.

系 一个核算子 T 是一个紧算子, 其意义是 T 把 X 的 0 的一个邻域映成 Y 的一个相对紧集.

证明 我们定义

$$T_n\cdot x=\sum_{j=1}^{n} c_j\langle x, f_j'\rangle y_j.$$

T_n 是紧的, 这是因为 X 的集合 $V=\{x; p(x)\leqq 1\}$ 在 T_n 下的像是 Y 中的相对紧集. 另一方面, 我们有

$$\|Tx-T_nx\|=\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty} c_j\langle x, f_j'\rangle y_j\right\|\leqq p(x)\sup_{j\geqslant 1}\|y_j\|\sum_{j=n+1}^{\infty} c_j,$$

从而 T_nx 在 V 上一致地强收敛于 T_x. 所以算子 T 是紧的.

如第十章 § 2 中所证明的, 我们有核算子的一个典型例子:

例 若 K 是 R 的一个紧子集. 则对于 $(k-j)>n$, 把 $H_0^k(K)$ 映入 $H_0^j(K)$ 内的恒等映射 T 是一个核算子.

命题 2 若 X 是一个局部凸线性拓扑空间，且 V 是 X 的 0 的一个凸平衡邻域. 令 $p_V(x) = \inf_{x/\lambda\in V,\lambda>0} \lambda$ 是 V 的Minkowski 泛函. p_V 是 X 上的一个连续半范数. 令

$$N_V = \{x\in X; p_V(x)=0\} = \{x\in X; \lambda x\in V \text{ 对于所有 } \lambda>0\}.$$

则 N_V 是 X 的一个闭线性子空间，且商空间 $X_V = X/N_V$ 是一个赋范线性空间，其范数为

$$\|\tilde{x}\|_V = p_V(x), \text{ 其中 } \tilde{x} \text{ 是含元素 } x \text{ 的模 } N_V \text{ 的剩余类.} \tag{2}$$

证明 设 $(x-x_1)\in N_V$. 那末 $p_V(x_1) \leq p_V(x) + p_V(x_1-x) = p_V(x)$，且类似地 $p_V(x) \leq p_V(x_1)$. 因此，如果 x 和 x_1 都在模 N_V 的同一个剩余类中，便有 $p_V(x) = p_V(x_1)$. 我们有 $\|\tilde{x}\|_V \geqq 0$ 和 $\|0\|_V = 0$. 如果 $\|\tilde{x}\|_V = 0$，则由 $x\in\tilde{x}$ 必导致 $x\in N_V$ 从而有 $\tilde{x} = 0$. 三角不等式由 $\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_V = p_V(x+y) \leq p_V(x) + p_V(y) = \|\tilde{x}\|_V + \|\tilde{y}\|_V$ 得证. 我们还有 $\|\alpha\tilde{x}\|_V = p_V(\alpha x) = |\alpha| p_V(x) = |\alpha| \|\tilde{x}\|_V$.

系 利用等价性

$$(p_{V_1} \leq p_{V_2}) \longleftrightarrow (V_2 \subseteq V_1), \tag{3}$$

我们可以定义一个典则映射

$$X_{V_2} \longrightarrow X_{V_1} \quad (\text{当 } V_2 \subseteq V_1),$$

其办法是将包含 x 的(模 N_{V_2}) 的剩余类 $\tilde{x}_{V_2}$ 与包含 $\tilde{x}$ 的(模 N_{V_1})剩余类 $\tilde{x}_{V_1}$ 联系起来. 这样得到的映射是连续的，这是因为

$$\|\tilde{x}_{V_2}\|_{V_2} = p_{V_2}(x) \geqq p_{V_1}(x) = \|\tilde{x}_{V_1}\|_{V_1}.$$

现在我们来给出由 A. Grothendieck[2]引进分析中的核空间的概念.

定义 2 一个局部凸线性拓扑空间 X 叫做一个核空间，如果对 0 的任何凸、平衡邻域 V，存在 0 的另一个凸、平衡邻域 $U\subseteq V$ 使得典则映射

$$T: X_U \longrightarrow \hat{X}_V \tag{4}$$

是核映射. 其中 $\hat{X}_V$ 是赋范线性空间 X_V 的完备化.

例 1 若 R^A 是定义在 A 上的实值有限函数 $x(a)$ 的全体且按半范数系

$$p_a(x) = |x(a)|, \qquad a\in A \tag{5}$$

加以拓扑化，使得 R^A 成为实数域 R 的拓扑乘积. 那末 R^A 是一个核空间.

证明 N_V 是使得对某个有限集 $\{a_j\in A;\ j=1,2,\cdots,n\}$，有 $x(a_j)=0\,(j=1,2,\cdots,n)$ 成立的全体 $x(a)\in R^A$. 于是 $X_V = R^A/N_V$ 等价于诸函数 $x_V(a)$ 所成的空间，其中 $x_V(a)$ 对于 $a\neq a_j$ 有 $x_V(a)=0$，且赋以范数

$$\|x_V(a)\|_V = \sup_{1\leq j\leq n} |x(a_j)|.$$

我们取 N_U 为这样的函数 $x(a)\in R^A$ 的全体，即对于 $\alpha\in A'$ 时，有 $x(a_\alpha)=0$ 成立，其中 A' 是含有$1,2,\cdots,n$在内的整数的任一有限集合. 于是对于 $U\subseteq V$，因为典则映射 $X_U = R^A/N_U \to R^A/N_V = X_V$ 是一个具有有限维值域的连续线性映射，所以它是核映射.

例 2 一个核 B-空间 X 必是有限维的.

证明 因为对 B-空间的 0 的任一凸、平衡邻域 V 有 $X = X_V$，故由恒等映射 $X\to X$ 的紧性，根据第三章 § 2 中的 F. Riesz 定理必导致 X是有限维的.

例 3 若K是R^n的一个紧子集,则第一章§1中引进的空间$\mathfrak{D}_K(R^n)$是一个核空间.

证明 如在第一章§1中那样,令

$$p_{K,k}(f)=\sup_{x\in K,|s|\leq k}|D^s f(x)|$$

是确定$\mathfrak{D}_K(R^n)$的拓扑的诸半范数的一个. 若$V_k=\{f\in\mathfrak{D}_K(R^n);p_{K,k}(f)\leqq 1\}$. 那么$N_{V_k}$是$\{0\}$,且$X_{V_k}=X/N_{V_k}=\mathfrak{D}_K(R^n)/N_{V_k}$恰好是以$p_{K,k}$为其范数的空间$\mathfrak{D}_K(R^n)$. 如果$(k-j)>n$, 那末如同在上面定义1的系后面的例子中那样, 容易证明把X_{V_k}映入X_{V_j}内的典则映射是一个核变换. 于是$\mathfrak{D}_K(R^n)$是一个核空间.

定理 1 一个局部凸线性拓扑空间X是核的, 当且仅当对于0的任一凸、平衡邻域V, 典则映射$X\to\hat{X}_V$是核的.

证明 必要性. 若$U\subseteqq V$是X的0的一个凸、平衡邻域, 它使得典则映射$X_U\to\hat{X}_V$是核变换. 典则映射$T:X\to\hat{X}_V$是典则映射$V\to\hat{X}_U$与典则核变换$X_U\to\hat{X}_V$的积. 于是T必是一个核变换.

充分性. 若典则映射$T:X\to\hat{X}_V$是由核变换

$$Tx=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\langle x,f'_j\rangle y_j$$

给定的. 对于任何$\alpha>0$, 集合$\{x\in X;|\langle x,f'_j\rangle|\leqq\alpha$, 对于$j=1,2,\cdots\}$是$X$的0的一个凸、平衡邻域$U_\alpha$, 这是由于$\{f'_j\}\subseteqq X'$的等度连续性. 再者

$$\|Tx\|_V=\Big\|\sum_{j=1}c_j\langle x,f'_j\rangle y_j\Big\|_V=\alpha\sup_j\|y_j\|_V\sum_j c_j \text{ 当 } x\in U_\alpha \text{ 时.}$$

若α是使右端<1的这样小的数,那么$\|Tx\|_V<1$且$U_\alpha\subseteqq V$. 每一个f'_j都可认为是属于对偶空间X'_{U_α}的,从而

$$Tx=Tz=\sum_j c_j\langle x,f'_j\rangle y_j,\quad \text{当}(x-z)\in N_{U_\alpha}\text{时.}$$

因此典则映射$X_U\to\hat{X}_V$是由核变换

$$\tilde{x}_{U_\alpha}\to\sum_j c_j\langle\tilde{x}_{U_\alpha},f'_j\rangle y_j$$

给出的.

定理 2 若一个局部凸线性拓扑空间X是核的,那么对X的0的任何凸、平衡邻域V, 存在X的0的一个凸、平衡邻域$W\subseteqq V$使得$\hat{X}_W$是一个Hilbert空间.

证明 由

$$T\tilde{x}_U=\sum_j c_j\langle\tilde{x}_U,f'_j\rangle y'_j$$

定义的核典则映射$X_U\to\hat{X}_V(U\subseteqq V)$分解成两个映射

$$\alpha:\ X_U\to(l^2)\qquad \text{和}\qquad \beta:\ (l^2)\to\hat{X}_V,$$

其中α由$\tilde{x}_U\to\{c_j^{1/2}\langle\widetilde{X}_U,f'_j\rangle\}$给出,$\beta$由$\{\xi_j\}\to\sum_j c_j^{1/2}\xi_j y_j$给出,

的积. 从

$$\sum_j |c_j^{1/2}\langle \tilde{x}_U, f'_j\rangle|^2 \leq (\sup_j \|f'_j\|\cdot\|\tilde{x}_U\|_U)^2\cdot\Sigma c_j,$$

看出 α 的连续性是显然的. 而 β 的连续性, 则可用

$$\left\|\sum_j c_j^{1/2}\xi_j y_j\right\|_V^2 \leq \sum_j c_j\|y_j\|_V^2\cdot\sum_j|\xi_j|^2 \leq \sup_j\|y_j\|_V^2\cdot\|\{\xi_j\}\|_{l^2}^2\cdot\sum_j c_j$$

来证明. 若 U_2 是 $\hat{X}_V$ 的单位球在映射 β 下在 (l^2) 内的原像. 那末 U_2 是 (l^2) 的 0 的一个邻域, 从而含有以 (l^2) 的 0 为心的一个球 S. 设 W 是在连续映射 $\tilde{\alpha}$ 下 S 在 X 中的原像, 而 $\tilde{\alpha}$ 定义为连续典则映射 $X\to X_U$ 与连续映射 α: $X_U\to(l^2)$ 的积. 那么显然 $W\subseteq V$ 且对任何 $\tilde{x}_W\in X_W$, 有 $\|\tilde{x}_W\|_W=\inf_{x/\lambda\in W,\lambda>0}\lambda=\inf_{\tilde{\alpha}x/\lambda\in S,\lambda>0}\lambda=\|\tilde{\alpha}x\|_{l^2}\cdot(S$ 的半径).

因为 $\|\ \|_{l^2}$ 是 Hilbert 空间 (l^2) 内的范数, 所以 X_W 是一个 pre-Hilbert 空间.

系 若 X 是一个局部凸核空间. 那么对于 X 的 0 的任何凸、平衡邻域 V, 存在 X 的 0 的凸、平衡邻域 W_1 和 W_2 具有性质:

$$W_2\subseteq W_1\subseteq V,\ \hat{X}_{W_1} \text{ 和 } \hat{X}_{W_2} \text{ 均是 Hilbert 空间}$$
$$\text{且典则映射 } X\to\hat{X}_{W_2},\quad \hat{X}_{W_2}\to\hat{X}_{W_1},$$
$$\hat{X}_{W_1}\to\hat{X}_V \text{ 都是核变换.}$$

所以一个核空间 X 具有 0 的一个基本邻域系 $\{V_\alpha\}$ 使得 $\hat{X}_{V_\alpha}$ 都是 Hilbert 空间.

核空间进一步的性质 可以证明:

1. 一个核空间的线性子空间和商空间也都是核空间.
2. 一族核空间的拓扑向量积和一序列核空间的归纳极限也都是核空间.
3. 一序列核空间(其中每一个都是 F-空间)的归纳极限的强对偶也是核空间.

其证明可参看以上所引 Grothendieck[1] 的书第 47 面. 作为 § 2. 的推论, 序列 $\{\mathfrak{D}_{K_r}(R^n);\ r=1,2,\cdots\}$ (这里 K_r 是 R^n 的球 $|x|\leq r$) 的归纳极限——空间 $\mathfrak{D}(R^n)$ 是核的. 所以按 § 3, 空间 $\mathfrak{D}(R^n)'$ 也是核空间. 空间 $\mathfrak{E}(R^n)$, $\mathfrak{E}(R^n)'$, $\mathfrak{S}(R^n)$ 和 $\mathfrak{S}(R^n)'$ 也都是核空间.

最近 R. A. Minlos[1] 强调了核空间概念的重要性. 他证明了 Kolmogorov 的测度扩张定理的下述推广:

设 X 是一个核空间, 它的拓扑是通过 0 的凸、平衡邻域的一可数系来确定的. 设 X' 是 X 的强对偶空间. 形如

$$Z'=\{f'\in X';\ a_i<\langle x_i, f'\rangle<b_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\}$$

的一个集合定义为 X' 的一个柱形集. 假设给定一集函数 μ_0, 它对于所有的柱形集都有定义且 ≥ 0. 若 μ_0 对于具有固定点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的那些柱形集 Z' 是 σ-可加的. 那么, 在相容条件和连续性条件下存在 μ_0 的唯一确定的一个扩张. 它对于含有 X' 的一切柱形集的 X' 的诸集合的最小 σ-可加族的所有集合是 σ-可加的且是 ≥ 0 的.

关于这个结果的详细证明和应用可参看 I. M. Gelfand-N. Y. Vilenkin[3].

第十一章　赋范环和谱表示

数域(F)上的一个线性空间A称为(F)上的一个代数或一个环，如果对每一元素对$x, y\in A$，有唯一的积$xy\in A$被确定且具有性质：

$$
\begin{cases}
(xy)z=x(yz) & \text{（结合律），}\\
x(y+z)=xy+xz & \text{（分配律），}\\
\alpha\beta(xy)=(\alpha x)(\beta y).
\end{cases}
\tag{1}
$$

如果存在一单位元e使得对每一$x\in A$均有$ex=xe=x$，则A称为具有单位元的代数．A的单位元e如果存在的话，它是唯一确定的．因为若e'为A的另一单位元，则必有$ee'=e=e'$．如果乘法是可交换的，亦即对每一对$x, y\in A$恒成立$xy=yx$，则A称为可交换代数．设A为一具有单位元e的代数．若对一个$x\in A$存在一$x'\in A$使得$xx'=x'x=e$，则x'称为x的逆．x的逆x'若存在的话，则是唯一确定的．因为若x''为x的另一个逆，则必有

$$x''(xx')=x''e=x''=(x''x)x'=ex'=x'. \tag{2}$$

因此若x有逆，我们以x^{-1}记x的逆．

一个代数称为一 Banach 代数，或简称B-代数，如果此代数是B-空间且满足

$$\|xy\|\leqq\|x\|\|y\|.$$

不等式

$$
\begin{aligned}
\|x_ny_n-xy\|&\leqq\|x_n(y_n-y)\|+\|(x_n-x)y\|\\
&\leqq\|x_n\|\|(y_n-y)\|+\|(x_n-x)\|\|y\|
\end{aligned}
$$

表明xy是两个变量的连续函数．

例 1　设X为一B-空间．则$L(X, X)$按算子和$T+S$及算子积TS成一具有单位元的B-代数；恒等算子I是这个代数$L(X, X)$的单位元，同时算子范数$\|T\|$是代数$L(X, X)$的元T的范数．

例 2　设S为一紧拓扑空间．则$C(S)$按$(x_1+x_2)(s)=x_1(s)+x_2(s)$，$(\alpha x)(s)=\alpha x(s)$，$(x_1x_2)(s)=x_1(s)x_2(s)$及$\|x\|=\sup\limits_{s\in S}|x(s)|$为一$B$-代数．

例 3　设B为$0\leqq s\leqq 1$上能表达成绝对收敛的 Fourier 级数

$$x(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi ins}\qquad \text{其中}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|<\infty \tag{3}$$

的连续函数$x(s)$的全体．则易知按通常的函数和及函数乘法，并在范数

$$\|x\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| \tag{4}$$

下B为一具有单位元的可交换的B-代数．

在后两例中单位元由函数$e(s)\equiv 1$所给定且$\|e\|=1$．在以后的诸节中，我们将涉及具有单

位元 e 且

$$\|e\|=1 \tag{5}$$

的可交换 B-代数. 此种代数称为**赋范环**.

历史梗概 Banach 代数的概念是由 M. Nagumo[1]引进分析中的. 他证明了 Cauchy 的复函数理论能推广到取值于此种代数中的函数上，并把它用到有界线性算子的预解式围绕孤立奇点的研究中去. 这个结果是本书第八章 § 8 中给出的那些结果的一个抽象处理. K. Yosida[11]证明了一个嵌入一 B-代数的连通群为一 Lie 群的充要条件是这个群是局部紧的. 这个结果是 J. von Neumann[6] 关于矩阵群的一个结果的推广. 请参看 E. Hille-R. S. Phillips [1], 在此书中转载了 K. Yosida[11]的结果.

赋范环的**理想理论**由I. M. Gelfand[2]创始. 他已经证明此种环能表示成定义在该环的极大理想空间上的连续函数环. 借助于这个表示，我们能给出 Hilbert 空间中有界正规算子的谱分解的一个不用积分的处理；参看 K. Yosida[12]. 这个结果将在以下诸节中展示. **Gelfand 表示**也可用于 N. Wiener[2]的陶贝尔 (Tauber) 定理的新证明. 在本章的最后一节中我们将揭示这个应用. 至于 B-代数的详情请参看N. A. Naimark[1], C. E. Richart[1]及 I. M. Gelfand-D. A. Raikov-G. E. Šilov[5].

§ 1. 赋范环的极大理想

我们将涉及具有单位元 e 且适合$\|e\|=1$ 的可交换 B-代数 B.

定义 1 B 的一个子集 J 称为 B 的一个**理想**, 如果 $x, y\in J$ 导致$(\alpha x+\beta y)\in J$同时对每一$z\in B$恒有 $zx\in J$. 不同于 B 和$\{0\}$的理想称为**非平凡理想**. 一个非平凡理想 J 称为一**极大理想**，如果不存在包含 J 作为真子集的非平凡理想.

命题 1 B 的任一非平凡理想 J_0 含于一极大理想 J 中.

证明 令 $[J_0]$ 为包含 J_0 的一切非平凡理想的集合. 我们按包含关系赋予$[J_0]$中的理想以序, 亦即, 若 J_1 为 J_2 的一子集则记为 $J_1\prec J_2$. 假定 $\{J_\alpha\}$是$[J_0]$ 的一线性有序子集并令 $J_\beta=\bigcup\limits_{J_\alpha\in\{J_\alpha\}} J_\alpha$. 我们来证明 J_β 是$\{J_\alpha\}$的一个上界. 因若 $x, y\in J_\beta$, 则存在理想 J_{α_1} 和 J_{α_2} 使得 $x\in J_{\alpha_1}$且 $y\in J_{\alpha_2}$. 由于$\{J_\alpha\}$是线性有序的, 故 $J_{\alpha_1}\prec J_{\alpha_2}$(或 $J_{\alpha_1}\succ J_{\alpha_2}$), 于是 x 和 y 均属于 J_{α_2}; 由此$(x-y)\in J_{\alpha_2}\subseteq J_\beta$ 且对任意 $z\in B$ 恒有 $zx\in J_{\alpha_2}\subseteq J_\beta$. 这就证明 J_β 为一理想. 因为单位元 e 不包含在任意 J_α 中, 所以 e 不包含在 $J_\beta=\bigcup\limits_{J_\alpha\in\{J_\alpha\}} J_\alpha$中. 因此 J_β 是包含每一 J_α 的非平凡理想. 所以, 根据 Zorn 引理至少存在一个包含 J_0 的极大理想.

系 B的元 x 有逆 $x^{-1}\in B$使得 $x^{-1}x=xx^{-1}=e$ 的充要条件为 x 不包含于任何极大理想之中.

证明 若 $x^{-1}\in B$ 存在, 则任一理想 $J\ni x$ 必包含 $e=xx^{-1}$, 故 J 必与 B 本身重合. 反之设 x 不包含于任何极大理想之中. 则理想 $xB=\{xb; b\in B\}\neq\{0\}$必与 B 本身重合，因为否则至少存在一个包含 $xB\ni x=xe$ 的极大理想. 由此得 $xB=B$, 因而必存在一元 $b\in B$ 使得 $xb=e$. 根据 B 的可交换性, 我们有 $xb=bx=e$, 亦即 $b=x^{-1}$.

命题 2　极大理想 J 是 B 的闭线性子空间.

证明　根据 B 中代数运算(加法，乘法和数乘)的连续性，强闭包 J^a 也是一个包含 J 的理想. 假定 $J^a \neq J$. 则由于理想 J 的极大性，必有 $J^a = B$. 因此 $e \in J^a$，于是存在一 $x \in J$ 使得 $\|e-x\|<1$. x 有逆 $x^{-1} \in B$，此逆由 Neumann 级数

$$e+(e-x)+(e-x)^2+\cdots$$

给出. 因为由 $\|(e-x)^n\| \leq \|e-x\|^n$，这个级数收敛于一个 $\in B$ 的元，它正是 x 的逆，这一点可把级数乘以 $x=e-(e-x)$ 而知. 因而 $e=x^{-1}x \in J$，故 J 不能为极大理想.

命题 3　对 B 的任一理想 J，如果 $(x-y) \in J$，我们记

$$x \equiv y(\bmod J) \text{ 或 } x \sim y(\bmod J) \text{ 或简记成 } x \sim y. \tag{1}$$

此时 $x \sim y$ 是一个等价关系，亦即我们有

$$\begin{cases} x \sim x \text{ (自反性)}, \\ x \sim y \quad \text{导致 } y \sim x \text{ (对称性)}, \\ x \sim y \quad \text{又 } y \sim z \text{ 导致 } x \sim z \text{ (传递性)}. \end{cases}$$

我们以 $\bar{x}$ 表示集合 $\{y;\ (y-x) \in J\}$；它称为含 x 的类 $(\bmod J)$. 则类 $\overline{(x+y)}$，$\overline{\alpha x}$ 和 $\overline{(xy)}$ 的确定与类 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 中的元 x 和 y 的选取无关.

证明　我们必须证明，由 $x \sim x'$，$y \sim y'$ 必导致 $(x+y) \sim (x'+y')$，$\alpha x \sim \alpha x'$ 及 $xy \sim x'y'$. 这些关系从 J 是理想这个条件来看是清晰的. 例如，根据 $(x-x') \in J$ 及 $(y-y') \in J$ 我们有 $xy-x'y'=(x-x')y+x'(y-y') \in J$.

系　类 $\bar{x}(\bmod J)$ 的集合按运算

$$\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y},\quad \alpha\bar{x}=\overline{\alpha x},\quad \bar{x}\bar{y}=\overline{xy} \tag{2}$$

构成一个代数.

定义 2　上面得到的代数称为 $B(\bmod J)$ 的剩余类代数，并记为 B/J. 因此代数 B 到 $\bar{B}=B/J$ 上的映射 $x \to \bar{x}$ 是一个同态映射，亦即关系(2)成立.

命题 4　设 J 是 B 的一极大理想. 则 $\bar{B}=B/J$ 是一个域，亦即每一非零元 $\bar{x} \in \bar{B}$ 有逆 $\bar{x}^{-1} \in \bar{B}$ 使得 $\bar{x}^{-1}\bar{x}=\bar{x}\bar{x}^{-1}=\bar{e}$.

证明　假定逆 $\bar{x}^{-1}$ 不存在. 则集合 $\bar{x}\bar{B}=\{\bar{x}\bar{b};\ \bar{b} \in \bar{B}\}$ 是 $\bar{B}$ 的一个理想. 它是非平凡的，因为它不包含 $\bar{e}$，但包含 $\bar{x} \neq 0$. 一个理想在同态下的逆象是一个理想. 所以 B 包含一个以 J 为真子集的非平凡理想，这与理想 J 的极大性矛盾.

我们已能证明

定理　设 B 为复数域上的一个赋范环，J 为 B 的一个极大理想. 则剩余类代数 $\bar{B}=B/J$ 在下述意义下同构于复数域，即：每一 $\bar{x} \in \bar{B}$ 可唯一地表示成 $\bar{x}=\xi\bar{e}$，其中 ξ 是一复数.

证明　我们将证明 $\bar{B}=B/J$ 按范数

$$\|\bar{x}\|=\inf_{x \in \bar{x}}\|x\| \tag{3}$$

成一赋范环. 如果这点得到证明，则 B/J 是一赋范域，因而根据第五章 § 3 中的 Gelfand-Mazur

定理, $\bar{B}=B/J$ 就同构于复数域.

而今我们有 $\|\alpha\bar{x}\|=|\alpha|\,\|\bar{x}\|$, 且 $\|\bar{x}+\bar{y}\|=\inf\limits_{x\in\bar{x},y\in\bar{y}}\|x+y\|\leq\inf\limits_{x\in\bar{x}}\|x\|+\inf\limits_{y\in\bar{y}}\|y\|=\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|$; $\|\bar{x}\bar{y}\|\leq\|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|$ 可类似地证明. 若 $\|\bar{x}\|=0$, 则存在一序列 $\{x_n\}\subseteq\bar{x}$ 使得 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 因而对任一 $x\in\bar{x}$, 有 $(x-x_n)\in J$, 故 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(x-x_n)=x$, 这证明 $x\in J^a=J$, 亦即 $\bar{x}=\bar{0}$. 因而 $\|\bar{x}\|=0$ 等价于 $\bar{x}=\bar{0}$. 我们有 $\|\bar{e}\|\leq\|e\|=1$. 若 $\|\bar{e}\|<1$, 则存在元 $x\in J$ 使得 $\|e-x\|<1$. 象命题 2 的证明中论证的一样, 逆 x^{-1} 存在, 这是与命题 1 的系矛盾的. 因此必有 $\|\bar{e}\|=1$. 最后, 由于 B 是一 B-空间以及根据命题 2 J 是一闭线性子空间, 所以商空间 $\bar{B}=B/J$ 关于范数(3)是完备的 (参看第一章 §11). 这样我们便证明了定理.

系　我们将以 $x(J)$ 记表示式 $\bar{x}=\xi\bar{e}$ 中的数 ξ. 因此, 对每一 $x\in B$, 我们得到一个定义在 B 的所有极大理想的集合 $\{J\}$ 上的复值函数 $x(J)$. 此时有

$$(x+y)(J)=x(J)+y(J),\qquad(\alpha x)(J)=\alpha x(J),$$
$$(xy)(J)=x(J)y(J),\qquad\text{同时}\quad e(J)\equiv1.\tag{4}$$

此外还有

$$\sup_{J\in\{J\}}|x(J)|\leq\|x\|,\tag{5}$$

及

$$\sup_{J\in\{J\}}|x(J)|=0\ \text{导致}\ x=0\ \text{的充要条件为}\ \bigcap_{J\in\{J\}}J=\{0\}.\tag{6}$$

证明　代数 B 到剩余类代数 $\bar{B}=B/J$ 上的映射 $x\to\bar{x}=x(J)\bar{e}$ 是一个同态映射, 亦即关系(2)成立. 因而我们有(4). 根据

$$|\xi|=|\xi|\,\|\bar{e}\|=\|\bar{x}\|=\inf_{x\in\bar{x}}\|x\|\leq\|x\|$$

不等式(5)得证. 由于 $x(J)=0$ 在 $\{J\}$ 上恒成立的充要条件为 $x\in\bigcap\limits_{J\in\{J\}}J$, 故性质(6)自明.

定义 3　赋范环 B 通过定义在 B 的所有极大理想的集合 $\{J\}$ 上的函数 $x(J)$ 的环而表出的表示

$$x\to x(J)\tag{7}$$

称为 B 的 Gelfand 表示.

§2. 根. 半单性

定义 1　设 B 为复数域上的赋范环, $\{J\}$ 为 B 的极大理想的全体. 则理想 $\bigcap\limits_{J\in\{J\}}J$ 称为环 B 的根. B 称为半单的, 如果它的根退化成零理想 $\{0\}$.

定理 1　对任一 $x\in B$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}=\sup_{J\in\{J\}}|x(J)|.\tag{1}$$

证明 令 $\alpha=\sup\limits_{J\in\{J\}}|x(J)|$. 则根据 $\|x^n\|\geqq|x^n(J)|=|x(J)|^n$, 我们有 $\|x^n\|\geqq\alpha^n$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}\geqq\alpha$. 因此我们必须证明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x^n\|^{1/n}\leqq\alpha$.

设 $|\beta|>\alpha$. 则对任一 $J\in\{J\}$ 恒有 $x(J)-\beta\neq0$, 亦即 $(x-\beta e)\overline{\in}J$. 因而逆 $(\beta e-x)^{-1}$ 存在. 置 $\beta^{-1}=\lambda$, 即知只要 $|\lambda|<\alpha^{-1}$ 则逆 $(\beta e-x)^{-1}=\lambda(e-\lambda x)^{-1}$ 存在. 此外, 如第八章 §2 中定理 2 中一样, 我们知对 $|\lambda|<\alpha^{-1}$, $\lambda(e-\lambda x)^{-1}$ 关于 λ 解析. 因而有 Taylor 展式

$$\lambda(e-\lambda x)^{-1}=\lambda(e+\lambda x_1+\lambda^2x_2+\cdots+\lambda^nx_n+\cdots).$$

关系 $x_n=x^n$ 可由 Neumann 级数 $(e-\lambda x)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^nx^n$ 得到, 后面的展式对 $\|\lambda x\|<1$ 是成立的. 根据上面的 Taylor 级数的收敛性, 我们知

$$\lim_{n\to\infty}\|\lambda^nx^n\|=0 \quad 若 \quad |\lambda|<\alpha^{-1}.$$

因此当 $|\lambda|<\alpha^{-1}$ 时对大的 n 成立 $\|x^n\|=|\lambda|^{-n}\|\lambda^nx^n|<|\lambda|^{-n}$, 所以

当 $|\lambda|^{-1}<\alpha$ 时 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x^n\|^{1/n}\leqq|\lambda|^{-1}$, 亦即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x^n\|^{1/n}\leqq\alpha$.

系 B 的根 $R=\bigcap\limits_{J\in\{J\}}J$ 重合于由

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}=0 \tag{2}$$

定义的广义幂零元 $x\in B$ 的全体.

定义 2 一复数 λ 称为属于 $x\in B$ 的谱, 如果逆 $(x-\lambda e)^{-1}$ 在 B 中不存在.

如果 λ 属于 x 的谱, 则存在极大理想 J 使得 $(x-\lambda e)\in J$. 反之, 若 $(x-\lambda e)$ 属于极大理想 J, 则逆不存在. 因而我们得

定理 2 $x\in B$ 的谱重合于函数 $x(J)$ 在由 B 的所有极大理想组成的空间 $\{J\}$ 上所取到的值的全体.

Tychonov 定理的应用 对任一 $J_0\in\{J\}$, 我们按

$$\{J\in\{J\};|x_i(J)-x_i(J_0)|<\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,n)\}, \tag{3}$$

定义 J_0 的一基本邻域系, 其中 $\varepsilon_i>0$, n 和 $x_i\in B$ 为任意. 于是 $\{J\}$ 成为一拓扑空间, 且每一 $x(J)$, $x\in B$, 成为 $\{J\}$ 上的连续函数. 我们只须验证若 $J_0\neq J_1$, 则存在 J_0 的一邻域 V_0 和 J_1 的一邻域 V_1, 它们不相交. 这可如下完成. 令 $x_0\in J_0$ 同时 $x_0\overline{\in}J_1$ 从而 $x_0(J_0)=0$ 而 $x_0(J_1)=\alpha\neq0$. 则 $V_0=\{J\in\{J\};|x_0(J)|<|\alpha|/2\}$ 和 $V_1=\{J\in\{J\};|x_0(J)-x_0(J_1)|<|\alpha|/2\}$ 不相交.

定理 3 如上拓扑化了的空间 $\{J\}$ 为一紧空间.

证明 对每一 $x\in B$, 我们配上复 z-平面上的紧集

$$K_x=\{z;|z|\leqq\|x\|\}.$$

于是根据 Tychonov 定理, 拓扑积

$$S=\prod_{x\in B}K_x$$

为一紧空间. 请参看第 0 章. 对任一极大理想 $J_0\in\{J\}$, 我们指定点

$$\prod_{x\in B} x(J_0)=s(J_0)\in S.$$

借助于上面的对应 $J_0\to s(J_0)$, $\{J\}$一一对应于 S 的子集 S_1. 此外, $\{J\}$的拓扑是同作为 S 的子集的 S_1 的相对拓扑完全一样的. 因而, 若我们能证明 S_1 是紧空间 S 的一个闭子集, 则它的拓扑象 $\{J\}$是紧的.

为了证明 S_1 是闭集, 我们考察集合 S_1 在 S 中的聚点 $\omega=\prod_{x\in B}\lambda_x\in S$. 我们将证明映射 $x\to\lambda_x$ 是代数 B 到复数域(K)中的一个同胚. 于是, 由 B/J_0 与(K)的同构可知, $J_0=\{x;\lambda_x=0\}$成为 B 的一个极大理想且 $(x-\lambda_x e)\in J_0$, 亦即 $x(J_0)=\lambda_x$. 这就证明了点 $\omega=\prod_{x\in B}\lambda_x=\prod_{x\in B}x(J_0)$ 属于 S_1.

因此我们必须证明

$$\lambda_{x+y}=\lambda_x+\lambda_y,\quad \lambda_{\alpha x}=\alpha\lambda_x,\quad \lambda_{xy}=\lambda_x\lambda_y,\quad \lambda_e=1.$$

例如我们来证明 $\lambda_{x+y}=\lambda_x+\lambda_y$. 由于 $\omega=\prod_{x\in B}\lambda_x$ 是 S_1 的一聚点, 故对任一 $\varepsilon>0$, 存在一极大理想 J 使得

$$|\lambda_x-x(J)|<\varepsilon,\quad |\lambda_y-y(J)|<\varepsilon,\quad |\lambda_{x+y}-(x+y)(J)|<\varepsilon.$$

根据$(x+y)(J)=x(J)+y(J)$及 $\varepsilon>0$ 的任意性, 易知 $\lambda_{x+y}=\lambda_x+\lambda_y$ 为真.

至此我们能把关于赋范环 B 的 Gelfand 表示的基本事实叙述成下面的形式:

定理 4 复数域上的赋范环 B 可同态地表示成定义在 B 的所有极大理想 J 的紧空间 $\{J\}$上的函数 $x(J)$ 的环. B 的根 R 恰好是由那些以在$\{J\}$ 上恒为零的函数所表示的元所组成. 表示 $x\to x(J)$为同构的充要条件是 B 是半单的.

(第 0 章的)**Stone-Weierstrass 定理的应用** 上面得到的函数环是在具有一致收敛拓扑的 $\{J\}$ 上的所有复值连续函数空间中稠密的, 只要环 B 在下述意义下是*对称的*(或*对合的*):

$$\text{对任一 } x\in B, \text{存在 } x^*\in B \text{ 使得在}\{J\}\text{上 } x^*(J)=\overline{x(J)}. \tag{4}$$

Gelfand 表示的例子

例 1 设 $B=C(S)$, 其中 S 为一紧拓扑空间, 又 J_0 为 $C(S)$的一极大理想. 则存在一点 $s_0\in S$ 使得对所有 $x\in J_0$ 均有 $x(s_0)=0$. 否则, 对任一 $s_\alpha\in S$, 存在一 $x_\alpha\in J_0$ 使得 $x_\alpha(s_\alpha)\neq 0$. 由于 $x_\alpha(s)$是连续函数, 故存在 s_α 的一邻域 V_α 使得在 V_α 中 $x_\alpha(s)\neq 0$. 因 S 为紧, 故存在有限组, 例如 $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \cdots, V_{\alpha_n}$, 使得 $\bigcup_{j=1}^{n}V_{\alpha_j}=S$. 因而函数

$$x(s)=\sum_{i=1}^{n}\overline{x_{\alpha_i}(s)}x_{\alpha_i}(s)\in J_0$$

在整个 S 上不为零, 于是 $x\in J_0$ 的逆 x^{-1}, $x^{-1}(s)=x(s)^{-1}$, 存在, 这与理想 J_0 的极大性相违背. 因此我们得知 J_0 包含在极大理想 $J'=\{x\in B; x(s_0)=0\}$中. 根据 J_0 的极大性, 必有 $J_0=J'$. 这样

一来我们即知 B 的极大理想 J 的空间 $\{J\}$ 是一一对应于 S 的点 s.

例 2 设 B 是 $0\leqq s\leqq 1$ 上的能表成绝对收敛的 Fourier 级数

$$x(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi isn},\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|<\infty$$

的函数 $x(s)$ 的全体. B 按运算 $(x+y)(s)=x(s)+y(s)$, $(xy)(s)=x(s)y(s)$ 和范数 $\|x\|=\sum_j|c_j|$ 为一赋范环. 设 J_0 为 B 的一极大理想. 令 $e^{2\pi is}=x_1$. 则 $x_1^{-1}=e^{-2\pi is}$, 因而根据 $|x_1(J_0)|\leqq\|x_1\|=1$, $|x_1^{-1}(J)|=|x_1(J)^{-1}|\leqq\|x_1^{-1}\|=1$ 即知 $|x_1(J_0)|=1$. 于是存在一点 s_0, $0\leqq s_0\leqq 1$, 使得 $x_1(J_0)=e^{2\pi is_0}$. 因此 $x_n=e^{2\pi isn}=x_1^n$ 满足 $x_n(J_0)=e^{2\pi is_0n}$, 所以 $x(J_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi is_0n}=x(s_0)$. 这样一来, 我们即知对 B 的任一极大理想, 存在一点 s_0, $0\leqq s_0\leqq 1$, 使得对一切 $x\in B$, 同态 $x\to x(J_0)$ 是由 $x(J_0)=x(s_0)$ 所给出. 同样明显的是映射 $x\to x(s_0)$ 给出了代数 B 到复数域中的一个同态所以我们即知 B 的极大理想空间重合于 $\{e^{2\pi is};0\leqq s\leqq 1\}$.

系 (N. Wiener 定理) 如果一绝对收敛的 Fourier 级数 $x(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi isn}$ 在 $[0,\ 1]$ 上不为零, 则函数 $1/x(s)$ 也可表成绝对收敛的 Fourier 级数. 因为, x 不属于上面的例 2 中赋范环的任一极大理想.

例 3 取 $B_1=C[0,1]$, 并对 $x,y\in B_1$ 定义

$$(x+y)(s)=x(s)+y(s),\qquad (\alpha x)(s)=\alpha x(s),$$

$$(xy)(s)=\int_0^s x(s-t)y(t)dt\quad 又\quad \|x\|=\sup_{s\in[0,1]}|x(s)|.$$

B_1 为一无单位元的可交换 B-代数. 按法则 $ex=xe=x$, $\|e\|=1$, 形式地加一单位元 e, 则集合 $B=\{z=\lambda e+x;x\in B_1\}$ 按运算

$$\begin{cases}(\lambda_1e+x_1)+(\lambda_2e+x_2)=(\lambda_1+\lambda_2)e+(x_1+x_2),\ \alpha(\lambda e+x)\\ =\alpha\lambda e+\alpha x,\ (\lambda_1e+x_1)(\lambda_2e+x_2)=\lambda_1\lambda_2e+\lambda_1x_2+\lambda_2x_1+x_1x_2\\ 又\ \|\lambda e+x\|=|\lambda|+\|x\|\end{cases}$$

成为一赋范环. 根据归纳法, 我们有

$$|x^2(s)|\leqq M^2s,\ |x^3(s)|\leqq M^3\frac{s^2}{2},\ \cdots,\ |x^n(s)|\leqq M^n\frac{s^{n-1}}{(n-1)!},\ \cdots$$

其中 $M=\sup_{s\in[0,1]}|x(s)|=\|x\|$. 因此由于 $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n}=\infty$ 这一事实, 每一 $x\in B_1$ 是 B 的广义幂零元.

§3. 有界正规算子的谱分解

设 X 为一 Hilbert 空间, 又设一组 $\in L(X,X)$ 的有界正规算子 M 适合条件:

$$T,S\in M\ 导致\ TS=ST\quad (可交换性),\tag{1}$$

$$T\in M\ 导致\ T^*\in M.\tag{2}$$

由(一个)有界正规算子 $T\in L(X,X)$ 及其伴随算子 T^* 组成的系统(组)确实适合(1)和(2).

设 M' 为与每一 $T\in M$ 可交换的 $\in L(X,X)$ 的算子的全体, 并设 $B=M''=(M')'$ 为与每一个算子 $S\in M'$ 可交换的 $\in L(X,X)$ 的算子的全体.

命题 1 B 的每一元是正规算子. B 按算子和, 算子积. 单位元 I (恒等算子) 和算子范数 $\|T\|$ 成为复数域上的一赋范环.

证明 根据(1) $M\subseteq M'$, 故 $M'\supseteq M''$. 因而 $M'''=(M'')'\supseteq M''$, 所以 $B=M''$ 是可交换环. 恒等算子 I 属于 B 并且是这个代数 B 的单位元. 根据(2), 易知 $\in B$ 的每一算子是正规的. 由于在代数 B 中乘法 TS 及伴随的形成 $T\to T^*$ 关于算子范数是连续的, 故易知环 B 关于算子范数是完备的.

定理 1 借助于 Gelfand 表示

$$B\ni T\to T(J),\tag{3}$$

环 B 同构地表示成在 B 的所有极大理想 J 的紧空间 $\{J\}$ 上的全体连续函数的代数 $C(\{J\})$, 且使得

$$\|T\|=\sup_{J\in\{J\}}|T(J)|;\tag{4}$$

当且仅当 T 为自伴时, $T(J)$ 为 $\{J\}$ 上的实值函数; (5)

当且仅当 T 为自伴且正时, 亦即对一切 $x\in X$, $(Tx,x)\geqq 0$ 时, 在 $\{J\}$ 上 $J(J)\geqq 0$. (6)

证明 我们首先指明, 对任一有界正规算子 T,

$$\|T^2\|=\|T\|^2.\tag{7}$$

由 T 的正规性, 知 $H=TT^*=T^*T$ 为自伴. 因而根据第七章§3 中定理 3 有

$$\|T\|^2=\sup_{\|x\|\leq 1}(Tx,Tx)=\sup_{\|x\|\leq 1}|(T^*Tx,x)|=\|H\|=\|T^*T\|=\|TT^*\|.$$

由于 $(T^*)^2=(T^2)^*$, 故 T^2 和 T 一样是正规的. 因此, 如上得 $\|T^2\|^2=\|T^{*2}T^2\|$, 根据可交换性 $TT^*=T^*T$, 它又等于 $\|T^2\|^2=\|H^2\|$. 因 H^2 为自伴, 再次由第七章§3 之定理 3 得

$$\|H\|^2=\sup_{\|x\|\leq 1}(Hx,Hx)=\sup_{\|x\|\leq 1}|(H^2x,x)|=\|H^2\|.$$

所以, $\|T^2\|^2=\|H^2\|=\|H\|^2=(\|T\|^2)^2$, 亦即 $\|T^2\|=\|T\|^2$.

由(7)我们有 $\|T\|=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$, 因为我们已经知道右端的极限存在(见第八章§2 之式(3)). 因而, 根据前节的定理 4, 表示(3)是同构的且(4)为真.

(5)的证明 设自伴的 $T\in B$ 对某一 $J_0\in\{J\}$ 满足 $T(J_0)=a+ib$, 其中 $b\neq 0$. 则自伴算子 $S=(T-aI)/b\in B$ 满足 $(I+S^2)(J_0)=1+i^2=0$, 故 $(I+S^2)$ 在 B 中无逆. 但是, 根据第七章§3 之定理2, $(I+S^2)$ 有一确属于 B 的逆. 因此, 若 $T\in B$ 是自伴的, $T(J)$ 必为实值. 设 $T\in B$ 不是自伴的, 并令

$$T=\frac{T+T^*}{2}+i\frac{T-T^*}{2i}.$$

则由于右端的第一项是自伴的, 故自伴算子 $(T-T^*)/2i$ 必 $\neq 0$. 因此根据表示(3)的同构性, 必

存在一$J_0\in\{J\}$使得$\frac{T-T^*}{2i}(J_0)\neq 0$. 因而$T(J_0)=\frac{T+T^*}{2}(J_0)+i\frac{T-T^*}{2i}(J_0)$不是实的. 因为如前所证, 自伴算子被表示成实函数.

(6)的证明　我们首先指明

$$\text{在}\{J\}\text{上}\ T^*(J)=\overline{T(J)}. \tag{8}$$

因为自伴算子$(T+T^*)/2$和$(T-T^*)/2i$被表示成实函数, 故这是显然的. 所以, 由(4)和前节的结果, 环B表示成$\{J\}$上满足(5)和(8)的所有连续复值函数的环. 设在整个$\{J\}$上均有$T(J)\geqq 0$. 则$S(J)=T(J)^{1/2}$为$\{J\}$上的连续函数. 因而由表示(3)的同构性, 得$S^2=T$. 根据(5)我们有$S=S^*$. 因而$(Tx,x)=(S^2x,x)=(Sx,Sx)\geqq 0$. 反之, 为了证明条件$(Tx,x)\geqq 0$(对一切$x\in X$)导致$T(J)\geqq 0$(在整个$\{J\}$上), 我们规定$T_1(J)=\max(T(J),\ 0)$及$T_2(J)=T_1(J)-T(J)$. 则根据我们上面已证明的, 知$T_1$和$T_2$均$\in B$, 且是自伴和正的: 对一切$x\in X$ $(T_jx,x)\geqq 0$ $(j=1,2)$. 此外我们有$T_1T_2=0$及$T_2=T_1-T$. 此前一等式系由$T_1(J)T_2(J)=0$所保证.

所以, 我们有

$$0\leqq(TT_2x,T_2x)=(-T_2^2x,T_2x)=-(T_2^3x,x)=-(T_2T_2x,T_2x)\leqq 0.$$

因此$(T_2^3x,x)=0$, 故根据第七章§3的定理3必有$T_2^3=0$. 因而由$\|T_2\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|T_2^n\|^{1/n}$, 即得$T_2=0$. 这样我们便证明了$T=T_1$, 因而在$\{J\}$上$T(J)\geqq 0$.

因此当T为自伴且正时, 我们将记成$T\geqq 0$. 当$(S-T)\geqq 0$时我们还记作$S\geqq T$.

定理2　设$\{T_n\}\subseteq B$为自伴算子的一个序列, 它满足

$$0\leqq T_1\leqq T_2\leqq\cdots\leqq T_2\leqq\cdots\leqq S\in B. \tag{9}$$

则对任意$x\in X$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=Tx$存在, 亦即$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$存在且$T\in B$, $S\geqq T\geqq T_n(n=1,2,\cdots)$.

证明　首先我们注意, 根据(6),

$$E,F\in B\ \text{且}\ E\geqq 0, F\geqq 0\ \text{导致}\ E+F\geqq 0\ \text{同时}\ EF\geqq 0. \tag{10}$$

因此$0\leqq T_1^2\leqq T_2^2\leqq\cdots\leqq T_n^2\leqq\cdots\leqq S^2$. 于是, 对任意$x\in X$, 有限极限$\lim\limits_{n\to\infty}(T_n^2x,x)$存在. 因为由(6)有$T_{n+k}^2\geqq T_{n+k}T_n\geqq T_n^2$, 故我们又有

$$\lim_{n,k\to\infty}(T_{n+k}^2x,x)=\lim_{n,k\to\infty}(T_{n+k}T_nx,x)=\lim_{n\to\infty}(T_n^2x,x).$$

所以, $\lim\limits_{n,m\to\infty}((T_n-T_m)^2x,\ x)=\lim\limits_{n,m\to\infty}\|T_nx-T_mx\|^2=0$使得$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=Tx$存在. 至于$T\in B$及$S\geqq T\geqq T_n$由证明过程而自明.

定理3　设实值函数序列$\{T_n(J)\}$适合条件

$$\text{在}\{J\}\text{上}\ 0\leqq T_1(J)\leqq T_2(J)\leqq\cdots\leqq T_n(J)\leqq\cdots\leqq\alpha\quad(\text{有限常数}), \tag{11}$$

其中$T_n\in B$. 则由(6)和定理2, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$存在. 在这种情况下, 我们能证明

$$D=\{J\in\{J\};T(J)\neq\lim_{n\to\infty}T_n(J)\}$$

是第一纲集, 故$D^c=\{J\}-D$在$\{J\}$中稠密.

证明　根据定理2, $T\geqq T_n$故在$\{J\}$上$T(J)\geqq\lim\limits_{n\to\infty}T_n(J)$. 由第0章§2之Baire定理, 函数

$\lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$的不连续点的集合是第一纲集. 因此, 若集合$D$不是第一纲的, 则至少存在一点$J_0\in D$, 在此点$\lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$是连续的. 换言之, 存在一正数$\delta$和$\{J\}$的一个开集$V(J_0)\ni J_0$使得

$$T(J)\geqq\delta+\lim_{n\to\infty} T_n(J) \qquad \text{只要 } J\in V(J_0).$$

由于紧空间$\{J\}$是正规的, 又由于在$\{J\}$上$T(J)\geqq\lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$, 故根据 Uryson 定理我们可以构造一开集$V_1(J_0)\ni J_0$及一函数$W(J)\in C(\{J\})$使得在$\{J\}$上$0\leqq W(J)\leqq 0$, $V_1(J_0)^a\subseteqq V(J_0)$, 在$V_1(J_0)$上$W(J)=\delta/2$同时在$V(J_0)^C$上$W(J)=0$. 因而在$\{J\}$上$T(J)-W(J)\geqq\lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$, 故由(6)得$T-W\geqq T_n(n=1, 2, \cdots)$. 根据同构(3), 由$W(J)\not\equiv 0$必导致$W\neq 0$, $W\geqq 0$. 因此再次根据(6)知$T-W\geqq s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$, 这与$T=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$矛盾.

最后, 因为$\{J\}$是一紧空间, 故第一纲集D的补集$D^C=\{J\}-D$必在$\{J\}$中稠密.

现在我们能证明(K. Yosida[12])

算子$\in B$的谱分解或谱表示.

考察$\{J\}$上这样一种复值有界函数$T'(J)$的全体的集合$C'(J)$, 这种$T'(J)$与某连续函数$T(J)$仅只在一个第一纲集上有所不同. 我们把$C'(J)$中的二个函数视为相同的, 如果这二个函数仅只在一个第一纲集上不相同. 于是$C'(J)$便被分成各种类. 因为第一纲集的补集在紧空间$\{J\}$中稠密, 故每一类T'恰好包含一个连续函数$T(J)$, 它通过同构$B\longleftrightarrow C(\{J\})$与一个元$T\in B$对应.

对任一$T\in B$及任一复数$z=\lambda+i\mu$, 我们令$E_z=\in B$的这样一个元, 它对应着包含集合$\{J\in\{J\}; ReT(J)<\lambda,\ ImT(J)<\mu\}$的特征函数$E'(J)$的这个类$E'_z$. 易知存在复变量的连续函数$f_n$的一个单调增序列, 使得$E'_z(J)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(T(J))$, 故$E'_z(J)\in C'(J)$. 于是我们有

$$\Big| T(J)-\sum_{j=2}^{n}(\lambda_j+i\mu_j)(E'_{\lambda_j+i\mu_j}(J)+E'_{\lambda_{j-1}+i\mu_{j-1}}(J)-E'_{\lambda_{j-1}+i\mu_j}(J)$$

$$-E'_{\lambda_j+i\mu_{j-1}}(J))\Big|<\varepsilon \quad \text{在}\{J\}\text{上, 如果}$$

$$\lambda_1=-\alpha-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_n=\alpha=\sup_{J\in\{J\}}|ReT(J)|,$$

$$\mu_1=-\beta-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\leqq\mu_2\leqq\cdots\leqq\mu_n=\beta=\sup_{J\in\{J\}}|ImT(J)|,$$

$$(\sup_j(\lambda_j-\lambda_{j-1})^2+\sup_j(\mu_j-\mu_{j-1})^2)^{1/2}\leqq\varepsilon.$$

因此, 根据$E'_z(J)$的定义, 在$\{J\}$上我们有

$$|T(J)-\sum_{j=2}^{n}(\lambda_j+i\mu_j)(E_{\lambda_j+i\mu_j}(J)+E_{\lambda_{j-1}+i\mu_{j-1}}(J)$$

$$-E_{\lambda_{j-1}+i\mu_j}(J)-E_{\lambda_j+i\mu_{j-1}}(J)|\leqq\varepsilon$$

这是因为第一纲集的补集是在紧空间$\{J\}$中稠密的. 所以由(4)我们有

$$\left\| T-\sum_{j=2}^{n}(\lambda_j+i\mu_j)(E_{\lambda_j+i\mu_j}+E_{\lambda_{j-1}+i\mu_{j-1}}-E_{\lambda_{j-1}+i\mu_j}-E_{\lambda_j+i\mu_{j-1}})\right\|\leqq\varepsilon,$$

我们将此记成

$$T=\iint zdE_z, \tag{12}$$

它称为正规算子T的**谱分解**.

§4. 酉算子的谱分解

如果T是一酉算子$\in B$, 则根据

$$T(J)T^*(J)=T(J)\overline{T(J)}=1, \tag{1}$$

我们知函数$T(J)$在$\{J\}$上所取的值是绝对值为1的复数. 从这个事实出发, 我们能简化T的谱分解$\iint zdE_z$.

集合$\{J\in\{J\};\arg(T(J))\in(0,\ \theta)\}$, $0<\theta<2\pi$, 的特征函数$E'_\theta(J)$属于$C'(\{J\})$, 通过令$E'_0(J)=0, E'_{2\pi}(J)=1$, 我们有

$$|T(J)-\sum_{j=1}^{n}e^{i\theta_j}(E'_{\theta_j}(J)-E'_{\theta_{j-1}}(J))|\leqq\max_j|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_{j-1}}|$$

$$(0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=2\pi).$$

设$E_\theta(J)$为$\{J\}$上连续函数, 它与$E'_\theta(J)$仅只在一个第一纲集上有所差异, 并设E_θ为$\in B$的算子, 此算子按同构表示$B\ni T\longleftrightarrow T(J)$对应于$E_\theta(J)$. 则如前节所示

$$\| T-\sum_{j=1}^{n}e^{i\theta_j}(E_{\theta_j}-E_{\theta_{j-1}})\|\leqq\max_j|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_{j-1}}|.$$

由于$e^{2\pi i}=1$这一事实, 我们记上述关系为

$$T=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dF(\theta) \qquad 其中$$

$$F(\theta)=E_{\theta+0}-E_{+0} \quad 当\ 0<\theta<2\pi, F(0)=0, F(2\pi)=I. \tag{2}$$

这里$E_{\theta+0}$由$E_{\theta+0}x=s\text{-}\lim\limits_{\theta\downarrow 0}E_\theta x$定义, 这个极限的存在性将在下面证明.

定理1 算子$F(\theta)$, $0\leqq\theta\leqq2\pi$, 的组满足条件:

每一$F(\theta)$为一投影算子, 它与所有与T可交换的有界线性算子可交换, (3)

$$F(\theta)F(\theta')=F(\min(\theta,\theta')), \tag{4}$$

$$F(0)=0,\quad F(2\pi)=I. \tag{5}$$

$F(\theta+0)=F(\theta)$, $0\leqq\theta<2\pi$, 在下述意义下成立:

$$对任意\ x\in X\ 有\ \lim_{\theta'\downarrow\theta}F(\theta')x=F(\theta)x. \tag{6}$$

证明 只须证明E_θ, $0\leqq\theta\leqq2\pi$, 满足下述条件就行了:

每一E_θ为一$\in B$的投影算子, (3′)

$$E_\theta E_{\theta'}=E_{\min(\theta,\theta')} \tag{4'}$$

$$E_0=0, E_{2\pi}=I, \tag{5'}$$

$$E_\theta x=s\text{-}\lim_{\theta'\downarrow\theta} E_{\theta'}x \text{ 对任意 } x\in X \text{ 及 } 0\leqq\theta<2\pi \text{ 成立.} \tag{6'}$$

我们有 $E'_\theta(J)=\overline{E'_\theta(J)}$ 及 $E'_\theta(J)^2=E'_\theta(J)$. 因而根据前节的结果, 即得 $E_\theta=E_\theta^*$ 且 $E_\theta^2=E_\theta$. 这就证明了(3'). 从 $E'_\theta(J)E'_{\theta'}(J)=E'_{\min(\theta,\theta')}(J)$ 出发, (4')可类似得证, 又(5')亦可相仿证明. 其次令 $\theta_n\downarrow\theta$. 则 $E'_{\theta_n}(J)\geqq E'_{\theta_{n+1}}(J)\geqq E'_\theta(J)$, 故根据前节结果, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}E_{\theta_n}=E$ 存在且在$\{J\}$上可能除去一个第一纲集外, 处处成立 $E(J)=E'_\theta(J)=\lim\limits_{\theta_n\downarrow\theta}E'_{\theta_n}(J)$. 因此 $E=E_\theta$.

例 1 设线性算子 T 由

$$Ty(s)=e^{is}y(s), \text{ 其中 } y(s)\in L^2(-\infty,\infty)$$

定义 T 是酉的. 当 $2n\pi<s\leqq2(n+1)\pi$ 时我们定义

$$F(\theta)y(s)=y(s) \qquad \text{对 } s\leqq\theta+2n\pi\leqq2(n+1)\pi,$$

$$F(\theta)y(s)=0 \qquad \text{对 } \theta+2n\pi<s.$$

易知 $T=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dF(\theta)$.

例 2 设线性算子 T_1 由

$$T_1x(t)=x(t+1) \qquad \text{在 } L^2(-\infty,\infty) \text{ 中}$$

定义 T_1 是酉的. 根据 Fourier 变换

$$y(s)=Ux(t)=\underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\,(2\pi)^{-1/2}\int_{-n}^{n}e^{-ist}x(t)dt,$$

我们得 $Ux(t+1)=e^{is}Ux(t)=e^{is}y(s)$, 因此

$$T_1x(t)=x(t+1)=U^{-1}e^{is}y(s)=U^{-1}Ty(s)=U^{-1}TUx(t),$$

亦即 $T_1=U^{-1}TU$. 所以我们有

$$T_1=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dF_1(\theta), \text{ 其中 } F_1(\theta)=U^{-1}F(\theta)U.$$

谱分解的唯一性 由于 $T^{-1}=T^*$ 及 $T^{-1}(J)=T^*(J)=T(J)^{-1}$, 我们易知

$$T^{-1}=\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}dF(\theta). \tag{7}$$

令 $\max\limits_j|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_{j-1}}|<\varepsilon$. 则由

$$T=\sum_j e^{i\theta_j}(F(\theta_j)-F(\theta_{j-1}))+\delta, \quad \|\delta\|<\varepsilon,$$

我们根据(4)即得

$$T^2=\sum_j e^{2i\theta_j}(F(\theta_j)-F(\theta_{j-1}))+\delta', \text{ 其中}$$

$$\|\delta'\|\leqq\|(T-\delta)\delta\|+\|\delta(T-\delta)\|+\|\delta^2\|$$

$$\leqq(\|T\|+\varepsilon)\varepsilon+\varepsilon(\|T\|+\varepsilon)+\varepsilon^2.$$

因而有 $T^2=\int_0^{2\pi} e^{2i\theta}dF(\theta)$，更一般地成立

$$T^n=\int_0^{2\pi} e^{in\theta}dF(\theta) \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{8}$$

所以如果存在另一个满足(3)至(6)的谱分解 $T=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}dF_1(\theta)$，则对任意一个 $e^{i\theta}$ 和 $e^{-i\theta}$ 的多项式 $p(\theta)$，恒有 $\int_0^{2\pi} p(\theta)d((F(\theta)x, y)-(F_1(\theta)x, y))=0 \qquad (x, y\in X)$.

因此，根据连续性，上式对具有 $p(0)=p(2\pi)$ 的任一连续函数 $p(\theta)$ 成立，令 $0<\theta_0<\theta_1<2\pi$，并取

$$\begin{aligned} p_n(\theta)&=0 \qquad \text{对}\ 0\leqq\theta\leqq\theta_0\ \text{及}\ \theta_1+\frac{1}{n}\leqq\theta\leqq 2\pi, \\ &=1 \qquad \text{对}\ \theta_0+\frac{1}{n}\leqq\theta\leqq\theta_1 \\ &=\text{线性} \qquad \text{对}\ \theta_0\leqq\theta\leqq\theta_0+\frac{1}{n}\ \text{及}\ \theta_1\leqq\theta\leqq\theta_1+\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

然后令 $n\to\infty$，根据(6)我们得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} p_n(\theta)d[(F(\theta)x, y)-(F_1(\theta)x, y)]=[(F(\theta)x, y)-(F_1(\theta)x, y)]_{\theta_0}^{\theta_1}=0,$$

上式对所有 $x, y\in X$ 成立. 因而，令 $\theta_0\downarrow 0$ 并利用条件(5)和(6)，我们即知 $F(\theta_1)=F_1(\theta)$. 所以对一个酉算子的谱分解是唯一确定的.

§5. 单位分解

定义 1 Hilbert 空间 X 中的一族投影(算子) $E(\lambda)$，$-\infty<\lambda<\infty$，称为(实的)**单位分解**①，如果它适合条件:

$$E(\lambda)E(\mu)=E(\min(\lambda, \mu)), \tag{1}$$

$$E(-\infty)=0, E(+\infty)=1, \ \text{其中}\ E(-\infty)x=s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow-\infty}E(\lambda)x$$

$$\text{又}\ E(+\infty)x=s\text{-}\lim_{\lambda\uparrow\infty}E(\lambda)x, \tag{2}$$

$$E(\lambda+0)=E(\lambda), \ \text{其中}\ E(\lambda+0)x=s\text{-}\lim_{\mu\downarrow\lambda}E(\mu)x. \tag{3}$$

命题 1 对任意 $x, y\in X$，函数 $(E(\lambda)x, y)$ 作为 λ 的函数而言是有界变差函数.

证明 设 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$. 则根据(1)，$E(\alpha, \beta]=E(\beta)-E(\alpha)$ 是一投影. 因此由 Schwarz 不等式，我们有

$$\begin{aligned} \sum_j |(E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x, y)| &= \sum_j |(E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x, E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]y)| \\ &\leqq \sum_j \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x\|\cdot\|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j)y\| \\ &\leqq \Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x\|^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]y\|^2\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

---

① 此处单位分解(resolution of identity)与第一章 § 1 的单位分解(partition of unity)含义不同——译者注.

$$=(\|E(\lambda_1, \lambda_n]x\|^2)^{1/2}\cdot(\|E(\lambda_1, \lambda_n]y\|^2)^{1/2}\leqq\|x\|\cdot\|y\|.$$

因为根据由(1)导致的正交性

$$E(\lambda_{j-1}\lambda_j]\cdot E(\lambda_{i-1}, \lambda_i]=0 \qquad (i\neq j), \tag{4}$$

对 $m>n$ 我们有

$$\|x\|^2\geqq\|E(\lambda_n, \lambda_m]x\|^2=\sum_{i=n}^{m-1}\|E(\lambda_i, \lambda_{i+1}]x\|^2. \tag{5}$$

系 对任意 λ, $-\infty<\lambda<\infty$, 算子 $E(\lambda+0)=s\text{-}\lim\limits_{\lambda'\downarrow\lambda}E(\lambda')x$ 和 $E(\lambda-0)=s\text{-}\lim\limits_{x\uparrow\lambda}E(\lambda')$ 均存在.

证明 从(5)知, 如果 $\lambda_n\uparrow\lambda$ 则

$$\lim_{j,k\to\infty}\|E(\lambda_j, \lambda_k]x\|^2=0,$$

对于 $\lambda_n\downarrow\lambda$ 的情况同样为真.

命题 2 设 $f(\lambda)$ 为 $(-\infty, \infty)$ 上的复值连续函数, 又 $x\in X$. 则对 $-\infty<\alpha<\beta<\infty$ 我们能定义

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda)dE(\lambda)x$$

作为 Riemann 和

$$\sum_j f(\lambda'_j)E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x, \text{其中 } \alpha=\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n=\beta, \lambda'_j\in(\lambda_j, \lambda_{j+1}]$$

当 $\max\limits_j|\lambda_{j+1}-\lambda_j|$ 趋于零时的 $s\text{-}\lim$.

证明 $f(\lambda)$ 在紧区间 $[\alpha, \beta]$ 上是一致连续的. 设 $|f(\lambda)-f(\lambda')|\leqq\varepsilon$, 只要 $|\lambda-\lambda'|\leqq\delta$. 我们考察 $[\alpha, \beta]$ 的两个分割:

$$\alpha=\lambda_1<\cdots<\lambda_n=\beta, \max_j|\lambda_{j+1}-\lambda_j|\leqq\delta,$$
$$\mu_1<\cdots<\mu_m=\beta, \max_j|\mu_{j+1}-\mu_j|\leqq\delta,$$

并设

$$\alpha=\nu_1<\cdots<\nu_p=\beta, \quad p\leqq m+n$$

为这两个分割的迭加. 则若 $\mu'_k\in(\mu_k, \mu_{k+1}]$, 我们有

$$\sum_j f(\lambda'_j)E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x-\sum_k f(\mu'_k)E(\mu_k, \mu_{k+1}]x$$
$$=\sum_s e_s E(\nu_s, \nu_{s+1})x, \text{而} |e_s|\leqq 2\varepsilon,$$

故如(5)所示, 上式左端的范数平方是

$$\leqq\varepsilon^2\left\|\sum_s E(\nu_s, \nu_{s+1}]x\right\|^2=\varepsilon^2\|E(\alpha, \beta]x\|^2\leqq\varepsilon^2\|x\|^2.$$

系 我们可以把 $\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda)x$ 定义为 $s\text{-}\lim\limits_{\alpha\downarrow-\infty, \beta\uparrow\infty}\int_\alpha^\beta f(\lambda)dE(\lambda)x$, 当此极限存在时.

定理 1　对给定的 $x\in X$, 下面的三个条件是相互等价的:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE(\lambda)x \quad \text{存在,} \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty \tag{7}$$

$$F(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d(E(\lambda)x, y) \text{定义了一个有界线性泛函.} \tag{8}$$

证明　我们将证明蕴涵关系(6)→(8)→(7)→(6).

(6)→(8). y 与 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)dE(\lambda)x$ 的近似 Riemann 和的数积是 y 的有界线性泛函. 因而, 根据 $(y, E(\lambda)x)=(E(\lambda)y, x)$ 和共鸣定理, 我们得(8).

(8)→(7), 我们把算子 $E(\alpha, \beta]$ 作用到 $y=\int_{\alpha}^{\beta} \overline{f}(\lambda)dE(\lambda)x$ 的近似 Riemann 和上. 于是根据(1), 我们知 $y=E(\alpha, \beta]y$. 因此再次根据(1),

$$\begin{aligned}\overline{F(y)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)}d(E(\lambda)x, y) = \lim_{\alpha'\downarrow-\infty,\beta'\uparrow\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}d(E(\lambda)x, y)\\ &= \lim_{\alpha'\downarrow-\infty,\beta'\uparrow\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}d(E(\lambda)x, E(\alpha, \beta]y)\\ &= \lim_{\alpha'\downarrow-\infty,\beta'\uparrow\infty} \int_{\alpha}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}d(E(\alpha, \beta]E(\lambda)x, y)\\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}d(E(\lambda)x, y) = \|y\|^2.\end{aligned}$$

因而 $\|y\|^2 \leq \|F\|\cdot\|y\|$, 亦即 $\|y\| \leq \|F\|$. 另一方面, 通过用 Riemann 和逼近 $y=\int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}dE(\lambda)x$, 我们由(1)即得

$$\|y\|^2 = \left\|\int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}dE(\lambda)x\right\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2,$$

故 $\int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 \leq \|F\|^2$. 所以通过令 $\alpha\downarrow-\infty, \beta\uparrow\infty$, 我们即知(7)为真.

(7)→(6). 对 $\alpha'<\alpha<\beta<\beta'$, 由以上论证我们有

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\lambda)dE(\lambda)x - \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)dE(\lambda)x\right\|^2\\ &= \int_{\alpha'}^{\alpha} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 + \int_{\beta}^{\beta'} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2.\end{aligned}$$

因而(7)导致(6).

定理 2　设 $f(\lambda)$ 为实值连续函数. 则通过

$$\begin{cases}(Hx, y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d(E(\lambda)x, y), \text{其中}\\ x\in D=\left\{x; \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2<\infty\right\}, \text{又 } y\in X \text{ 为任意,}\end{cases} \tag{9}$$

确定了一个具有 $D(H)=D$ 的自伴算子 H，并且有 $HE(\lambda)\supseteq E(\lambda)H$，亦即 $HE(\lambda)$ 是 $E(\lambda)H$ 的一个扩张.

证明 对任一 $y\in X$ 及任一 $\varepsilon>0$，存在 α 和 β 适合 $-\infty<\alpha<\beta<\infty$ 且使得 $\|y-E(\alpha,\ \beta]y\|<\varepsilon$. 此外，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)E(\alpha,\beta]y\|^2=\int_{\alpha}^{\beta}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2.$$

因而 $E(\alpha,\beta]y\in D$，故由(2)有 $D^a=X$. 根据

$$f(\lambda)=\overline{f(\lambda)},\quad (E(\lambda)x,y)=\overline{(E(\lambda)y,x)},$$

H 是对称的. 如果 $y\in D(H^*)$ 且 $H^*y=y^*$，则根据 $E(\alpha,\beta]z\in D$ 及(1)有

$$(z,E(\alpha,\beta]y^*)=(E(\alpha,\beta]z,H^*y)=(HE(\alpha,\beta]z,y)=\int_{\alpha}^{\beta}f(\lambda)d(E(\lambda)z,y).$$

因此，根据共鸣定理

$$\lim_{\alpha\downarrow-\infty,\beta\uparrow\infty}(z,E(\alpha,\beta]y^*)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)z,y)=F(z)$$

为一有界线性泛函. 因而根据前面的定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2<\infty,\text{亦即 } y\in D.$$

所以 $D=D(H)\supseteq D(H^*)$. 由于 H 是对称算子，我们有 $H\subseteq H^*$，故 H 必自伴，亦即 $H=H^*$.

最后，设 $x\in D(H)$. 则通过将 $E(\mu)$ 作用到 $Hx=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda)x$ 的近似 Riemann 和上，我们由(1)即得

$$\begin{aligned}E(\mu)Hx&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\mu)E(\lambda)x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)E(\mu)x)=HE(\mu)x.\end{aligned}$$

系 1 在 $f(\lambda)=\lambda$ 的特殊情况下，我们有

$$(Hx,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x,y),\ \text{对 } x\in D(H),\ y\in X. \tag{10}$$

我们用符号记它为

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda),$$

并称它为自伴算子 H 的**谱分解或谱表示**.

系 2 对由(9)给定的 $H=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda)$，我们有

$$\|Hx\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2\, d\,\|E(\lambda)x\|^2\qquad \text{只要 } x\in D(H). \tag{11}$$

特别地若 H 为有界自伴算子，则

$$(H^n x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)^n d(E(\lambda)x,y)\quad \text{对 } x,y\in X\quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{12}$$

证明 因为对$x\in D(H)$恒有$E(\lambda)Hx=HE(\lambda)x$,故根据(1)我们有

$$(Hx,Hx)=\int f(\lambda)d(E(\lambda)x,Hx)=\int f(\lambda)d(HE(\lambda)x,x)$$

$$=\int f(\lambda)d_\lambda\left\{\int f(\mu)d_\mu(E(\mu)E(\lambda)x,x)\right\}$$

$$=\int f(\lambda)d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)d(E(\mu)x,x)=\int f(\lambda)^2d\|E(\lambda)x\|^2\right.$$

系的后一部分可相仿证明.

例 易知乘法算子

$$Hx(t)=tx(t)\quad 在 L^2(-\infty,\infty)中$$

具有谱分解$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$,其中

$$E(\lambda)x(t)=x(t)\quad 对 t\leqq\lambda,$$
$$=0\qquad 对 t>\lambda. \tag{13}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|E(\lambda)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d_\lambda\int_{-\infty}^{\lambda}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}t^2|x(t)|^2dt=\|Hx\|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d_\lambda\int_{-\infty}^{\lambda}x(t)\overline{y(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot x(t)\overline{y(t)}dt=(Hx,y).$$

§6. 自伴算子的谱分解

定理1 Hilbert空间X中的自伴算子H具有唯一确定的谱分解.

证明 自伴算子H的Cayley变换$U=U_H=(H-iI)(H+iI)^{-1}$是酉算子(见第七章§4).设$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dF(\theta)$为$U$的谱分解.则我们有

$$F(2\pi-0)=s\text{-}\lim_{\theta\downarrow 0}F(2\pi-\theta)=F(2\pi)=I.$$

因为否则,投影$F(2\pi)-F(2\pi-0)$就不等于零算子.因此存在一元$y\neq0$使得

$$(F(2\pi)-F(2\pi-0))y=y.$$

因而根据$F(\theta)F(\theta')=F(\min(\theta,\theta'))$有

$$Uy=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d(F(\theta)(F(2\pi)-F(2\pi-0)))y$$

$$=(F(2\pi)-F(2\pi-0))y=y.$$

因此$(y,z)=(Uy,Uz)=(y,Uz)$,故$(y,z-Uz)=0$对一切$z\in X$成立.由于U是自伴算子H的Cayley变换,我们知道(见第七章§4)值域$R(I-U)$在X中稠密.因而必有$y=0$,这是一个矛盾.

因此若我们令

$$\lambda=-\cot\theta,\quad E(\lambda)=F(\theta),$$

则$0<\theta<2\pi$与$-\infty<\lambda<\infty$成为拓扑对应的,因而$E(\lambda)$是按照$F(\theta)$的一个单位分解.我们来

证明自伴算子,

$$H'=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$$

是与H相同的. 由于 $H=i(I+U)(I-U)^{-1}$, 故我们只须证明

$$(H'(y-Uy),x)=(i(y+Uy),x)\quad 对一切 x,y\in X.$$

但由于 $D(H')^a=X$, 故我们可限制 x 于定义域$D(H')$中. 于是, 根据$F(\theta)\cdot F(\theta')=F(\min(\theta,\theta'))$有

$$\begin{aligned}(y-Uy,F(\theta)x)&=\int_0^{2\pi}(1-e^{i\theta'})d_{\theta'}(F(\theta')y,F(\theta)x)\\&=\int_0^{2\pi}(1-e^{i\theta'})d_{\theta'}(F(\theta)F(\theta')y,x)\\&=\int_0^{\theta}(1-e^{i\theta'})d(F(\theta')y,x).\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}(y-Uy,H'x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(y-Uy,E(\lambda)x)\\&=\int_0^{2\pi}-\cot\theta d\left\{\int_0^{\theta}(1-e^{i\theta'})d(F(\theta')y,x)\right\}\\&=\int_0^{2\pi}i(1+e^{i\theta})d(F(\theta)y,x)=(i(y+Uy),x).\end{aligned}$$

谱表示的唯一性　假定$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$具有另一个谱表示$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE'(\lambda)$ 使得对某λ_0有$E'(\lambda_0)\neq E(\lambda_0)$. 则通过令

$$\lambda=-\cot\theta, E'(\lambda)=F'(\theta),$$

我们有 $F'(\theta_0)\neq F(\theta_0)$, 其中 $\lambda_0=-\cot\theta_0$. 利用与上面相似的运算, 我们能证明$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE'(\lambda)$ 的Cayley变换等于$\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dF(\theta)$. 因而酉算子$U$具有二个不同的谱表示 $U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dF(\theta)$ 和$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dF'(\theta)$, 此与我们在第十一章§4中已经证明的结果相矛盾.

因此我们已证明了(见第七章§3和§4)属于J. von Neumann[1]的基本结果:

定理2　对称算子H有闭对称扩张 H^{**}. 闭对称算子H具有唯一确定的谱表示当且仅当H为自伴. H 为自伴当且仅当它的 Cayley 变换是酉的.

注　在应用中, 有时出现 H 不是自伴, 然而 H^* 却是自伴的情况. 在这种时候, H 称为本质自伴的. 在这方面, 请参看讨论量子力学中的 Schrödinger 算子的 T. Kato[7].

动量算子 H_1 的谱表示　动量算子 H_1 定义为:

$$H_1x(t)=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}x(t)\quad 在 L^2(-\infty,\infty)中.$$

由

$$x(t)=U\cdot y(s)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}(2\pi)^{-1/2}\int_{-n}^{n} e^{ist}y(s)\,ds$$

定义的 Fourier 变换 U 是酉的, 且 $U^{-1}x(t)=U^*x(t)=Ux(-t)$. 因而, 以 $E(\lambda)$ 记由第十一章 §5 中之(13) 给出的单位分解, 我们便得到一个单位分解 $\{E'(\lambda)\}$, $E'(\lambda)=UE(\lambda)U^{-1}$. 若 $y(s)$ 和 $sy(s)$ 均属于 $L^2(-\infty,\infty)\cap L^1(-\infty,\infty)$, 则

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}x(t)=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}y(s)\,ds\right)$$

$$=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}sy(s)\,ds=U(sy(s))=UsU^{-1}x(t),$$

或用符号记为

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}=UsU^{-1}. \tag{1}$$

因而对自伴算子 $H=s\cdot=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$ 我们有

$$\begin{cases}U^{-1}H_1U\cdot y(s)=s\cdot y(s)=Hy(s), \text{只要 } y(s),\\ sy(s) \text{ 均属于 } L^2(-\infty,\infty)\cap L^1(-\infty,\infty).\end{cases}$$

对任一 $y(s)\in D(H)=D(s\cdot)$, 令

$$y_n(s)=y(s) \text{ 或 }=0 \text{ 根据 } |s|\leq n \text{ 或 } |s|>n \text{ 而定.}$$

此时 $y_n(s)$, $sy_n(s)$ 必定均属于 $L^2(-\infty,\infty)\cap L^1(-\infty,\infty)$, 此外还有 $s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n=y$, $s\text{-}\lim_{n\to\infty} Hy_n=Hy$. 因此由于自伴算子 $U^{-1}H_1U$ 和 H 都是闭的, 根据 $(U^{-1}H_1U)y_n=Hy_n$, 我们有

$$(U^{-1}H_1U)y=Hy \quad \text{只要 } y\in D(H),$$

亦即 $U^{-1}H_1U$ 是自伴算子 H 的一个自伴扩张. 因而通过取伴随, 我们知 $H^*=H$ 也是 $(U^{-1}H_1U)^*=U^{-1}H_1U$ 的一个扩张, 由此 $U^{-1}H_1U=H$, 故

$$H_1=UHU^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(UE(\lambda)U^{-1})=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE'(\lambda).$$

§7. 实算子和半有界算子. Friedrichs 定理

在下面定义的**实算子**和**半有界算子**均有自伴扩张. 因此我们能对这些扩张使用 von Neumann 定理, 得知它们具有谱分解.

定义 1 设 $X=L^2(S,\mathfrak{B},m)$, 又 H 为定义于 X 内, 且取值于 X 中的对称算子. 若 i) $x(s)\in D(H)$ 导致 $\overline{x(s)}\in D(H)$, ii) H 映实值函数为实值函数, 则 H 称为**实算子**.

例 设 $f(s)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 内一实值连续函数. 则对 $X=L^2(-\infty,\infty)$, 乘以 $f(s)$ 的乘法算子为一实算子.

定理 1 (J. von Neumann[1]) 实算子 H 具有自伴扩张.

证明 设 $U=U_H$ 为 H 的 Cayley 变换. 于是 $D(U)\{(H+iI)x;\ x\in D(H)\}$ 由 $R(U)=\{(H-iI)x;\ x\in D(H)\}$ 中的函数取复共轭后得到的函数所组成. 因此若我们通过

$$U_1=U \quad \text{在 } D(U) \text{ 内},$$

$$U_1(\sum_\alpha c_\alpha\varphi_\alpha)=\sum_\alpha c_\alpha\bar{\varphi}_\alpha,\text{ 其中}\{\varphi_\alpha\}\text{为 Hilbert}$$

空间 $D(U)^\perp$ 的一完全标准正交系，

而定义 U 的扩张 U_1，则 U_1 是 U 的酉扩张．所以 H 的自伴扩张 H_1 存在，且使得 $U_1=U_{H_1}$(见第七章 § 4)．

定义 2 对称算子 H 称为上半有界(或下半有界)如果存在一个实的常数 α 使得

$$(Hx,x)\leq\alpha\|x\|^2(\text{或}(Hx,x)\geq\alpha\|x\|^2)\quad\text{对一切 }x\in D(H).$$

如果对一切 $x\in D(H)$，均有 $(Hx,x)\geq 0$，则 H 称为正算子．

例 设 $q(s)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内为非负且连续．考察由

$$(Hx)(s)=-x''(s)+q(s)x(s)$$

而对具有紧支集的 C^2 函数 $x(s)$ 定义的算子 H．则可通过分部积分而验证，H 是 Hilbert 空间 $L^2(-\infty,\infty)$ 中的正算子．

定理 2 (K. Friedrichs[3]) 半有界算子 H 具有自伴扩张．

证明(属于 H. Freudenthal[1]) 若 H 为上半有界，则 $-H$ 为下半有界．若 H 为如上的下半有界算子，则 $H_1=H+(1-\alpha)I$ 满足条件：对一切 $x\in D(H_1)$ 均成立 $(H_1x,x)\geqq\|x\|^2$．所以，由于 αI 是自伴的，我们可以假设对称算子 H 满足条件

$$(Hx,x)\geq\|x\|^2\quad\text{对一切 }x\in D(H).\tag{1}$$

我们通过

$$\|x\|'=(Hx,x),\ (x,y)'=(Hx,y)\tag{2}$$

在 $D(H)$ 中引入一新范数 $\|x\|'$ 及相关联的新的数积 $(x,y)'$．由于 H 为对称且适合(1)，易知关于 $\|x\|'$ 和 $(x,y)'$，$D(H)$ 成为一 pre-Hilbert 空间．我们以 $D(H)'$ 记这个 pre-Hilbert 空间的完备化空间．

我们来证明 $D(H)'$ 作为一个没有拓扑的抽象集而言时，就是原来的 Hilbert 空间这个集合 X 的一个子集．证明：pre-Hilbert 空间 $D(H)$ 的一 Cauchy 序列 $\{x_n\}'$ 满足 $\|x_n-x_m\|'\geqq\|x_n-x_m\|$ 及 $\lim_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|'=0$；因而 $\{x_n\}$ 也是原来的 Hilbert 空间 X 的一 Cauchy 序列．如果对 $D(H)$ 的一 Cauchy 序列 $\{y_n\}$ 我们能证明

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n\|'\neq 0\quad\text{不导致}\ \lim_{n\to\infty}\|y_n\|=0,\tag{3}$$

则对应

$$\{x_n\}'\to\{x_n\}\tag{4}$$

是从 $D(H)$ 的 Cauchy 序列至 X 中的 Cauchy 序列的一一映射．$D(H)$ 的(X 的)两个 Cauchy 序列 $\{x_n\}'$，$\{z_n\}'$ 视为等同的，如果 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|'=0$(如果 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0$)．由于 X 是完备的，因此我们可以把它的 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 与使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ 的元素 $x\in X$ 等同起来．所以 $D(H)'$ 作为一个没有拓扑的抽象集而言，可以通过对应(4)而等同于 X 的一个子集．注意到在 $D(H)'$ 和 X 中的数积的连续性，(3)的证明可如下得到．$\lim_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|'=0$，$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|'=\alpha>0$ 和

$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$ 导致下面的矛盾

$$c^2=\lim_{n,m\to\infty}(x_n,x_m)'=\lim_{n,m\to\infty}(Hx_n,x_m)=\lim_{n\to\infty}(Hx_n,0)=0.$$

其次我们令

$$\widetilde{D}=D(H^*)\cap D(H)'. \tag{5}$$

由于 $D(H)\subseteq D(H^*)$, 必有 $D(H)\subseteq\widetilde{D}\subseteq D(H^*)$. 因而我们能通过限制 H^* 于定义域 $\widetilde{D}=D(\widetilde{H})$ 上而定义 H 的一个扩张 $\widetilde{H}$. 我们必须证明 $\widetilde{H}$ 是自伴的.

首先我们证明 $\widetilde{H}$ 是对称的. 假定 $x,y\in\widetilde{D}$; 则存在 $D(H)$ 的两个序列 $\{x_n\}'$, $\{y_n\}'$ 使得当 $n\to\infty$ 时 $\|x-x_n\|'\to0$, $\|y-y_n\|'\to0$. 因而根据 $D(H)'$ 中的数积的连续性, 我们知有限极限 $\lim\limits_{n,m\to\infty}(x_n,y_m)'=\lim\limits_{n,m\to\infty}(Hx_n,y_m)=\lim\limits_{n,m\to\infty}(x_n,\widetilde{H}y_m)$ 存在. 这个极限等于

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(Hx_n,y_m)=\lim_{n\to\infty}(Hx_n,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,\widetilde{H}y)=(x,\widetilde{H}y),$$

同时又等于

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(Hx_n,y_m)=\lim_{m\to\infty}(x,Hy_m)=\lim_{m\to\infty}(\widetilde{H}x,y_m)=(\widetilde{H}x,y).$$

因而 $\widetilde{H}$ 是对称的、亦即 $\widetilde{H}\subseteq(\widetilde{H})^*$.

其次设 $x\in D(H)$, $y\in X$. 于是根据

$$|(x,y)|\leq\|x\|\|y\|\leqq\|x\|'\cdot\|y\|,$$

即知 $f(x)=(x,y)$ 为 pre-Hilbert 空间 $D(H)$ 上的一有界线性泛函. 因而根据连续性, $f(x)$ 可延拓成 Hilbert 空间 $D(H)'$ 上的一有界线性泛函. 于是根据应用于 Hilbert 空间 $D(H)'$ 中的 F. Riesz 表示定理, 存在唯一的 $y'\in D(H)'$ 使得

$$f(x)=(x,y)=(x,y')'=(Hx,y')\quad\text{对一切 }x\in D(H).$$

这就证明 $y'\in D(H^*)$ 且 $H^*y'=y$, 因而 $y'\in\widetilde{D}$ 且 $\widetilde{H}y'=y$. 从而我们证明了 $R(\widetilde{H})=X$. 故根据第七章 § 3 中定理 1 的系, $\widetilde{H}$ 必自伴.

§8. 自伴算子的谱. Rayleigh 原理和 Krylov-Weinstein 定理. 谱的重数

定理 1 设 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 为 Hilbert 空间 X 中的自伴算子. 设 $\sigma(H)$, $P_\sigma(H)$, $C_\sigma(H)$ 和 $R_\sigma(H)$ 分别为 H 的谱, 点谱, 连续谱和剩余谱. 则 (i) $\sigma(H)$ 是实轴上的一个集合; (ii) $\lambda_0\in P_\sigma(H)$ 等价于条件 $E(\lambda_0)\neq E(\lambda_0-0)$, 且对应于本征值 λ_0 的 H 的本征空间为 $R(E(\lambda_0)-E(\lambda_0-0))$; (iii) $\lambda_0\in C_\sigma(H)$ 等价于条件 $E(\lambda_0)=E(\lambda_0-0)$ 并使得不论 $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$ 如何, 均有 $E(\lambda_1)\neq E(\lambda_2)$; (iv) $R_\sigma(H)$ 是空集.

证明 我们已经知道, 对于自伴算子 H, H 的预解集 $\rho(H)$ 包含所有 $Im(\lambda)\neq0$ 的复数 λ (见第八章 § 1). 因而 (i) 显然. 根据单位分解 $\{E(\lambda)\}$ 的定义我们有 $\lambda_0I=\lambda_0\int_{-\infty}^{\infty}dE(\lambda)$, 故 $(H-\lambda_0I)=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)dE(\lambda)$. 因而象第十一章 § 5 中定理 2 的推论 2 中所示, 我们得

$$\|(H-\lambda_0 I)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^2 d\|E(\lambda)x\|^2. \quad x\in D(H). \tag{1}$$

因此根据 $E(-\infty)=0$ 及 $\|E(\lambda)x\|^2$ 关于 λ 的右连续性，我们知 $Hx=\lambda_0 x$ 当且仅当

$$\begin{cases} E(\lambda)x=E(\lambda_0+0)x=E(\lambda_0)x & 对\ \lambda\geqq\lambda_0\ 且 \\ E(\lambda)x=E(\lambda_0-0)x=0 & 对\ \lambda<\lambda_0, \end{cases}$$

亦即 $Hx=\lambda_0 x$ 当且仅当 $(E(\lambda_0)-E(\lambda_0-0))x=x$. 这就证明了(ii). 其次我们来证明 (iv). 若 $\lambda_0\in R_\sigma(H)$，于是根据(i) λ_0 为实数. 根据条件 $R(H-\lambda_0 I)^a=D((H-\lambda_0)^{-1})^a\neq X$，我们知存在一 $y\neq 0$，它与 $R(H-\lambda_0 I)$ 正交，亦即对一切 $x\in D(H)$ 均有 $((H-\lambda_0 I)x, y)=0$. 因而 $(Hx, y)=(\lambda_0 x, y)=(x, \lambda_0 y)$，故 $y\in D(H^*)$，$H^*y=\lambda_0 y$. 这表示 $Hy=\lambda_0 y$，亦即 λ_0 是 H 的一个本征值. 因而我们已经得到矛盾 $\lambda_0\in R_\sigma(H)\cap P_\sigma(H)$，故 $R_\sigma(H)$ 必为空集.

设① $\lambda_0\in\sigma(H)$，又设存在实数 λ_1, λ_2: $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$，且 $E(\lambda_1)=E(\lambda_2)$. 此时由(1)有

$$\begin{aligned}\|(H-\lambda_0 I)x\|^2&=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^2 d\|E(\lambda)x\|^2=\int_{-\infty}^{\lambda_1}+\int_{\lambda_2}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^2 d\|E(\lambda)x\|^2\\ &\geqq\alpha^2\left(\int_{-\infty}^{\lambda_1}+\int_{\lambda_2}^{\infty}d\|E(\lambda)x\|^2=\alpha^2\int_{-\infty}^{\infty}d\|E(\lambda)x\|^2\right.\\ &=\alpha^2\|x\|^2 \quad 对一切\ x\in D(H),\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\alpha=\min(\lambda_2-\lambda_0, \lambda_0-\lambda_1)$. 由(2)及 iv)，得知 $\lambda_0\in\rho(H)$，此与假设矛盾. 由此，结合 i), ii)，得知 iii)为真.

注 第十一章 § 5 中的例给出了一个全体实数均是它的连续谱的自伴算子 H.

定理 2 设 H 为有界自伴算子. 则

$$\sup_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=\sup_{\|x\|\leq 1}(Hx, x), \quad \inf_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=\inf_{\|x\|\leq 1}(Hx, x). \tag{3}$$

证明 由于 $(Hx, x)=(x, Hx)=\overline{(Hx, x)}=$ 实数，故我们能考察

$$\alpha_1=\inf_{\|x\|\leq 1}(Hx, x) 和\ \alpha_2=\sup_{\|x\|\leq 1}(Hx, x).$$

设 $\lambda_0\in\sigma(H)$. 于是根据定理 1，对每一对适合条件 $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$ 的实数 (λ_1, λ_2)，存在 $y=y_{\lambda_1,\lambda_2}\neq 0$ 使得 $(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))y=y$. 我们可以假设 $\|y\|=1$. 因而

$$\begin{aligned}(Hy, y)&=\int\lambda d(E(\lambda)y, y)=\int\lambda d\|E(\lambda)y\|^2\\ &=\int\lambda d\|E(\lambda)(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))y\|^2\\ &=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}d\|(E(\lambda)-E(\lambda_1))y\|^2.\end{aligned}$$

因此令 $\lambda_1\uparrow\lambda_0$，$\lambda_2\downarrow\lambda_0$，我们便得 $\lim(Hy_{\lambda_1,\lambda_2}, y_{\lambda_1,\lambda_2})=\lambda_0$. 这就证明 $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=\sup\lambda_0\leqq\alpha_2$.

我们假设 $\alpha_2\overline{\in}\sigma(H)$. 于是根据定理 1，存在一对实数 (λ_1, λ_2) 使得 $\lambda_1<\alpha_2<\lambda_2$ 且 $E(\lambda_1)=E(\lambda_2)$. 因而 $I=I-E(\lambda_2)+E(\lambda_1)$，$(I-E(\lambda_2))E(\lambda_1)=E(\lambda_1)(I-E(\lambda_2))=0$，故 $(I-E(\lambda_2))$ 和 $E(\lambda_1)$ 中总有一个不是零算子. 若 $(I-E(\lambda_2))\neq 0$，则存在一 y，具有 $\|y\|=1$ 且 $(I-E(\lambda_2))y=y$. 在

① 原文在此处有误，译者在此作了小小改动.

这种情况下我们有

$$(Hy,y)=\int\lambda d\|E(\lambda)y\|^2=\int\lambda d\|E(\lambda)(I-E(\lambda_2))y\|^2$$

$$=\int_{\lambda_1}^{\infty}\lambda d\|E(\lambda)y\|^2\geqq\lambda_2>\alpha_2;$$

而在 $E(\lambda_1)\neq 0$ 的情况下①, 我们得到

$$(Hz,z)\leqq\lambda_1<\alpha_2 \qquad (\text{对于适合} \|z\|=1 \text{ 的 } z) \text{及 } E(\lambda_1)z=z.$$

所以假设 $\alpha_2\overline{\in}\sigma(H)$是不合理的, 于是我们证明了 $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=\sup\limits_{\|x\|\leq 1}(Hx,x)$. 相仿我们能证明 $\inf\limits_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=\inf\limits_{\|x\|\leq 1}(Hx,x)$.

定理 3 (Krylov-Weinstein) 设H为自伴算子, 并对适合$\|x\|=1$的任一 $x\in D(H)$定义

$$\alpha_x=(Hx,x), \quad \beta_x=\|Hx\|.. \tag{4}$$

则对任一 $\varepsilon>0$, 我们能找到满足下列不等式的一个 $\lambda_0\in\sigma(H)$

$$\alpha_x-(\beta_x^2-\alpha_x^2)^{1/2}-\varepsilon\leqq\lambda_0\leqq\alpha_x+(\beta_x^2-\alpha_x^2)^{1/2}+\varepsilon. \tag{5}$$

证明 我们有

$$\beta_x^2=(Hx,Hx)=(H^2x,x)=\int\lambda^2d\|E(\lambda)x\|^2,$$

$$\alpha_x=(Hx,x)=\int\lambda d\|E(\lambda)x\|^2,$$

$$\|x\|^2=\int d\|E(\lambda)x\|^2.$$

故

$$\beta_x^2-\alpha_x^2=\int\lambda^2d\|E(\lambda)x\|^2-2\alpha_x\int\lambda d\|E(\lambda)x\|^2+\alpha_x^2\int d\|E(\lambda)x\|^2=\int(\lambda-\alpha_x)^2d\|E(\lambda)x\|^2.$$

所以若$\|E(\lambda)x\|^2$ 在由(5)给定的区间中不变, 我们会得到一个矛盾

$$\beta_x^2-\alpha_x^2\geqq((\beta_x^2-\alpha_x^2)^{1/2}+\varepsilon)^2>\beta_x^2-\alpha_x^2.$$

注 所谓 Rayleigh 原理在于取 α_x 作为算子H的谱的一个近似. 如果我们求得了 β_x, 则定理3给出了当我们取 α_x 作为H的谱的一个近似时的误差的上界. 对于这样的误差估计的具体应用我们建议读者参看 K. Yosida[1].

谱的重数 我们将从 n 维 Hilbert 空间 X_n 中的自伴矩阵 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 这种情况开始论述. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p(p\leqslant n)$为$H$的本征值,它们分别具有重数 $m_1,m_2,\cdots,m_p\left(\sum\limits_{j=1}^{p}m_j=n\right)$.设$x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_{m_j}}$为$H$的属于本征值 $\lambda_j(Hx_{j_s}=\lambda_jx_{j_s})$的这样一组标准正交本征矢量, 使得$\{x_{j_s};s=1,2,\cdots,m\}$ 张成H的属于本征值 λ_j 的本征空间 $E_{\lambda_j}=R(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))$. 于是集合 $\{x_{j_s};\ j=1,$

① 更确切地说是: 当$I-E(\lambda_2)=0$ 而 $E(\lambda_1)\neq 0$ 时, 从而 $E(\lambda_1)=E(\lambda_2)=I$——译者注.

$2, \cdots, p$ 且 $s=1, 2, \cdots, m_j\}$ 是空间 X_n 的一完全标准正交矢量系，因而 X_n 的每一矢量能唯一地表成诸 x_{j_s} 的线性组合

$$y=\sum_{j=1}^{p}\sum_{s=1}^{m_j}\alpha_{j_s}x_{j_s}. \tag{6}$$

因此以 P_{λ_j} 记至本征空间 E_{λ_j} 上的投影 $(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))$ 后，对任一 $\alpha<\beta$ 我们有

$$(E(\beta)-E(\alpha))y=\sum_{\alpha<\lambda_j\leq\beta}\left(\sum_{s=1}^{m_j}\alpha_{j_s}x_{j_s}\right)=\sum_{\alpha<\lambda_j\leq\beta}P_{\lambda_j}y, \tag{7}$$

$$P_{\lambda_j}(E(\beta)-E(\alpha))y=\sum_{s=1}^{m_j}\alpha_{j_s}x_{j_s} \text{ 或 } 0 \text{ 视 } \alpha<\lambda_j\leq\beta \text{ 满足或不满足而定.} \tag{8}$$

因而对固定的 $\alpha<\beta$ 和 X_n 的一个固定的线性子空间 M，当 M 的维数 $\dim(M)$ 是 $<m_j$ 时，集合

$$\{(E(\beta)-E(\alpha))y;\ y\in M\}$$

不包含 E_{λ_j}. 此外对一个适合 $\dim(M)=m_j$ 的适当的 M，适合 $\alpha<\lambda_j\leq\beta$ 的集合 $\{(E(\beta)-E(\alpha))y; y\in M\}$ 包含 E_j. 事实上，这个论断对含有 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_{m_j}}$ 的 M 是真的. 特别地当且仅当存在一固定的矢量 $y\in X_n$ 使得矢量的集合

$$\{(E(\beta)-E(\alpha))y; \alpha<\beta\}$$

张成整个空间 X_n 时，$m_1=m_2=\cdots=m_p=1$，其中 $p=n$.

这些讨论导致下列定义：

定义 1. Hilbert 空间 X 中的自伴算子 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 的谱称为*简单的*，如果存在一固定的矢量 $y\in X$ 使得矢量的集合 $\{(E(\beta)-E(\alpha))y; \alpha<\beta\}$ 张成一个在 X 中强稠密的线性子空间.

定义 2 设 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 为 Hilbert 空间 X 中的一自伴算子. 对固定的 $\alpha<\beta$ 考察 $(E(\beta)-E(\alpha))\cdot X$ 的线性子空间 M，它使得

$$(E(\beta)-E(\alpha))\cdot M=(E(\beta)-E(\alpha))\cdot X. \tag{9}$$

例如为了适合条件(9)我们可以取 $M=(E(\beta)-E(\alpha))\cdot X$. 数值 $\dim(M)$ 的集合的下确界，其中 M 适合条件(9)，称为含于区间 $(\alpha, \beta]$ 中的 H 的*谱的完全重数*.

定义 3 *自伴算子* $H=\int\lambda dE(\lambda)$ *在* $\lambda=\lambda_0$ *处的谱的重数*定义成当 $n\to\infty$ 时包含在区间 $(\lambda_0-n^{-1}, \lambda_0+n^{-1})$ 中的 H 的谱的完全重数的极限.

例 坐标算子 H，亦即在 $L^2(-\infty, \infty)$ 内由 $H\cdot x(t)=t\cdot x(t)$ 定义的算子，是简单谱的算子.

证明 我们知道谱分解 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 由

$$E(\lambda)x(t)=x(t) \text{ 或 } =0, \text{ 视 } t\leq\lambda \text{ 或 } t>\lambda \text{ 而定}$$

给定. 设 $y(t)$ 定义为

$$y(t)=c_k>0 \text{ 对 } k-1<t\leq k \ (k=1, \pm1, \pm2, \cdots),$$

$$\text{其中} \sum_k c_k^2<\infty \text{ 从而 } y(t)\in L^2(-\infty, \infty).$$

于是易知形如$(E(\beta)-E(\alpha))y$, $\alpha<\beta$的矢量的线性组合强稠密于具有紧支集的阶梯函数的全体,因而强稠密于$L^2(-\infty,\infty)$.

酉等价性问题 在一个n维Hilbert空间X_n中的两个自伴算子H_1和H_2称为相互酉等价的,如果存在X_n中的酉矩阵U使得$H_1=UH_2U^{-1}$. 众所周知,H_1和H_2相互酉等价当且仅当它们具有相同的本征值组,且对应的本征值分别具有相同的重数. 因此本征值和它们各自的重数一起是自伴矩阵的酉不变量.

关于无限维空间中自伴算子的酉不变量的研究要追溯到E. Hellinger[1]在1909年发表的论文. 例如参看M. H. Stone[1]. 在那里Hilbert空间假定为可分的. 关于不可分Hilbert空间情形,可参看F. Wecken[1]和H. Nakano[1], 也可参看R. Halmos[2]. K. Yosida[13]证明了下面的定理:

设H为Hilbert空间X中的一自伴算子,以$(H)'$记与H可交换的线性算子$\in L(X,X)$的全体. 则X中两个自伴算子H_1和H_2相互酉等价,当且仅当存在一个映$(H_1)'$到$(H_2)'$上的一一映射T使得T定义了环$(H_1)'$与环$(H_2)'$间的这样一个同构:对每一$B\in(H_1)'$成立$(T\cdot B)^*=T\cdot B^*$.

因此环$(H_1)'$的代数结构是H_1的酉不变量.

§9. 一般展开定理. 关于不存在连续谱的一个条件

设$H=\int\lambda dE(\lambda)$为Hilbert空间$X$中的一自伴算子. 于是根据$E(+\infty)=I$和$E(-\infty)=0$,我们有表示式

$$x=\underset{\lambda_1\downarrow-\infty,\lambda_2\uparrow\infty}{s\text{-}\lim}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}dE(\lambda)x=\underset{\lambda_1\downarrow-\infty,\lambda_2\uparrow\infty}{s\text{-}\lim}(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))x \quad \text{对一切}\ x\in X. \tag{1}$$

我们将称(1)为与自伴算子H相关连的一般展开定理. 在一些具体场合中,有时会出现预解式$(\lambda I-H)^{-1}$较之谱分解$H=\int\lambda dE(\lambda)$更易得到的情况. 在这种情况下,一般展开定理(1)可代以

$$x=\underset{\alpha\downarrow-\infty\ \beta\uparrow\infty}{s\text{-}\lim}\ \underset{v\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\alpha^\beta\Big((u-iv)I-H\Big)^{-1}xdu+\int_\beta^\alpha\Big((u+iv)I-H\Big)^{-1}xdu\right],\ x\in X. \tag{1'}$$

证明 若$v\neq0$, 则

$$\Big((u+iv)I-H\Big)^{-1}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{u+iv-\lambda}dE(\lambda)x,\quad \text{对每一}\ x\in X.$$

因为根据用Riemann和逼近积分并注意关系$E(\lambda)E(\lambda')=E(\min(\lambda,\lambda'))$, 对$Im(\mu)\neq0$我们得

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)dE(\lambda)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda'-\mu}dE(\lambda')\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\lambda'-\mu)}d_{\lambda'}(E(\lambda)E(\lambda'))\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{1}{\lambda'-\mu}dE(\lambda')\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}dE(\lambda)=I,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\mu}d_\lambda\left\{E(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda'-\mu)dE(\lambda')\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\mu}d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda'-\mu)d_{\lambda'}(E(\lambda)E(\lambda'))\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\mu}d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}(\lambda'-\mu)dE(\lambda')\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}dE(\lambda)=I.$$

所以，我们有

$$\int_\alpha^\beta\Big((u-iv)I-H\Big)^{-1}xdu+\int_\beta^\alpha\Big((u+iv)I-H\Big)^{-1}xdu$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dE(\lambda)x\left\{\int_\alpha^\beta\frac{du}{u-iv-\lambda}+\int_\beta^\alpha\frac{du}{u+iv-\lambda}\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dE(\lambda)x\left\{\int_\alpha^\beta du\log(u-iv-\lambda)+\int_\beta^\alpha du\log(u+iv-\lambda)\right\},$$

当 $v\downarrow 0$ 时，上式末项强趋近于

$$\int_{\alpha+0}^{\beta-0}2\pi i dE(\lambda)x+\pi i(E(\beta)-E(\beta-0))(x+\pi i(E(\alpha)-E(\alpha-0))x$$

$$=\pi i(E(\beta)+E(\beta-0))x-\pi i(E(\alpha)+E(\alpha-0))x.$$

这就证明了公式 $(1')$.

注 与具有在开区间 (a,b) 上实连续的 $q(x)$ 的二阶微分算子

$$-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$$

相关连的本征函数展开是由 H. Weyl[2] 所开创，由 M. H. Stone[1] 进一步发展，并由 E. C. Titchmarsh[2] 和 K. Kodaira[1] 所完成，Kodaira 给出了直接确定这个展开的一个公式. 这个展开恰好是 (1) 的一个具体应用. 他们的理论的关键点是给出在 $x=a$ 和 $x=b$ 处的可能的边界条件使得算子

$$-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$$

成为 Hilbert 空间 $L^2(a,b)$ 中的一个自伴算子 H. 他们的理论之所以重要在于给出了按特殊函数表出的各种经典展开，例如 Fourier 级数展开，Fourier 积分表示，Hermite 多项式展开，Laguerre多项式展开和 Bessel 函数展开，以一个统一的处理. 我们不予详述，而建议读者参看上面所引的 Titchmarsh 的书和 Kodaira 的论文. 也可参看 N. A. Naimark[2]，N. Dunford-J. Schwartz[5]和 K. Yosida[1]. 最后所引的这本书给出了这个理论的一个初等处理.

如果连续谱 $C_\sigma(H)$ 不出现，则展开(1)将以级数代替而不用积分. 例如我们有下面的

定理 1 设 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 为 Hilbert 空间 X 中的自伴紧算子. 则 (i) $C_\sigma(H)$ 不包含除可能的 0 以外的任何实数；(ii) H 的本征值由仅在 0 处凝聚的至多为可数个的实数所组成；(iii) 对 H 的任一本征值 $\lambda_0\neq 0$，其相应的本征空间 E_{λ_0} 是有限维的.

证明 假定实轴上的闭区间 $[\lambda',\lambda'']$ 不包含数 0. 则值域 $R(E(\lambda'')-E(\lambda'))$ 是有限维的. 因否则，根据第三章 § 5 中的 E. Schmidt 正交化，在 $R(E(\lambda'')-E(\lambda'))$ 中存在一可数标准正交系 $\{x_j\}$. 由于根据 Bessel 不等式

$$\sum_{j=1}^{\infty}|(f,x_j)|^2\leq\|f\|^2 \quad 对任一 f\in X,$$

故我们有 $w\text{-}\lim_{j\to\infty}x_j=0$. 因而根据算子 H 的紧性，存在一子序列 $\{x_{j'}\}$ 使得 $s\text{-}\lim_{j\to\infty}Hx_{j'}=w\text{-}\lim_{j\to\infty}Hx_{j'}=0$. 而另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\|Hx_j\|^2&=\int\lambda^2d\|E(\lambda)x_j\|^2=\int\lambda^2d\|E(\lambda)(E(\lambda'')-E(\lambda'))x_j\|^2\\&=\int_{\lambda'}^{\lambda''}\lambda^2d\|(E(\lambda)-E(\lambda'))x_j\|^2\geq\|x_j\|^2\cdot\min(|\lambda'|^2,|\lambda''|^2)\\&=\min(|\lambda'|^2,|\lambda''|^2),\end{aligned}$$

这是一个矛盾.

若 $C\sigma(H)$ 包含实数 $\lambda_0\neq0$，于是根据前节的定理 1，对任一 $x\in X$ 恒有 $s\text{-}\lim_{\varepsilon\downarrow0}(E(\lambda_0+\varepsilon)-E(\lambda_0-\varepsilon))x=0$. 如上所证的，值域 $R(E(\lambda_0+\varepsilon)-E(\lambda_0-\varepsilon))$ 是有限维的，且维数随 $\varepsilon\downarrow0$ 而单调下降. 因而我们知道对充分小的 $\varepsilon>0$ 必有 $(E(\lambda_0+\varepsilon)-E(\lambda_0-\varepsilon))=0$，故根据前节的定理 1，$\lambda_0$ 不能含于 $C\sigma(H)$ 中.

这就证明了我们的定理.

系 1 设 $\{\lambda_j\}$ 为 H 的所有不为 0 的本征值的组. 则对任一 $x\in X$，我们有

$$x=(E(0)-E(0-0))x+s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))x. \tag{2}$$

证明 由(1)自明.

系 2(Hilbert-Schmidt 展开定理) 对任一 $x\in X$，我们有

$$Hx=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))x. \tag{3}$$

证明 结论由算子 H 的连续性和下列事实而自明：$H(E(0)-E(0-0))=0$ 且 $H(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))x=\lambda_j(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))x$. 后一事实乃由 $R(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))=E_{\lambda_j}$ (H 的属于本征值 λ_j 的本征空间)所保证.

注 (3)中的强收敛在单位圆 $\{x;\|x\|\leq1\}$ 内是一致的. 因为我们有

$$\begin{aligned}\left\|Hx-\int_{|\lambda|>\varepsilon}\lambda dE(\lambda)x\right\|^2&=\left\|\int_{|\lambda|\leq\varepsilon}\lambda dE(\lambda)x\right\|^2=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\lambda^2d\|E(\lambda)x\|^2\\&\leq\varepsilon^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}d\|E(\lambda)x\|^2\leq\varepsilon^2\int d\|E(\lambda)x\|^2=\varepsilon^2\|x\|^2\leq\varepsilon^2.\end{aligned}$$

§ 10. Peter-Weyl-Neumann 理论

设 G 为一完全有界的，由适合条件(见第八章 § 5)

$$\mathrm{dis}(x,y)=\mathrm{dis}(axb,ayb) \quad 对一切 x,y,a 和 b\in G \tag{1}$$

的距离度量化了的拓扑群. 设 $f(g)$ 是定义在 G 上的复值，有界，一致连续的函数. 对任一 $\varepsilon>0$，令

$$V=\{y\in G;\sup_{x\in G}|f(x)-f(y^{-1}x)|<\varepsilon\}. \tag{2}$$

于是，根据 f 的连续性，集合 V 是含有群 G 的单位元 e 的一个开集．因而集合 $U=V\cap V^{-1}$ 也是一开集且包含 e，此处 $V^{-1}=\{y^{-1};y\in V\}$．如果我们命

$$\begin{cases}k(x)=2^{-1}(k_1(x)+k_1(x^{-1})), \quad \text{其中}\\ k_1(x)=\dfrac{\mathrm{dis}(x,U^C)}{\mathrm{dis}(x,e)+\mathrm{dis}(x,U^C)} \qquad (\mathrm{dis}(x,U^C)=\inf\limits_{y\in U^C}(x,y)),\end{cases} \tag{3}$$

则我们有结果：

$$\begin{cases}k(x)\text{ 在 }G\text{ 上是有界一致连续的，且}\\ \text{在 }G\text{ 上 }k(x)=k(x^{-1}),\ \ 0\leqq k(x)\leqq 1,\ \ k(e)=1\\ \text{同时只要 }x\in U^C\text{ 便恒有 }k(x)=0.\end{cases} \tag{4}$$

因而对所有 $x,y\in G$，我们得

$$|k(y)(f(x)-f(y^{-1}x))|\leqq\varepsilon k(y).$$

通过取两边的平均值(见第八章 § 5)，我们得

$$|M_y(k(y))f(x)-M_y(k(y)f(y^{-1}x))|\leqq\varepsilon M_y(k(y)).$$

根据 $k(y)\geqq 0$ 及 $k(y)\not\equiv 0$ 我们有 $M_y(k(y))>0$．因而

$$|f(x)-M_y(k_0(y)f(y^{-1}x))\leqq\varepsilon,\text{其中 }k_0(x)=k(x)/M_x(k(x)). \tag{5}$$

因此由于平均值的不变性 $M_y(g(y^{-1}))=M_y(g(y))=M_y(g(ay))=M_y(g(ya))$，我们由(5)得到

$$|f(x)-M_y(k_0(xy^{-1})f(y)|\leqq\varepsilon \quad \text{对一切 }x\in G. \tag{6}$$

命题 1 我们将以 $C(G)$ 记定义在 G 上的所有复值有界一致连续函数 $h(g)$ 的集合．于是按范数 $\|h\|_0=\sup|h(g)|$，$C(G)$ 为一 B-空间．此时对任意 b 和 $h\in C(G)$，

$$(b\times h)(x)=M_y(b(xy^{-1})h(y)) \tag{7}$$

也属于 $C(G)$．

证明 根据 $\mathrm{dis}(x,z)=\mathrm{dis}(axc,azc)$ 和函数 $b(g)$ 的一致连续性，对任一 $\delta>0$ 存在一 $\eta=\eta(\delta)>0$ 使得

$$\sup_y|b(xy^{-1})-b(x'y^{-1})|\leqq\delta \quad \text{只要 }\mathrm{dis}(x,x')\leqq\eta.$$

因而，象在 Schwarz 不等式的情况那样，我们得

$$\begin{aligned}&|M_y(b(xy^{-1})h(y))-M_y(b(x'y^{-1})h(y))|^2\\ &\qquad\leqq M_y((b(xy^{-1})-b(x'y^{-1}))^2)\cdot M_y(|h(y)|^2)\leqq\delta^2M_y(|h(y)|^2)\end{aligned} \tag{8}$$

只要 $\mathrm{dis}(x,x')\leqq\eta$．这就证明了我们的命题 1．

命题 2 $C(G)$ 按函数和的运算及数积

$$(b,h)=(b\times h^*)(e)=M_y(b(y^{-1})\overline{h(y^{-1})}),\text{ 其中 }h^*(y)=\overline{h(y^{-1})} \tag{9}$$

成一 pre-Hilbert 空间．我们将以 $\hat{C}(G)$ 记这个 pre-Hilbert 空间．

证明 容易．

命题 3 我们将以 $\widetilde{C}(G)$ 记 pre-Hilbert 空间 $\hat{C}(G)$ 的完备化，以 $\|h\|=(h,h)^{1/2}$ 记 Hilbert 空间 $\widetilde{C}(G)$ 中的范数．则由

$$(Th)(x)=(k_0\times h)(x),\quad x\in G \tag{10}$$

定义的映 $\hat{C}(G)$ 入 $\hat{C}(G)$ 内的线性映射 T 能按 $\hat{C}(G)$ 内的连续性扩张成一个映 $\widetilde{C}(G)$ 入 $\widetilde{C}(G)$ 内的紧线性算子 $\widetilde{T}$.

证明 由于 $M_y(1)=1$，我们得

$$\|h\|^2=(h,h)^{1/2}=M_y(h(y)\overline{h(y)})^{1/2}\leqq \sup_y|h(y)|=\|h\|_0. \tag{11}$$

算子 T 在 $\hat{C}(G)$ 中的连续性由相应于(7)的 Schwarz 不等式而自明，故根据 $\hat{C}(G)$ 在 $\widetilde{C}(G)$ 内的稠密性，我们能扩张 T 为 $\widetilde{C}(G)$ 中的有界线性算子 $\widetilde{T}$. 另一方面，由(8)我们知 T 是映 $\hat{C}(G)$ 入 $C(G)$ 内的一紧算子. 我们根据 Ascoli-Arzela 定理证明这一点. 因此，根据 (11) 我们易知 $\widetilde{T}$ 为映 $\hat{C}(G)$ 入 $\hat{C}(G)$ 内的一紧算子.

所以，根据 $\hat{C}(G)$ 在 $\widetilde{C}(G)$ 内的稠密性，我们即知这扩张算子 $\widetilde{T}$ 作为映 $\widetilde{C}(G)$ 入 $\widetilde{C}(G)$ 内的一个算子也是紧的.

现在我们即将证明关于殆周期函数的表示的 Peter-Weyl-Neumann理论.

根据 $k_0(xy^{-1})=k_0(yx^{-1})$ 易知，紧算子 $\widetilde{T}$ 是 Hilbert 空间 $\widetilde{C}(G)$ 中的一自伴算子. 因而根据前节中的 Hilbert-Schmidt 展开定理，我们得

$$\widetilde{T}h=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\lambda_m P_{\lambda_m}h \quad \text{对适合}\|h\|\leqq 1\text{ 的 }h\text{ 一致成立}, \tag{12}$$

这里我们以 $\{\lambda_m\}$ 表示 $\widetilde{T}$ 的所有非零的本征值的组，并以 P_m 表示到 $\widetilde{T}$ 的属于本征值 λ_m 的本征空间上的投影.

由于在本节的一开始就引入的 $f(g)$ 属于 $C(G)$，故我们有 $\widetilde{T}f=Tf\in C(G)$. 因为本征空间 $R(P_{\lambda_m})=P_{\lambda_m}\widetilde{C}(G)$ 是有限维的，故对每一本征值 λ_m，存在元素$\in\widetilde{C}(G)$的有限组 $\{h_{m_j}\}_{j=1,\cdots,n_m}$，使得每一 $h\in R(P_{\lambda_m})=P_{\lambda_m}\cdot\widetilde{C}(G)$ 能表示成诸 $h_{m_j}(j=1,2,\cdots,n_m)$ 的唯一确定的线性组合. 设

$$P_{\lambda_m}h=\sum_{j=1}^{n_m}c_jh_{m_j} \qquad \text{其中诸 } c \text{ 为复数}. \tag{13}$$

于是，因为 $h_{m_j}\in R(P_{\lambda_m})$，我们有 $\widetilde{T}h_{m_j}=\lambda_m h_{m_j}$，故对由(10)给定的算子 T 使用(8)，我们知 $h_{m_j}=\lambda_m^{-1}(\widetilde{T}h_{m_j})$ 必属于 $C(G)$. 因而由(13)我们即知，对 $\widetilde{T}$ 的每个本征值 λ_m，本征空间 $R(P_{\lambda_m})=P_{\lambda_m}\cdot\widetilde{C}(G)$ 由函数 $h_{m_j}\in C(G)$ 张成.

所以根据(12)我们有

$$\begin{cases}(Tf)(x)=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda_m f_m(x) \quad \text{在 }\hat{C}(G)\text{ 的强拓扑下,}\\ \text{其中对每一 } m f_m=P_{\lambda_m}\cdot f\in C(G)\end{cases}$$

对由(10)给定的算子 T 使用(8)，我们即知

$$(T^2f)(x)=\lim_{n\to\infty}M_y\left(k_0(xy^{-1})\cdot\sum_{m=1}^{n}\lambda_m f_m(y)\right) \quad \text{对 } x \text{ 一致成立}. \tag{14}$$

另一方面，由(6)和 $M_y(k_0(y))=1$，我们得

$$|M_z(k_0(xz^{-1})f(z))-M_z(k_0(xz^{-1})M_y(k_0(zy^{-1})f(y))|\leqq\varepsilon,$$

故结合(6)我们有

$$|f(x)-M_z(k_0(xz^{-1})M_y(k_0(zy^{-1})f(y)))|\leqq 2\varepsilon. \tag{15}$$

左端就是$|f(x)-(T^2f)(x)|\leqq 2\varepsilon$.

由于$T\cdot R(P_{\lambda_m})\subseteq R(P_{\lambda_m})$, 故我们证明了

定理 1 函数$f(x)$在G上能由$\widetilde{T}$的属于非零本征值的本征函数的线性组合一致地逼近.

我们将取$\widetilde{T}$的一个固定的本征值$\lambda\neq 0$, 并以$e_1(x), e_2(x), \cdots, e_k(x)$表示其相应的本征空间$P_\lambda\cdot\widetilde{C}(G)$的基$\{h_j\}\subseteq C(G)$. 于是根据平均值的不变性, 对任一$a\in G$, 我们得

$$\begin{aligned}M_y(k_0(xy^{-1})e_j(ya)) &= M_y(k_0(xa\cdot a^{-1}y^{-1})e_j(ya))=M_z(k_0(xa\cdot z^{-1})e_j(z))\\ &=(Te_j)(xa)=\lambda e_j(xa).\end{aligned}$$

由于左端是等于把算子T作用到y的函数$e_j(ya)$上的结果, 故我们知, 对任一给定的$a\in G$, x的函数$e_j(xa)$必唯一地表示成函数$e_1(x), e_2(x), \cdots, e_k(x)$的一个线性组合. 因此我们有

$$e_j(xa)=\sum_{i=1}^{k}d_{ji}(a)e_i(x)\quad (j=1,2,\cdots,k), \tag{16}$$

或者, 用矢量记号,

$$e(xa)=D(a)e(x). \tag{16'}$$

根据$e(x\cdot ab)=D(ab)e(x)$, $e(xa\cdot b)=D(b)e(xa)=D(b)D(a)e(x)$, 注意到$e_1(x)$, $e_2(x)$, $\cdots$, $e_n(x)$的线性无关性, 我们知

$$D(ab)=D(a)D(b),\quad D(e)=k\text{ 阶单位矩阵}. \tag{17}$$

使用 E. Schmidt 正交化, 我们可以假设$\{e_j(x)\}$组成$\widetilde{C}(G)$中的一标准正交系. 于是由(16),

$$M_x(e_j(xa)e_i^*(x))=d_{ji}(a) \tag{18}$$

故矩阵$D(a)$的诸元$d_{ji}(a)$均属于$C(G)$. 根据平均值的不变性, 我们知

$$M_y(e_j(ya)\overline{e_i(ya)})=M_y(e_j(y)\overline{e_i(y)})=\delta_{ij}.$$

因而矩阵$D(a)$给出了一个将标准正交系$\{e_j(x)\}$变换成标准正交系$\{e_j(xa)\}$的线性映射. 所以$D(a)$必为酉矩阵. 因而$D(a)$的转置矩阵$D(a)'$也是酉的, 并有

$$D(ab)'=D(a)'D(b)',\quad D(e)'=k\text{ 阶单位矩阵}. \tag{17'}$$

于是$D(a)'$给出了群G的一个酉矩阵表示, 使得它的矩阵元均是a的连续函数. 在(16)中令$x=e$, 即知每一$e_j(a)$是表示$D(a)'$的矩阵元的线性组合.

因此我们证明了

定理 2(Peter-Weyl-Neumann) 设G为一完全有界的, 按适合$\mathrm{dis}(x,y)=\mathrm{dis}(axb,ayb)$的距离度量化了的拓扑群. 设$f(g)$为任一定义在$G$上的复值有界一致连续函数. 则$f(g)$在$G$上能由群$G$的酉一致连续矩阵表示$D(a)'$的矩阵元的线性组合所一致逼近.

参照在第八章§5中给出的 A. Weil 的推演, 我们得到下面的

系 设G为一抽象群, $f(g)$为G上的一殆周期函数. 则$f(g)$在G上能由群G的酉矩阵表示$D(g)'$的矩阵元的线性组合所一致逼近.

注 1 设群 G 的酉矩阵表示 $D(g)'$ 的阶为 d，亦即矩阵 $D(g)'$ 的阶为 d. 于是每一 $D(g)'$ 给出一个固定的 d 维复Hilbert空间 X_d 到其本身上的线性映射. 表示 $D(g)'$ 称为不可约的，如果不存在 X_d 的任何这样的真子空间 $\neq\{0\}$，它在所有映射 $D(g)'$，$g\in G$ 作用下是不变的. 否则，表示 $D(g)'$ 称为可约的，因而存在一个对每一 $D(g)'$，$g\in G$，均不变的真线性子空间 $X_{d,1}\neq 0$. 于是根据表示 $D(g)'$ 的酉性，$X_{d,1}$ 在 X_d 中的正交补 $X_{d,1}^{\perp}$ 也是对每一 $D(g)$，$g\in G$ 不变的. 如果我们把由 $X_{d,1}$ 的一个标准正交矢量系及 $X_{d,1}^{\perp}$ 的一个标准正交矢量系所组成的标准正交矢量系作为 X_d 的基，于是根据 X_d 的标准正交基的这种选择，表示 $D(g)'$ 将变换成

$$UD(g)'U^{-1}=\begin{pmatrix} D_1(g)' & 0 \\ 0 & D_2(g)' \end{pmatrix},$$

其中 U 为一固定的酉矩阵. 因而可约酉表示 $D(g)'$ 是完全可约化成群 G 的分别作用在 $X_{d,1}$ 和 $X_{d,1}^{\perp}$ 上的两个酉表示 $D_1(g)'$ 和 $D_2(g)'$ 的和. 这样，我们最终能选取一固定的酉矩阵 U_d 使得表示 $U_dD(g)'U_d^{-1}$ 是群 G 的不可约酉表示的和. 所以，在定理 2 和它的系的叙述中，我们能加上矩阵表示 $D(g)'$ 均是不可约的条件.

注 2 在 G 为实数的可加群这一特殊情况下，酉不可约表示 $D(g)'$ 由

$$D(g)'=e^{i\alpha g}，\text{其中 } \alpha \text{ 为一实数，而 } i=\sqrt{-1} \tag{19}$$

给出. 因为根据酉矩阵 $D(g)'$ $(g\in G)$ 的可交换性，表示 $D(g)'$ 是完全可约化成一维酉表示 $\chi(g)$ 的和，亦即是

$$\chi(g_1+g_2)=\chi(g_1)\cdot\chi(g_2),\quad |\chi(g_1)|=1\quad (g_1, g_2\in G),\quad \chi(0)=1 \tag{20}$$

的复值解 $\chi(g)$ 的和. 众所周知，(20)的任一连续解具有形式 $\chi(g)=e^{i\alpha g}$. 因而在实数的可加群 G 上的任一连续殆周期函数 $f(g)$ 在 G 上能由 $e^{i\alpha g}$ 的线性组合一致逼近，其中诸 α 为实数. 这个结果构成了殆周期函数的 H. Bohr 理论中的基本定理. 按照 Bohr的原始定义，一连续函数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 称作殆周期的，如果对每一 $\varepsilon>0$ 存在一正数 $p=p(\varepsilon)$ 使得形如 $(t, t+p)$ 的任一区间至少包含一点 τ 使得

$$|f(x+\tau)-f(x)|\leqslant\varepsilon \qquad \text{对} -\infty<x<\infty.$$

参看 H. Bohr[1]. S. Bochner 已证明一连续函数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 为 Bohr 意义下殆周期的，当且仅当下列条件满足：对任一实数序列 $\{a_n\}$，函数组 $\{f_{a_n}(x); f_{a_n}(x)=f(x+a_n)\}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的一致收敛拓扑下是完全有界的. 此结果已由 J. von Neumann[4] 推广到群上的殆周期函数. Neumann 的结果包含紧 Lie 群的连续表示的 Peter-Weyl 理论 (Peter-Weyl[1]) 作为特殊情况. 按照我们的论证，注意到由 $\lim|s-t|=0$ 必导致 $\lim[\sup\limits_{a,b}|f(asb)-f(atb)|]=0$，Bohr 的结果容易得证.

§11. 关于不可交换紧群的 Tannaka 对偶性定理

设 G 为一紧(拓扑)群. 这意味着 G 既是一紧拓扑空间又是一个群，且使得积空间 $G\times G$ 到 G 上的映射

$$(x, y) \longrightarrow xy^{-1}$$

是连续的.

命题 1 定义在紧群 G 上的复值连续函数 $f(g)$ 在下述意义下是一致连续的:

$$\begin{cases}\text{对任一 } \varepsilon>0, \text{存在 } G \text{ 的单位元 } e \text{ 的一个} \\ \text{邻域 } U(e), \text{使得只要 } xy^{-1}\in U(e) \text{ 及} \\ x^{-1}y\in U(e) \text{ 便有 } |f(x)-f(y)|<\varepsilon.\end{cases} \tag{1}$$

证明 由于 $f(x)$ 在每一点 $a\in G$ 处连续, 故存在 a 的邻域 V_a 使得 $x\in V_a$ 导致 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon/2$. 若我们以 U_a 记由 $U_a=V_a a^{-1}=\{va^{-1};\ v\in V\}$ 定义的 e 的邻域, 则 $xa^{-1}\in U_a$ 导致 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon/2$. 我们以$W_a$表示 e 的这样的邻域, 它使得 $W_a^2\subseteq U_a$, 其中 $W_a^2=\{w_1w_2;\ w_i\in W_a(i=1, 2)\}$. 显然, 形如 $W_a\cdot a$ 的所有开集的组复盖了整个 G, 其中 a 为G的任意元. 由于 G 为紧, 故存在有限集$\{a_i;\ i=1, 2, \cdots, n\}$使得开集 $W_{a_i}\cdot a_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的系复盖 G. 我们以 $U(e)$ 表示系$\{W_{a_i}\}$的所有开集的交. 于是 $U(e)$是 e 的邻域. 我们来证明, 若 $xy^{-1}\in U(e)$, 则 $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$. 由于系 $W_{a_i}\cdot a_i$ 复盖 G, 故存在数 k 使得 $ya_k^{-1}\in W_{a_k}\subseteq U_{a_k}$, 所以 $|f(y)-f(a_k)|<\varepsilon/2$. 此外我们有 $xa_k^{-1}=xy^{-1}ya_k^{-1}\in U(e)W_{a_k}\subseteq W_{a_k}^2\subseteq U_{a_k}$, 故$|f(x)-f(a_k)|<\varepsilon/2$. 联合这二个不等式我们得$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

如果我们以 e 的这样的邻域 U_a, 它使得 $x^{-1}a\in U_a$ 导致$|f(x)-f(a)|<\varepsilon/2$, 作为出发点, 我们就会得到 e 的一个邻域 $U(e)$, 它使得只要 $x^{-1}y\in U(e)$ 便有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 因此取这样两个 $U(e)$的交作为命题叙述中的 $U(e)$, 我们便完成了证明.

系 紧群 G 上的复值连续函数 $f(x)$是 G 上的殆周期函数.

证明 设$U(e)$为命题 1 中给出的 e 的邻域. 对任一 $a\in G$, $U(e)a$ 是 a 的一邻域. 紧群 G 被开集系 $U(e)a$, $a\in G$所覆盖, 所以某个有限子系$\{U(e)a_i;\ i=1, 2, \cdots, n\}$覆盖 G. 亦即对任一 $a\in G$, 存在某 $a_k(k\leq n)$使得 $aa_k^{-1}\in U(e)$. 因而根据 $(ax)(a_kx)^{-1}=aa_k^{-1}$, 我们有 $\sup\limits_x|f(ax)-f(a_kx)|<\varepsilon$. 相仿, 我们能找到一有限系$\{b_j, j=1, 2, \cdots, m\}$使得对任一 $b\in G$, 存在某个 $b_j(j\leqq m)$ 满足不等式

$$\sup_{i, x}|f(a_ixb)-f(a_ixb_j)|<\varepsilon.$$

所以, 对 $\in G$ 的任一对元 a, b, 我们能找到 a_k和 $b_j(k\leqslant n, j\leqslant m)$使得

$$\sup_x|f(axb)-f(a_kxb_j)|<2\varepsilon.$$

这就证明函数组 $\{f_{a,b}(x);f_{a,b}(x)=f(axb),\ a \text{ 和 } b\in G\}$ 按极大范数 $\|h\|=\sup\limits_x|h(x)|$是完全有界的. 因而 $f(x)$是 G 上殆周期的.

现在我们能够将前节的 Peter-Weyl-Neumann 理论推广到紧群 G 上的复值连续函数$f(x)$ 上. 对这样的一个函数 $f(x)$和 $\varepsilon>0$, 我们令

$$V=\{y\in G;\ \sup_x|f(x)-f(y^{-1}x)|<\varepsilon\}.$$

于是根据 f 的连续性, 集合 V 是一个包含 e 的开集. 应用 Urysohn 定理于正规空间 G, 我们知存在定义在 G 上的一连续函数 $k_1(x)$使得 $0\leqq k_1(x)\leqq 1$ 在 G 上; $k_1(e)=1$ 且 $k_1(x)=0$ 只要 $x\in V^c$.

于是连续函数

$$k(x)=2^{-1}(k_1(x)+k_1(x^{-1})) \tag{2}$$

满足条件 $k(x^{-1})=k(x)$ 且

$$\begin{cases}0\le k(x)\le 1 \quad \text{在}\ G\ \text{上；}\ k(e)=1\ \text{且}\ k(x)=0\\ \text{只要}\quad x\in U^C,\ \text{其中}\ U=V\cup V^{-1}.\end{cases}$$

所以，如果我们以 $C(G)$ 记定义在 G 上且按极大范数赋范的所有复值连续函数的 B-空间，我们能由

$$(Th)(x)=(k_0\times h)(x),\quad x\in G \tag{3}$$

定义一个映 $\hat{C}(G)$ 入 $\hat{C}(G)$ 中的线性算子 T. 此处，象在前节中一样，

$$k_0(x)=k(x)/M_x(k(x)) \tag{4}$$

且 $\hat{C}(G)$ 是赋予数积

$$(b,h)=M_y(b(y)\overline{h(y)})=(b\times h^*)(e),\quad h^*(y)=\overline{h(y^{-1})} \tag{5}$$

的空间 $C(G)$.

因此，正如前节中一样，我们得到

定理 1 定义在紧群 G 上的任一连续函数 $f(g)$ 是殆周期的，且 $f(g)$ 在 G 上能由 G 的酉的，连续的，不可约矩阵表示的矩阵元的线性组合所一致逼近.

我们将称群 G 的两个矩阵表示 $A_1(g)$ 和 $A_2(g)$ 是等价的，如果存在一固定的非奇异矩阵 B 使得对一切 $g\in G$ 恒有 $B^{-1}A_1(g)B=A_2(g)$.

命题 2（I. Schur 引理） 如果表示 $A_1(g)$ 和 $A_2(g)$ 是不可约和不等价的，则除了 $B=0$ 外，不存在任何矩阵 B 使得

$$A_1(g)B=BA_2(g) \tag{6}$$

对 g 恒成立. 在(6)中，矩阵 B 假定为 n_1 行和 n_2 列的，其中 n_1, n_2 分别为 $A_1(g)$ 和 $A_2(g)$ 的阶.

证明 设 X_1 和 X_2 分别为施行线性变换 $A_1(g)$ 和 $A_2(g)$ 的线性空间.（6）中的 B 能看成 X_2 到 X_1 上的线性映射 $x_2\to x_1=Bx_2$. X_1 中由形如 Bx_2 的所有矢量 x_1 组成的线性子空间是不变子空间，因为 $A_1(g)x_1=Bx'_2$，其中 $x'_2=A_2(g)x_2$. 由于 $A_1(g)$ 的不可约性，只有两种可能：或者对 X_2 中的一切 x_2 恒有 $Bx_2=0$，亦即 $B=0$，或者 $X_1=BX_2$. 另一方面，X_2 中使得 $Bx_2=0$ 的所有矢量 x_2 的集合是 X_2 的一个不变子空间，因为 $BA_2(g)x_2=A_1(g)Bx_2=0$. 由 $A_2(g)$ 的不可约性，我们得：或者对 X_2 中的所有 x_2 恒有 $Bx_2=0$，亦即 $B=0$，或者 $x_2=0$ 是 X_2 中唯一使得 $Bx_2=0$ 的矢量，从而 X_2 中不同的矢量在线性映射 B 作用下成为 X_1 中不同的矢量. 于是若 $B\neq 0$，我们断定 B 定义了一个 X_2 到 X_1 上的一一线性映射. 然而这意味着 B 是一非奇异矩阵 $(n_1=n_2)$，故 $A_1(g)$ 和 $A_2(g)$ 将是等价的.

命题 3（正交性关系） 设 $A_1(g)=(a^1_{ij}(g))$ 和 $A_2(g)=(a^2_{ij}(g))$ 为群 G 的酉的，连续的，不可约矩阵表示. 则我们有*正交性关系*：

$$\begin{cases}M_g(a^1_{ij}(g)\overline{a^2_{kl}(g)})=0 \quad \text{若}\ A_1(g)\ \text{不等价于}\ A_2(g),\\ M_g(a^1_{ij}(g)\overline{a^1_{kl}(g)})=n_1^{-1}\delta_{ik}\delta_{jl},\ \text{其中}\ n_1\ \text{是}\ A_1(G)\ \text{的阶}.\end{cases} \tag{7}$$

证明 设 n_1, n_2 分别为 $A_1(g)$，$A_2(g)$ 的阶. 取任一 n_1 行和 n_2 列的矩阵 B，并令 $A(g)=A_1(g)BA_2(g^{-1})$. 于是矩阵 $A=M_g(A(g))$ 满足 $A_1(g)A=AA_2(g)$. 因为根据平均值的不变性，我们有

$$A_1(y)AA_2(y^{-1})=M_g(A_1(y)A_1(g)BA_2(g^{-1})A_2(y^{-1}))$$
$$=M_g(A_1(yg)BA_2((yg)^{-1}))=A.$$

根据 Schur 引理，A 必为零矩阵. 如果我们以这样的方式取 $B=(b_{jl})$，使得只有 b_{jl} 不为零，于是根据酉性条件 $A_2(g^{-1})=\overline{A_2(g)^T}$，我们得

$$M_g(a_{ij}^1(g)\overline{a_{kl}^2(g)})=0.$$

其次，如上对 $A=M_g(A_1(g)BA_1(g^{-1}))$ 我们有 $A_1(g)A=AA_1(g)$. 设 α 为矩阵 A 的任意一个本征值. 于是矩阵 $(A-\alpha I_{n_1})$，其中 I_{n_1} 表示 n_1 阶的单位矩阵，满足

$$A_1(g)(A-\alpha I_{n_1})=(A-\alpha I_{n_1})A_1(g).$$

所以根据 Schur 引理，矩阵 $(A-\alpha I_{n_1})$ 或者是非奇异的，或者 $(A-\alpha I_{n_1})=0$. 由于 α 是 A 的本征值，故第一种可能性被排除. 因此 $A=\alpha I_{n_1}$. 取 $A=M_g(A_1(g)BA_1(g^{-1}))$ 的两边的**迹**（对角元的和），我们得

$$n_1\alpha=\text{迹}(A)=M_g(\text{迹}(A_1(g)BA_1(g)^{-1}))=M_g(\text{迹}(B))=\text{迹}(B).$$

所以如果我们以这样的方式取 $B=(b_{jl})$，使得 $b_{jl}=1$ 而同时其它的元均为零，则由 $M_g(A_1(g)BA_1(g^{-1}))=n_1^{-1}\text{迹}(B)\cdot I_{n_1}$，我们得

$$M_g(a_{ij}^1(g)\overline{a_{kl}^1(g)})=n_1^{-1}\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

系 存在 G 的相互不等价的，连续的，酉的，不可约矩阵表示 $U(g)=(u_{ij}(g))$ 的集合 $\mathfrak{U}$，它满足下面三个条件：

i）对 G 的任一对不同的点 g_1, g_2，存在一 $U(g)\in\mathfrak{U}$ 使得 $U(g_1)\neq U(g_2)$，

ii）若 $U(g)\in\mathfrak{U}$，则 $U(g)$ 的**复共轭表示** $\overline{U}(g)$ 也属于 $\mathfrak{U}$，

iii）若 $U_1(g), U_2(g)$ 为 $\mathfrak{U}$ 中元，则（在下面解释的）**积表示** $U_1(g)\times U_2(g)$ 完全可约化为有限个 $\in\mathfrak{U}$ 的表示的和.

证明 积表示 $U_1(g)\times U_2(g)$ 的定义给定如下. 设 $(e_1^1, e_2^1, \cdots, e_n^1)$ 和 $(e_1^2, e_2^2, \cdots, e_m^2)$ 分别为施行线性映射 $U_1(g)$ 和 $U_2(g)$ 的有限维复 Hilbert 空间的标准正交基. 这二个 Hilbert 空间的积空间为由 nm 个矢量 $e_i^1\times e_j^2$ $(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m,)$ 组成的**积基**所张成. 参照于这个基，$U_1(g)=(u_{ij}^1(g))$ 和 $U_2(g)=(u_{kl}^2(g))$ 的积表示 $U_1(g)\times U_2(g)$ 由

$$(U_1(g)\times U_2(g))(e_i^1\times e_j^2)=\sum_{s,t}u_{si}^1(g)u_{tj}^2(g)(e_s^1\times e_t^2)$$

所给定.

我们取相互不等价，连续，酉且不可约矩阵表示 $U(g)$ 的满足条件 ii）的极大集合 $\mathfrak{U}$. 于是根据定理 1，条件 i）满足. 条件 iii）也满足，这是因为两个酉表示的积表示仍然是酉的，因而是完全可约化的.

现在我们即将叙述 **T. Tanaka 对偶性定理**. 设 $\mathfrak{P}$ 为所有 **Fourier 多项式**：

$$x(g)=\sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g)$$

亦即是$u_{ij}^{(\alpha)}(g)$的有限线性组合的集合，其中$(u_{ij}^{(\alpha)}(g))\in\mathfrak{U}$，而$\gamma_{ij}^{(\alpha)}$表示复数．于是$\mathfrak{R}$为一具有乘法单位元$u$(在$G$上$u(g)\equiv 1$)和复数乘子(complex multiplier)的环；环$\mathfrak{R}$中的和与乘法分别理解为函数和与函数乘积．设$\mathfrak{T}$为环$\mathfrak{R}$到复数域上且使得

$$Tu=1,\quad T\bar{x}=\overline{Tx},\quad \text{“—”表示复共轭}, \tag{8}$$

成立的所有的线性同态T的集合．$\mathfrak{T}$是非空的，这是因为每一$g\in G$派生出这样的一个同态T_g:

$$T_g x=x(g). \tag{9}$$

根据对$\mathfrak{U}$的条件 i)，我们知

$$g_1\neq g_2 \quad \text{导致} \quad T_{g_1}\neq T_{g_2}. \tag{10}$$

命题 4 $\mathfrak{T}$可看成一个群，它包含G作为子群．

证明 我们将在$\mathfrak{T}$中定义积$T_1\cdot T_2=T$如下．

设

$$U^{(\alpha)}(g)=(u_{ij}^{(\alpha)}(g)) \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

为$\mathfrak{U}$的一元．对$w_{ij}^{(\alpha)}(g)=\sum_k u_{ik}^{(\alpha)}(g)u_{kj}^{(\alpha)}(g)$，我们置

$$T\cdot u_{ij}^{(\alpha)}(g)=\sum_k T_1 u_{ik}^{(\alpha)}(g)\cdot T_2 u_{kj}^{(\alpha)}(g). \tag{11}$$

根据正交关系(7)，我们知诸函数$u_{ij}^{(\alpha)}(g)$，其中$(u_{ij}^{(\alpha)}(g))\in\mathfrak{U}$，是在$G$上线性无关的．因而即知$T$可线性扩张到整个$\mathfrak{R}$上．易知此扩张$T$亦为$\mathfrak{T}$的一元．且$\mathfrak{T}$为具有单位元$T_e$($e=G$的单位元)的一个群，同时$T_g^{-1}=T_{g^{-1}}$．通过对应$g\longleftrightarrow T_g$，$G$同构嵌入这个群$\mathfrak{T}$中，这一点将由(11)和(10)而知．

事实上，我们有

定理 2(T. Tanaka) $\mathfrak{T}=G$，即每一$T\in\mathfrak{T}$等于某一T_g:

$$Tx=x(g) \qquad \text{对一切 } x\in\mathfrak{R}. \tag{12}$$

证明 我们通过取形如

$$\{T\in\mathfrak{T},\ |Tx_i-T_e x_i|<\varepsilon_i \quad (i=1,2,\cdots,n)\} \tag{13}$$

的集合作为群$\mathfrak{T}$的单位元T_e的邻域而在群$\mathfrak{T}$中引入弱拓扑．于是$\mathfrak{T}$为一紧空间．因为根据由(8)和(11)蕴涵的关系$\sum_s |Tu_{si}^{(\alpha)}(g)|^2=(T\cdot T)(1)=1$，$\mathfrak{T}$是紧空间的拓扑积

$$\prod\{z;\ |z|\leq\sup|Tx|\} \quad (x\in\mathfrak{R},\quad T\in\mathfrak{T})$$

的一闭子集，故我们能使用 Tychonov 定理．易知同构嵌入$g\longleftrightarrow T_g$也是拓扑的，这是因为紧空间到紧空间上的一个一一连续映射是一拓扑映射．所以G可以视为紧群$\mathfrak{T}$的一闭子群．

根据上面的$\mathfrak{T}$的弱拓扑，每一$x(g)\in\mathfrak{R}$产生一个在紧群G上的连续函数$x(T)$使得$x(T_g)=x(g)$．为此我们只须令$x(T)=T\cdot x$．所有这些连续函数$x(T)$的集合构成$\mathfrak{T}$上的一个复值连续函数环$\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$，它满足条件:

1) $1=u(T)\in\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$,

2) 对$\mathfrak{T}$的任一对不同点 T_1 和 T_2, 存在一 $x(T)\in\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ 使得 $x(T_1)\neq x(T_2)$,

3) 对任一 $x(T)\in\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$, 存在复值共轭函数 $\bar{x}(T)=\overline{x(T)}$, 它属于 $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$.

今假定 $\mathfrak{T}-G$ 非空. 由于紧空间 $\mathfrak{T}$ 是正规的, 我们可以使用 Urysohn 定理得知存在一点 $T_0\in(\mathfrak{T}-G)$ 和一 $\mathfrak{T}$ 上的连续函数 $y(T)$ 使得

$$y(T)\geqq 0 \text{ 在 } \mathfrak{T} \text{ 上}, y(g)=0 \text{ 在 } G \text{ 上且 } y(T_0)=1. \tag{14}$$

根据第 0 章中的 Stone-Weierstrass 定理, 把它应用于满足 1), 2) 和 3) 的环 $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$, 我们即知对任意 $\varepsilon>0$, 存在一函数 $x(g)=\sum\gamma_{ij}^{(\alpha)}u_{ij}^{(\alpha)}(g)\in\mathfrak{R}$ 使得在 $\mathfrak{T}$ 上有 $|y(T)-\sum\gamma_{ij}^{(\alpha)}u_{ij}^{(\alpha)}(T)|<\varepsilon$, 因而特别在 G 上有 $|y(g)-\sum\gamma_{ij}^{(\alpha)}u_{ij}^{(\alpha)}(g)|<\varepsilon$. 设 $u_{11}^{(\alpha_0)}(g)=u(g)=1$. 于是通过取平均值并注意到正交性关系(7), 把它应用于紧群 $\mathfrak{T}$ 和 G, 我们便得

$$|M_T(y(T))-\gamma_{11}^{(\alpha_0)}|<\varepsilon,\quad |M_g(y(g))-\gamma_{11}^{(\alpha_0)}|<\varepsilon. \tag{15}$$

因此我们导致矛盾. 因为 $M_T(y(T))>0$ 同时根据(14)有 $M_g(y(g))=0$.

注 1 Tanaka 定理的上面这种证明取自 K. Yosida[14]. 原始证明在 T. Tanaka[1] 中给出. 由于紧阿贝尔群的连续, 酉且不可约矩阵表示恰恰是 G 上满足条件

$$\chi(g_1)\chi(g_2)=\chi(g_1g_2) \quad \text{且} \quad |\chi(g)|=1$$

的连续函数 $\chi(g)$, 故 Tanaka 定理包含 L. Pontrjagin[1]的对偶性定理作为特殊情况. 关于进一步的文献, 请参看 M. A. Naimark[1].

注 2 为了使用第八章 § 5 中给出的方法定义 G 上连续函数 $f_k(g)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 的平均值, 我们只须以 $\operatorname{dis}(g_1,g_2)=\sup_{g,h\in G,k=1,2,\cdots,m}|f_k(gg_1h)-f_k(gg_2h)|$ 代替那里的 $\operatorname{dis}(g_1,g_2)$.

§ 12. 自伴算子的函数

设 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 为 Hilbert 空间 X 中自伴算子 H 的谱分解. 对复值 Baire 函数 $f(\lambda)$, 我们考察集合

$$D(f(H))=\left\{x\in X;\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2<\infty\right\}, \tag{1}$$

其中积分是关于由 $m((\lambda_1,\lambda_2])=\|E(\lambda_2)x\|^2-\|E(\lambda_1)x\|^2$ 确定的 Baire 测度而作出的. 象在第十一章 § 5 中论证过的连续函数 $f(\lambda)$ 的情形一样, 我们知积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,y),\quad x\in D(f(H)),\quad y\in X \tag{2}$$

关于由 $m((\lambda_1,\lambda_2])=(E(\lambda_2)x,y)-(E(\lambda_1)x,y)$ 所确定的 Baire 测度是存在且有限的. 此外我们知(2)给出了 y 的有界线性泛函的一个复共轭. 因而根据第三章 § 6 中的 F. Riesz 表示定理, 我们可以把(2)写成 $(f(H)x,y)$. 因此, 我们能通过(1)和(2)定义 H 的函数

$$f(H)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda) \tag{3}$$

例 1 如果H为有界自伴且$f(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda^j$，则象第十一章§5中一样，

$$f(H)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_jH^j.$$

例 2 如果$f(\lambda)=(\lambda-i)(\lambda+i)^{-1}$，则$f(H)$等于$H$的Cayley变换$U_H$. 由于对实数$\lambda$恒有$|f(\lambda)|=1$，故此时我们有$D(f(H))=X$. 由$E(\lambda_1)E(\lambda_2)=E(\min(\lambda_1,\lambda_2))$易知如果我们把有界算子$(H-iI)^{-1}=\int(\lambda-i)^{-1}dE(\lambda)$作用到算子$f(H)=\int f(\lambda)dE(\lambda)$上，则其结果等于$(H+iI)^{-1}=\int(\lambda+i)^{-1}dE(\lambda)$. 因而$f(H)=U_H$.

例 3 和第十一章§5中一样，我们有

$$\|f(H)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2 \text{ 只要 } x\in D(f(H)). \tag{4}$$

定义 设A为Hilbert空间中一未必有界的线性算子，B为此空间中一有界线性算子. 若

$$x\in D(A)\text{ 导致 }Bx\in D(A)\text{ 且 }ABx=BAx, \tag{5}$$

亦即如果$AB\supseteq BA$，则我们将记$B\in(A)'$，并称B是与A可交换的. 因此我们将把与A可交换的有界线性算子B的全体记为$(A)'$.

定理 1 对于Hilbert空间X的自伴算子$H=\int\lambda dE(\lambda)$的函数$f(H)$，我们有

$$(f(H))'\supseteq(H)', \tag{6}$$

亦即$f(H)$是与一切与H可交换的有界线性算子可交换的（由于根据第十一章§5中的定理2有$E(\lambda)\in(H)'$，故我们知，特别有$f(H)$与一切$E(\lambda)$是可交换的）.

证明 假定$S\in(H)'$. 于是我们能证明S与每一$E(\lambda)$可交换. 我们首先证明S与H的Cayley变换U_H可交换. 因若$x\in D(H)$，则根据$S\in(H)'$我们有

$$S(H+iI)x=(H+iI)Sx,\quad (H-iI)Sx=S(H-iI)x.$$

命$(H+iI)x=y$，从上面的第一个关系式我们知

$$(H+iI)^{-1}Sy=S(H+iI)^{-1}y \text{ 对一切 } y\in X=R(H+iI).$$

因而

$S(H-iI)(H+iI)^{-1}=(H-iI)(H+iI)^{-1}S$，亦即$SU_H=U_HS$. 所以$S$与$(U_H)^n=\int_0^{2\pi}e^{ni\theta}dF(\theta)$ $(n=0,\pm1,\cdots)$可交换，故

$$\int_0^{2\pi}e^{ni\theta}d(SF(\theta)x,y)=\left(S\int_0^{2\pi}e^{ni\theta}dF(\theta)x,\ y\right)=\int_0^{2\pi}e^{ni\theta}d(F(\theta)Sx,y).$$

因而如由第十一章§4中给出的酉算子的谱分解的唯一性证明中所表明，我们得$SF(\theta)=F(\theta)S$. 这就证明$SE(\lambda)=E(\lambda)S$，因为$E(-\cos\theta)=F(\theta)$. 因此对$x\in D(f(H))$，我们得

$$\left(S\int f(\lambda)dE(\lambda)x,\ y\right)=\int f(\lambda)d(SE(\lambda)x,y)=\int f(\lambda)d(E(\lambda)Sx,y),$$

亦即 $Sf(H)\subseteq f(H)S$.

上面的定理1具有如下形式的逆命题.

定理2 (Neumann-Riesz-Mimura) 设H为可分 Hilbert 空间X中的一自伴算子. 又设T为X中的一闭线性算子使得 $D(T)^a=X$. 则为了使T成为H的函数 $f(H)$, 此处 $f(\lambda)$是一处处有限的 Baire 函数, 其充分和必要条件是

$$(T)'\supseteq(H)'. \tag{7}$$

证明 只须证明条件(7)是充分的. 我们可以假设H是有界自伴算子. 若H不是有界的, 此时我们考察 $H_1=\tan^{-1}H$. 由于 $|\tan^{-1}\lambda|<\pi/2$, 故易知 H_1 为有界自伴算子. 根据定理1, 算子 $H=\tan H_1$ 与一切 $\in(H_1)'$ 的算子可交换. 因此根据假设我们有

$$(T)'\supseteq(H)'\supseteq(H_1)'.$$

所以, 如果定理2对有界的 H_1 得到证明, 则 $T=f_1(H_1)=f_1(\tan^{-1}H)=f_2(H)$, 其中 $f_2(\lambda)=f_1(\tan^{-1}\lambda)$.

因此我们可以假设H是有界且自伴的.

第一步 对任一固定的 $x_0\in D(T)$, 我们能找到一 Baire 函数 $F(\lambda)$使得 $Tx_0=F(H)x_0$. 这可如下证明. 设 $M(x_0)$为由 $x_0, Hx_0, H^2x_0, \cdots, H^nx_0, \cdots$所张成的最小闭线性子空间. 用$L$表示到 $M(x_0)$上的投影. 此时$(T)'\ni L$. 因为由 $HM(x_0)\subseteq M(x_0)$, 我们得 $HL=LHL$, 故 $LH=(HL)^*=(LHL)^*=LHL=HL$, 亦即 $L\in(H)'$. 因而根据假设有$(T)'\ni L$.

所以 $Tx_0=TLx_0=LTx_0\in M(x_0)$, 故存在一多项式序列$\{p_n(\lambda)\}$使得

$$Tx_0=s\text{-}\lim_{n\to\infty}p_n(H)x_0. \tag{8}$$

因而根据(4)我们得

$$\|p_n(H)x_0-p_m(H)x_0\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|p_n(\lambda)-p_m(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x_0\|^2.$$

和在 $L^2(S,\mathfrak{B},m)$的完备性证明中一样, 我们知道存在一 Baire 函数 $F(\lambda)$, 它关于由 $m((\lambda_1,\lambda_2])=\|E(\lambda_2)x_0\|^2-\|E(\lambda_1)x_0\|^2$ 所确定的测度m是平方可积的, 且使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)-p_n(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x_0\|^2=0.$$

因而对 $F(H)$ 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|(F(H)-p_n(H)x_0\|^2=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)-p_n(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x_0\|^2=0.$$

这就证明了 $Tx_0=F(H)x_0$. 由于 $F(\lambda)$关于由 $m((\lambda_1,\lambda_2])=\|E(\lambda_2)x_0\|^2-\|E(\lambda_1)x_0\|^2$ 确定的测度m是几乎处处有限的, 故我们可以假设 $F(\lambda)$为一在每一λ处取有限值的 Baire 函数; 对于那些使$|F(\lambda)|=\infty$ 的λ我们可以令 $F(\lambda)=0$.

第二步 由于X是可分的且 $D(T)^a=X$, 故我们可以选择一可数的序列$\{g_n\}\subseteq D(T)$使得$\{g_n\}$在X内强稠密. 我们令

$$\begin{cases} f_1=g_1,\ f_2=g_2-L_1g_2,\ \cdots,\ f_n=g_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}L_kg_n,\ \text{其中}\ L_k \\ \text{为到闭线性子空间}\ M(f_k)\ \text{上的投影}. \end{cases} \tag{9}$$

根据第一步，我们有$(T)'\ni L_k$，故

$$L_kg_n\in D(T)\ \text{而此导致}\ f_n\in D(T)\quad (n=1,2,\cdots). \tag{10}$$

我们可以证明

$$L_iL_k=0\quad (\text{当}\ i\neq k) \tag{11}$$

及

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}L_k. \tag{12}$$

假定对 $i,k<n$ 时(11)已得证．于是对 $i<n$ 有

$$L_if_n=L_ig_n-L_i\left(\sum_{k=1}^{n-1}L_kg_n\right)=L_ig_n-L_i^2g_n=L_ig_n-L_ig_n=0,$$

$$L_iH^{k'}f_n=H^{k'}L_if_n=0.$$

因此 $M(f_n)$ 与 $M(f_i)$ 正交．这就证明 $L_iL_n=L_nL_i=0$.

其次我们置$\sum\limits_{k=1}^{\infty}L_k=P$，我们证明 $Pg_n=g_n(n=1,2,\cdots)$．由于$\{g_n\}$在X中稠密，故我们得$P=I$．然而由(9)我们有

$$Pg_n=Pf_n+\sum_{k=1}^{n-1}PL_kg_n.$$

根据 $f_n\in M(f_n)$ 我们还有 $Pf_n=f_n$．因而根据由(11)所蕴涵的 $PL_k=L_k$，我们得 $Pg_n=g_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

第三步 取一正数序列$\{c_n\}$使得

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}c_nf_n,\qquad s\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}c_nTf_n$$

均存在．例如，我们可取 $c_n=2^{-n}(\|f_n\|+\|Tf_n\|)^{-1}$．由于$T$是闭算子，故我们有

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}c_nf_n\in D(T)\quad \text{且}\quad Tx_0=y_0=\sum_{n=1}^{\infty}c_nTf_n. \tag{13}$$

因而由第一步有

$$Tx_0=F(H)x_0. \tag{14}$$

设 $B\in(H)'$ 为一有界自伴算子．于是根据假设 $B\in(T)'$．由定理1，$F(H)$ 与 B 可交换．因而

$$F(H)Bx_0=BF(H)x_0=BTx_0=TBx_0. \tag{15}$$

设 $e_n(\lambda)$ 为集合$\{\lambda;\ |F(\lambda)|\leqq n\}$的特征函数，令

$$B=c_m^{-1}P_nH^kL_m, \text{ 其中 } P_n=e_n(H).$$

于是我们能证明

$$TP_n=F(H)P_n. \tag{16}$$

事实上，根据(11)和 $f_m\in M(f_m)$ 我们有 $L_mx_0=\sum_{n=1}^{\infty}c_nL_mf_n=c_mf_m$. 因而由(15)

$$F(H)P_nH^kf_m=F(H)c_m^{-1}P_nH^kL_mx_0=F(H)Bx_0=TBx_0$$
$$=Tc_m^{-1}P_nH^kL_mx_0=TP_nH^kf_m,$$

亦即对于由 H^kf_m 张成的 h，其中 m 固定，我们有

$$F(H)P_nh=TP_nh. \tag{16'}$$

但是这样的诸 h 是在 $M(f_m)$ 中稠密的，故根据(12)我们知，如果让 m 取所有正整数，则诸 h 在 X 中是稠密的. 因而我们对那些在 X 中稠密的诸 h 证明了(16′).

由(4)P_n 是有界的. 根据下面给出的运算微积，算子 $F(H)P_n$ 等于函数 $F_n(H)$，其中

$$F_n(\lambda)=F(\lambda)e_n(\lambda)=F(\lambda) \text{ 对 } |F(\lambda)|\leq n, =0 \text{ 对 } |F(\lambda)|>n.$$

因此 $F_n(H)=F(H)P_n$ 是有界的.

设 $h^*\in X$ 为任意，又设 $h^*=s\text{-}\lim_{j\to\infty}h_j$，其中诸 h_j 是形如 H^kf_m 的元的线性组合. 如上所证，这样选取 h_j 是可能的. 由算子 $F(H)P_n$ 的连续性我们有

$$F(H)P_nh^*=s\text{-}\lim_{j\to\infty}F(H)P_nh_j.$$

因而由 $s\text{-}\lim_{j\to\infty}P_nh_j=P_nh^*$ 及(16′)，我们知闭算子 T 满足(16).

第四步 设 $y\in D(F(H))$，并令 $y_n=P_ny$. 由于 $F(\lambda)$ 为处处有限，故必有 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}P_n=I$. 因此 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}y_n=s\text{-}\lim_{n\to\infty}P_ny=y$. 因而由(16)我们得 $T\supseteq F(H)$. 因为 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}F(H)P_ny=s\text{-}\lim_{n\to\infty}F_n(H)y=F(H)y$，只要 $y\in D(F(H))$.

设 $y\in D(T)$，并令 $y_n=P_ny$. 于是

$$Ty_n=TP_ny=F(H)P_ny \quad (\text{由}(16)),$$
$$TP_ny=P_nTy \quad (\text{由 } P_n=e_n(H)\in(H)').$$

根据下面给出的运算微积，H 的函数 $F(H)$ 是闭算子. 因而在上面的关系式中令 $n\to\infty$，即知 $F(H)\supseteq T$. 因此我们便证明了 $T=F(H)$.

运算微积 我们有

定理 3 (i) 设 $\overline{f(\lambda)}$ 为 $f(\lambda)$ 的复共轭函数. 则 $D(\bar{f}(H))=D(f(H))$，且对 x, $y\in D(f(H))=D(\bar{f}(H))$ 我们有

$$(f(H)x, y)=(x, \bar{f}(H)y). \tag{17}$$

(ii) 若 $x\in D(f(H))$，$y\in D(g(H))$，则

$$(f(H)x,\ g(H)y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\bar{g}(\lambda)d(E(\lambda)x, y). \tag{18}$$

(iii) 若 $x\in D(f(H))$，则 $(\alpha f)(H)x=\alpha f(H)x$. 若 $x\in D(f(H))\cap D(g(H))$，则

$$(f+g)(H)x=f(H)x+g(H)x. \tag{19}$$

(iv) 若 $x\in D(f(H))$，则条件 $f(H)x\in D(g(H))$ 是与条件 $x\in D(f\cdot g(H))$ 等价的，其中 $f\cdot g(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)$，同时我们有

$$g(H)f(H)x=(g\cdot f)(H)x. \tag{20}$$

(v) 若 $f(\lambda)$ 是处处有限的，则 $f(H)$ 是正规算子且

$$f(H)^*=\bar{f}(H). \tag{21}$$

特别，当 $f(\lambda)$ 为实值且处处有限时，$f(H)$ 为自伴.

证明 (i) $D(f(H))=D(\bar{f}(H))$ 是显然的，又

$$(f(H)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(x,E(\lambda)y)$$
$$=\overline{(\bar{f}(H)y,x)}=(x,\bar{f}(H)y).$$

(ii) 由定理 1 我们知 $E(\lambda)$ 与 $g(H)$ 是可交换的. 因此

$$(f(H)x,\ g(H)y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,g(H)y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(x,E(\lambda)g(H)y)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\overline{(g(H)E(\lambda)y,x)}=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(\mu)}\,\overline{d(E(\mu)E(\lambda)y,x)}\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\left(\int_{-\infty}^{\lambda}\overline{g(\mu)}\,\overline{d(y,E(\mu)x)}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\overline{g(\lambda)}d(E(\lambda)x,y).$$

(iii) 是显然的. (iv) 设 x 满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2<\infty$. 于是由 $E(\lambda)E(\mu)=E(\min(\lambda,\mu))$，根据 $E(\lambda)$ 与 $f(H)$ 的可交换性，条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)|^2d\|E(\lambda)f(H)x\|^2<\infty$ 便导致

$$\infty>\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)|^2d\|E(\lambda)f(H)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)|^2d\|f(H)E(\lambda)x\|^2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)|^2d\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(\mu)|^2d\|E(\mu)E(\lambda)x\|^2\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)|^2d\left(\int_{-\infty}^{\lambda}|f(\mu)|^2d\|E(\mu)x\|^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)x\|^2.$$

由于上面的运算可以逐步倒回去，故我们知在假设 $x\in D(f(H))$ 下，$f(H)x\in D(g(H))$ 和 $x\in D(f\cdot g(H))$ 这二个条件是等价的. 且成立

$$(g(H)f(H)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)d(E(\lambda)f(H)x,y)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)d\left(\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)d(E(\mu)x,y)\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)f(\lambda)d(E(\lambda)x,y)=((g\cdot f)(H)x,y).$$

(v) 我们令 $h(\lambda)=|f(\lambda)|+\alpha$，$k(\lambda)=h(\lambda)^{-1}$，$g(\lambda)=f(\lambda)h(\lambda)^{-1}$，其中 α 为任一正整数. 于是 $k(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 均是有界函数. 因而 $D(k(H))=D(g(H))=X$. 因此由 (iv)

$$f(H)=h(H)g(H)=g(H)h(H). \tag{22}$$

由 (i) 及 $D(k(H))=X$，我们有 $k(H)^*=k(H)$，亦即 $k(H)$ 是自伴的. 由(iv) 我们有 $x=h(H)k(H)x$(对一切 $x\in X$)及 $x=k(H)h(H)x$(对一切 $x\in D(h(H))$). 因而 $h(H)=k(H)^{-1}$. 因此根据第七章 § 3 中的定理 1, $h(H)$是自伴的. 所以 $D(f(H))=D(h(H))$在 X 中稠密，故我们可以定义 $f(H)^*$. 我们来证明 $f(H)^*=\bar{f}(H)$. 设一对 $\in X$ 的元素$\{y, y^*\}$使得对一切 $x\in D(f(H))$均有$(f(H)x, y)=(x, y^*)$. 于是由 $g(H)^*=\bar{g}(H)$(它由(i)和(22)得到保证), 有

$$(f(H)x, y)=(g(H)h(H)x, y)=(h(H)x, \bar{g}(H)y).$$

因而, 由 $x\in D(f(H))=D(h(H))$和 $h(H)$的自伴性, 我们得

$$\bar{g}(H)y\in D(h(H)) \text{ 且 } h(H)\bar{g}(H)y=y^*.$$

因此再由(22), 我们得 $\bar{f}(H)y=y^*$, 故 $f(H)^*=\bar{f}(H)$. 所以, 由(iv)我们知 $f(H)$是正规的, 这就是 $f(H)^*f(H)=f(H)f^*(H)$.

系 若 $f(\lambda)$是处处有限的, 则 $f(H)$是闭的.

证明 由 $f(H)^{**}=\bar{f}(H)^*=\bar{\bar{f}}(H)=f(H)$而自明.

历史注释 定理 2 首先由 J. von Neumann [7] 对有界自伴算子T的情况证明. 参看 F. Riesz[5]. 关于闭线性算子T的一般情况是由 Y. Mimura[2]证明的. 上面给出的论证取自 Y. Mimura[2]和 B. Sz. Nagy[1].

§ 13. Stone 定理和 Bochner 定理

作为一个自伴算子的函数的例子, 我们给出

定理 1 (M. H. Stone) 设$\{U_t\}$, $-\infty<t<\infty$, 为 Hilbert 空间中酉算子的(C_0)类单参数群. 则

$$U_t=f_t(H), \text{ 其中 } f_t(\lambda)=\exp(it\lambda), \text{ 且 } iH=A, H^*=H,$$
$$\text{是群 } U_t \text{ 的无穷小生成元.} \tag{1}$$

反之, 对 X 中的任一自伴算子 $H, U_t=f_t(H)$确定了一个酉算子的(C_0)类单参数群.

证明 由半群理论的表示定理我们有

$$U_tx=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\exp(tiH(I-n^{-1}iH)^{-1})x.$$

由于函数 $g(t)=\exp(ti\lambda(1-n^{-1}i\lambda)^{-1})$ 按绝对值小于 $\exp((-nt\lambda^2/(n^2+\lambda^2))$，所以对 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 我们有

$$\exp(tiH(I-n^{-1}iH)^{-1})=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{ti\lambda}{1-n^{-1}i\lambda}\right)dE(\lambda).$$

此外还有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\exp\left(\frac{ti\lambda}{1-n^{-1}i\lambda}\right)-\exp(ti\lambda)\right|^2d\|E(\lambda)x\|^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\exp\left(\frac{-t\lambda^2}{n-i\lambda}\right)-1\right|^2d\|E(\lambda)x\|^2=0.$$

这就表明$U_t=f_t(H)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(it\lambda)dE(\lambda)$.

至于定理 1 的逆部分，根据前节的运算微积，我们注意

$$f_t(H)^*=f_{-t}(H) \text{ 且 } f_t(H)f_s(H)=f_{t+s}(H),\ f_0(H)=I.$$

由

$$\|f_t(H)x-x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\exp(it\lambda)-1|^2d\|E(\lambda)x\|^2\to 0 \quad \text{当 } t\to 0,$$

我们还得到$f_t(H)$在 $t=0$ 处的强连续性．因而$U_t=f_t(H)$是酉算子的(C_0)类单参数群．

注 关于原始证明，请参看 M. H. Stone[2]．亦可参看 J. von Neumann[8]．由 E. Hopf [1]给出的另一证明是基于 S. Bochner 的一个定理:

定理 2 (Bochner) 一复值连续函数$f(t)$, $-\infty<t<\infty$, 可表成

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dv(\lambda),\ \text{其中 } v(\lambda) \text{ 为一非降右连续有界函数}, \tag{2}$$

当且仅当$f(t)$在下述意义下正定

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds\geqq 0 \quad \text{对一切具有紧支集的连续函数 } \varphi \text{ 成立}. \tag{3}$$

由 E. Hopf 给出的定理 1 的证明是从$f(t)=(U_tx,x)$满足条件 (3) 这一事实出发的，而此可由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(U_{t-s}x,x)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(U_tx,\ U_sx)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds$$
$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)U_tx,\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)U_sx\right)\geqslant 0$$

得知．我们来证明 Bochner 定理是 Stone 定理的一个推论．

从定理 1 推导定理 2 考察这样的复值函数$x(t)(-\infty<t<\infty)$的全体$\mathfrak{F}$，它们除去可能的 t 值的有限集合外恒满足$x(t)=0$; 这有限集合可随 x 而变化．除了公理: $(x,x)=0$ 导致$x=0$可能不成立外，$\mathfrak{F}$ 按

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\quad (\alpha x)(t)=\alpha x(t) \quad \text{及}$$

$$(x,y)=\sum_{<t,s<\infty}f(t-s)x(t)\overline{y(s)} \quad \text{对一切 } x,y\in\mathfrak{F} \tag{4}$$

成一 pre-Hilbert 空间．对任一$x\in\mathfrak{F}$, $(x,x)\geqslant 0$这一点是函数$f(t)$的正定性的一简单推论．

令$\mathfrak{N}=\{x\in\mathfrak{F};\ (x,x)=0\}$．于是商空间$\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$关于数积$(\bar{x},\bar{y})=(x,y)$为一 pre-Hilbert 空间，其中$\bar{x}$是包含$x\in\mathfrak{F}$的模$\mathfrak{N}$的剩余类．设$X$为 pre-Hilbert 空间$\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$的完备化．由

$$(U_\tau x)(t)=x(t+\tau),\quad x\in\mathfrak{F} \tag{5}$$

定义的算子U_τ必定满足条件

$$(U_\tau x,U_\tau y)=(x,y),\quad U_\tau U_\sigma=U_{\tau+\sigma} \text{ 且 } U_0=I. \tag{6}$$

所以易知$\{U_\tau\}$自然地确定X中这样一个酉算子$\hat{U}_\tau$，使得$\{\hat{U}_\tau\}(-\infty<\tau<\infty)$组成$X$中一个酉

算子的 (C_0) 类单参数半群；$\hat{U}_t$ 关于 t 的强连续性由函数 $f(t)$ 的连续性而得.

因而由 Stone 定理，$\hat{U}_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dE(\lambda)$. 设 $x_0(t)\in\mathfrak{F}$ 为由 $x_0(\tau)=1$ 且只要 $t\neq\tau$ 便有 $x_0(t)=0$ 所定义的函数. 则由(4)和(5)有 $f(\tau)=(\hat{U}_\tau x_0, x_0)$. 所以

$$f(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\lambda}d\|E(\lambda)\bar{x}_0\|^2,$$

这就证明了 Bochner 定理.

注　象(4)中那样利用正定函数定义 pre-Hilbert 空间的思想由 B. Sz. Nagy[3] 系统地使用于涉及 Hilbert 空间的各种有趣问题.

§14. 具有简单谱的自伴算子的标准型

设 $H=\int\lambda dE(\lambda)$ 为 Hilbert 空间 X 中的一自伴算子，它具有如第十一章 §8 中所定义的简单谱. 因此存在一元 $y\in X$ 使得集合 $\{(E(\beta)-E(\alpha))y;\ \alpha<\beta\}$ 张成 X 的一稠密线性子空间. 我们命

$$\sigma(\lambda)=(E(\lambda)y, y). \tag{1}$$

于是 $\sigma(\lambda)$ 是单调非降，右连续且有界的. 我们以 $\sigma(B)$ 记 R^1 上的 Baire 集合上的由 $\sigma((a, b])=\sigma(b)-\sigma(a)$ 确定的 Baire 测度. 我们以 $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ 表示适合 $\|f\|_\sigma=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2\sigma(d\lambda)\right)^{1/2}<\infty$ 的复值 Baire 可测函数 $f(\lambda)\ (-\infty<\lambda<\infty)$ 的全体. 于是 $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ 按数积 $(f, g)_\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\sigma(d\lambda)$ 为一 Hilbert 空间，其中约定在 L^2_σ 中 $f=g$ 当且仅当 $f(\lambda)=g(\lambda)\ \sigma$-a. e.

定理　我们对任一 $f(\lambda)\in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ 配置一个由

$$\hat{f}=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda)y \tag{2}$$

定义的 X 中的矢量 $\hat{f}$ 与之对应. 则对应 $f(\lambda)\to\hat{f}$ 是 $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ 到 X 上的一一线性等距映射. 设这个映射记为 V，亦即 $\hat{f}=Vf$. 则在 $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ 中的算子 $H_1=V^{-1}HV$ 恰好是乘以 λ 的(乘法)算子:

$$\begin{aligned}&D(H_1)=D(V^{-1}HV)=\{f(\lambda); f(\lambda)\text{ 和 }\lambda f(\lambda)\text{ 均}\in L^2_\sigma(-\infty, \infty)\}\\&\text{且 }(H_1f)(\lambda)=\lambda f(\lambda)\text{ 只要 }f(\lambda)\in D(H_1).\end{aligned} \tag{3}$$

证明　由 $E(\lambda)E(\mu)=E(\min(\lambda, \mu))$ 我们有

$$\begin{aligned}(E(\lambda)y, \hat{f})&=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(\mu)}d_\mu(E(\lambda)y, E(\mu)y)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(\mu)}d_\mu(E(\mu)E(\lambda)y, y)\\&=\int_{-\infty}^{\lambda}\overline{f(\mu)}d(E(\mu)y, y)=\int_{-\infty}^{\lambda}\overline{f(\mu)}\sigma(d\mu),\end{aligned}$$

故

$$(\hat{f}, \hat{g})=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)y, \hat{g})=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\sigma(d\lambda)=(f, g)_\sigma. \tag{4}$$

所以V一一地，线性且等距地映$D(V)=L^2_\sigma(-\infty,\infty)$到$\{\hat{f};\ \hat{f}=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE(\lambda)y, f\in L^2_\sigma(-\infty,\infty)\}$上．但是$R(V)$当然包含形如$\int_\alpha^\beta dE(\lambda)y=(E(\beta)-E(\alpha))y(-\infty<\alpha<\beta<\infty)$的元素，故根据$H$的谱为简单谱的假定，即知$R(V)=R(V)^a=X$．因此定理的前半部分得证．

其次我们有

$$E(\lambda)\hat{f}=E(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}f(\mu)dE(\mu)y=\int_{-\infty}^{\infty}f(\mu)d_\mu(E(\lambda)E(\mu)y)$$
$$=\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)dE(\mu)y,$$

故由(4)有

$$(E(\lambda)\hat{f},\hat{g})=\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)\overline{g(\mu)}\sigma(d\mu). \tag{5}$$

因而条件$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(E(\lambda)\hat{f},\hat{f})<\infty$（等价于$\hat{f}\in D(H)$）等价于条件$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2|f(\lambda)|^2\sigma(d\lambda)<\infty$．此外，在后一情况，由第十一章§12之(20)我们有

$$HVf=H\hat{f}=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)\hat{f},$$

因而由(4)和(5)得

$$(H_1f,g)_\sigma=(V^{-1}HVf,g)_\sigma=(HV\cdot f,V\cdot g)=(H\cdot\hat{f},\hat{g})$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)\hat{f},\ \hat{g})=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\sigma(d\lambda).$$

另一方面，我们有

$$(H_1f,g)_\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}(H_1f)(\lambda)\overline{g(\lambda)}\sigma(d\lambda).$$

所以我们必有

$$(H_1f)(\lambda)=\lambda f(\lambda)\quad \sigma\text{-几乎处处}.$$

注 具有简单谱的自伴算子与Jacobi矩阵间有一紧密联系．请参看M. H. Stone [1], p. 275．关于具有不必是简单谱的自伴算子的标准型，请参看J. von Neumann的约化理论：Neumann[9]．

§15. 对称算子的亏指数．广义单位分解

定义1 设$U=U_H=(H-iI)(H+iI)^{-1}$为Hilbert空间X中闭对称算子H的Cayley变换．设$X^+_H=D(U_H)^\perp$, $X^-_H=R(U_H)^\perp$，又设$m=\dim(X^+_H)$, $n=\dim(X^-_H)$分别为X^+_H、X^-_H的维数．此时H称为具亏指数(m,n)的算子．H是自伴的，当且仅当它是具亏指数$(0,0)$的（见第七章§4）．

命题1 闭对称算子H的亏指数(m,n)可定义如下：m是线性子空间$\{x\in X;\ H^*x=ix\}$的维数；n是线性子空间$\{x\in X; H^*x=-ix\}$的维数．

证明 由第七章§4中定理3而自明．

例 1 设 $X=L^2(0,1)$. 设 D 为这样的绝对连续函数 $x(t)\in L^2(0,1)$ 的全体，它适合 $x(0)=x(1)=0$ 且 $x'(t)\in L^2(0,1)$. 则在 $D=D(T_1)$ 上由 $T_1x(t)=i^{-1}x'(t)$ 定义的算子 T_1 是具亏指数(1,1)的.

证明 如第七章§3 的例 4 中所显示，$T_1^*=T_2$ 由下面给定:

$T_2x(t)=i^{-1}x'(t)$ 在 $D(T_2)=\{x(t)\in L^2(0,1);x(t)$绝对连续且使得 $x'(t)\in L^2(0,1)\}$上.

因此 $T_1^*y=T_2y=iy$ 的解 $y\in L^2(0,1)$是微分方程

$$y'(t)=-y(t)\qquad (y,y'\in L^2(0,1))\tag{1}$$

的分布解. 于是$z(t)=y(t)\exp(t)$是微分方程

$$z'(t)=0\qquad (z,z'\in L^2(0,1))\tag{2}$$

的一个分布解. 我们来证明存在一常数 C 使得对 a. e. $t\in(0,1)$有 $z(t)=C$. 为此目的，我们取任一函数 $x_0(t)\in C_0^\infty(0,1)$，它适合$\int_0^1 x_0(t)\,dt=1$，命

$$x(t)-x_0(t)\int_0^1 x(t)\,dt=u(t),\qquad w(t)=\int_0^t u(s)\,ds,$$

其中 $x(t)$为 $C_0^\infty(0,1)$中的一个任意函数. 由$\int_0^1 u(s)\,ds=0$，有 $w\in C_0^\infty(0,1)$. 所以由(2)，我们有

$$-\int_0^1 z(t)w'(t)\,dt=-\int_0^1 z(t)u(t)\,dt=0,$$

亦即

$$\int_0^1 z(t)x(t)\,dt=C\int_0^1 x(t)\,dt,\text{ 其中 } C=\int_0^1 z(t)x_0(t)\,dt.$$

根据 $x(t)\in C_0^\infty(0,1)$的任意性, 这就证明对 a. e. $t\in(0,1)$有 $z(t)=C$.

因而$T^*y=iy$ 的任一解是 $y(t)=C\exp(-t)$这种形式的. 用同样的方法我们知 $T^*y=-iy$ 的任一解呈 $y(t)=C\exp(t)$的形式. 因此 T 是具亏指数(1,1)的.

定义 2 Hilbert 空间X中的对称算子H称为**极大对称的**，如果不存在H的真正的对称扩张.

命题 2 极大对称算子H是闭的且 $H=H^{**}$. 自伴算子H是极大对称的.

证明 根据第七章§3中命题 1, H^{**} 是H的闭对称扩张. 因此命题 2 的前半部分是显然的. 设 H_0 为自伴算子H的一对称扩张. 于是由 $H\subseteq H_0$, $H_0\subseteq H_0^*$, 我们得$H_0\subseteq H_0^*\subseteq H$, 故由$H=H^*$知$H\subseteq H_0\subseteq H$. 这就证明自伴算子$H$是极大对称的.

系 1 给定的对称算子H的每一极大对称扩张 H_0 也是 H^{**} 的一个扩张.

证明 关系 $H\subseteq H_0$ 导致关系 $H_0^*\subseteq H^*$ 和 $H^{**}\subseteq H_0^{**}$. 根据前一命题 $H_0=H_0^{**}$，所以系 1 为真.

系 2 若H为一对称算子, 使得 $H^*=H^{**}$, 则自伴算子 H^* 是H的唯一的极大对称扩张.

证明 由于自伴性，H^{**} 是极大对称的. 因此H的任一极大对称扩张 H_0(根据系 1 它也是 H^{**} 的对称扩张)与 $H^{**}=H^*$ 一致.

因此我们能够叙述

定义 3 使得 $H^*=H^{**}$ 的对称算子 H 称为本质自伴的. 自伴算子 H 称为超极大的. 这后一术语属于 J. von Neumann.

例 2 设 $X=L^2(-\infty,\infty)$, 并对 $x(t)\in C_0^0(-\infty,\infty)$ 通过 $Hx(t)=t\cdot x(t)$ 定义算子 H. H 当然是 X 中的对称算子. 易知 H^* 是第七章 §3 之例 2 中定义的坐标算子, 故 H 是本质自伴的. 由 $Hx(t)=i^{-1}x'(t)$(对 $x(t)\in C_0^1(-\infty,\infty)$)定义的算子 H 也是在 $X=L^2(-\infty,\infty)$ 中本质自伴的. 因为在此时, H^* 是第七章 §3 之例 3 中定义的动量算子.

定理 1 设闭对称算子 H 的亏指数 (m, n) 适合

$$m=m'+p,\quad n=n'+p\quad (p>0).$$

则存在 H 的一个闭对称扩张 H', 它具有亏指数 (m', n').

证明 设 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p,\varphi_{p+1},\cdots,\varphi_{p+m'}\}$, $\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p,\psi_{p+1},\cdots,\psi_{p+n'}\}$ 分别为 $X_H^+=D(U_H)^\perp$, $X_H^-=R(U_H)^\perp$ 的完备标准正交系. 按

$$Vx=U_Hx\quad 对\ x\in D(U_H),$$

$$V\cdot\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varphi_i=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\psi_i,$$

定义 U_H 的一个等距扩张 V. 根据第七章 §4 中定理 1, 我们有 $R(I-U_H)^a=X$. 因此由 $R(I-V)\supseteq R(I-U_H)$ 及第七章 §4 中定理 2, 存在一唯一确定的 H 的闭对称扩张 H', 使得 $V=(H'-iI)(H'+iI)^{-1}$. H' 的亏指数是 (m', n'), 这可由 $\dim(D(V)^\perp)=m'$, $\dim(R(V)^\perp)=n'$ 而知

系 具有亏指数 (m, n) 的闭对称算子 H 是极大对称的, 当且仅当 $m=0$ 或 $n=0$.

证明 "仅当"部分根据定理 1 而显然. 如果, 比如说, $m=0$, 于是由 $D(U_H)=X$, 对 H 的闭对称扩张 H_0 我们必有 $U_{H_0}=U_H$. 这证明了 $H_0=i(I+U_{H_0})(I-U_{H_0})^{-1}=i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}=H$. 在 $n=0$ 的情况下, 我们亦可知不存在 H 的真正的闭对称扩张.

例 3 设 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots\}$ 为(可分) Hilbert 空间 X 的一完全标准正交系. 于是, 按

$$U\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_{i+1},\quad \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$$

我们定义了一个闭等距算子 U, 它使得 $D(U)=X$ 且 $\dim(R(U)^\perp)=1$. 若 $R(I-U)^a\neq X$, 则存在一 $x\neq 0$ 使得 $x\in R(I-U)^-$. 由此 $((I-U)x, x)=0$, 故 $(Ux, x)=\|x\|^2=\|Ux\|^2$. 这就导致

$$\|(I-U)x\|^2=\|x\|^2-(Ux,x)-(x,Ux)+\|Ux\|^2=\|x\|^2-\|x\|^2-\|x\|^2+\|x\|^2=0,$$

亦即 $Ux=x$, 因而根据 U 的定义, x 必为零. 这个矛盾表明 $R(I-U)^a=X$. 因而根据第七章 §4 中定理 2, U 是闭对称算子 H 的 Cayley 变换. H 是具亏指数 $(0, 1)$ 的, 这是因为 $D(U)=X$ 且 $R(U)^\perp$ 由 φ_1 所张成. 因此 H 是一个不具自伴性的极大对称算子.

定理 2 (M. A. Naimark[3]) 设 Hilbert 空间 X_1 中的闭对称算子 H_1 是具亏指数 (m, n) 的. 则我们能构造一个包含 X_1 作为闭线性子空间的 Hilbert 空间 X, 以及一个在 X 中具有亏指数 $(m+n, m+n)$ 的闭对称算子 H 使得

$$H_1=P(X_1)HP(X_1),\ 其中\ P(X_1)\ 为\ X\ 到\ X_1\ 上的投影.$$

证明 考察一个与 X_1 有相同维数的 Hilbert 空间 X_2. 我们在 X_2 中构造一个具有亏指数 (n, m) 的闭对称算子 H_2. 例如, 假定 X_2 与 X_1 重合, 我们可以取 $H_2=-H_1$. 此时我们会有 $\{x\in X_2; H_2^*x=ix\}=\{x\in X_1; H_1^*x=-ix\}$, $\{x\in X_2; H_2^*x=-ix\}=\{x\in X_1; H_1^*x=ix\}$, 故 H_2 的亏指数必为 (n, m).

然后我们考察由

$$H\{x, y\}=\{H_1x, H_2y\} \quad 对\{x, y\}\in X_1\times X_2, 其中\ x\in D(H_1), y\in D(H_2)$$

定义的算子 H. 易知 H 是积 Hilbert 空间 $X=X_1\times X_2$ 中的一闭对称算子. 条件

$$H^*\{x, y\}=i\{x, y\} \quad (或条件\ H^*\{x, y\}=-i\{x, y\})$$

意味着 $H_1^*x=ix$, $H_2^*y=iy$ (或 $H_1^*x=-ix$, $H_2^*y=-iy$). 因而我们知 H 的亏指数是 $(m+n, m+n)$.

系 设(根据定理 1) $\hat{H}$ 是 H 的一个自伴扩张, 并设 $\hat{H}=\int\lambda d\hat{E}(\lambda)$ 为 $\hat{H}$ 的谱分解. 由于把 H_1 看成 X 中的一个算子时, 算子 H 和(更有) $\hat{H}$ 均是 H_1 的扩张, 所以我们有结果:

$$\begin{cases} 若\ x\in D(H_1)\subseteqq X_1=P(X_1)X, 则\ x=P(X_1)x\in D(\hat{H})\ 且 \\ H_1x=P(X_1)\hat{H}x=P(X_1)\hat{H}P(X_1)x=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dF(\lambda)x, \quad 其中 \\ F(\lambda)=P(X_1)\hat{E}(\lambda)P(X_1). \end{cases} \tag{3}$$

系 $\{F(\lambda); -\infty<\lambda<\infty\}$ 必然满足条件:

$$\begin{cases} F(\lambda)\ 是\ X_1\ 中的自伴算子, \\ \lambda_1<\lambda_2\ 导致\ (F(\lambda_1)x, x)\leqq(F(\lambda_2)x, x) \quad 对每一\ x\in X_1, \\ F(\lambda+0)=F(\lambda), \\ F(-\infty)x=s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow-\infty}F(\lambda)x=0, \\ F(\infty)x=s\text{-}\lim_{\lambda\uparrow\infty}F(\lambda)x=x \quad 对一切\ x\in X. \end{cases} \tag{4}$$

注 1 对于闭对称算子 H_1, 我们有

$$H_1x=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dF(\lambda)x \quad 对一切\ x\in D(H_1),$$

其中 $\{F(\lambda); -\infty<\lambda<\infty\}$ 适合(4). 在这种意义下, H_1 具有广义谱分解.

例 4 设 $X_1=L^2(-\infty, 0)$, 又 D_1 为满足 $x(0)=0$ 且 $x'(t)\in L^2(-\infty, 0)$ 的绝对连续函数 $x(t)\in L^2(-\infty, 0)$ 的全体. 则按 $H_1x(t)=i^{-1}x'(t)$ 在 $D_1=D(H_1)$ 上定义的算子 H_1 是具有亏指数 $(0, 1)$ 的极大对称算子. 我们可如上面例 1 中显示的那样知道这一事实. 设 $X_2=L^2(0, \infty)$, 又 D_2 为满足 $x(0)=0$ 且 $x'(t)\in L^2(0, \infty)$ 的绝对连续函数 $x(t)\in L^2(0, \infty)$ 的全体. 则由 $H_2x(t)=i^{-1}x'(t)$ 在 $D_2=D(H_2)$ 上定义的算子 H_2 是具有亏指数 $(1, 0)$ 的极大对称算子. 此时, $X=X_1\times X_2=L^2(-\infty, \infty)$, 且定理 2 中的算子 H 可具体地由 $Hx(t)=i^{-1}x'(t)$ 给出, 其中 $x(t)\in L^2(-\infty, \infty)$ 且 $x(0)=0, x'(t)\in L^2(-\infty, \infty)$.

注 2 由于 $\hat{H}=\int\lambda d\hat{E}(\lambda)$ 是 H_1 的一个扩张, 所以对 $x\in D(H_1)$ 我们有

$$\|H_1x\|^2=\|\hat{H}x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|\hat{E}(\lambda)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(\hat{E}(\lambda)x,x)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(\hat{E}(\lambda)P(X_1)x,P(X_1)x)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(F(\lambda)x,x).$$

然而条件$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(F(\lambda)x,x)<\infty$并不一定导致$x\in D(H_1)$. 关于这一点我们有

定理 3 在极大对称算子H_1的情况下，对于X_1中的相应的广义谱分解$\int\lambda dF(\lambda)$我们有

$$x\in D(H_1)\text{等价于条件}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(F(\lambda)x,x)<\infty. \tag{5}$$

证明 注 2 中的论证表明$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(F(\lambda)x,x)<\infty$导致$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|\hat{E}(\lambda)x\|^2<\infty$, 亦即$x\in D(\hat{H})$. 算子

$$H'=P(X_1)\hat{H}P(X_1)$$

在看作X_1中算子时是H_1的一对称扩张且$D(H')=D(\hat{H})\cap X_1$. 因此根据H_1的极大性，我们必有$H_1=H'$. 因此$D(H_1)=D(H')=D(\hat{H})\cap X_1$, 故根据$H'=P(X_1)\hat{H}P(X_1)$, 当$x\in X_1$时条件$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|\hat{E}(\lambda)x\|^2<\infty$导致$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(F(\lambda)x,x)<\infty$; 反之，条件$x\in D(H_1)$导致$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(F(\lambda)x,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|\hat{E}(\lambda)x\|^2<\infty$.

注 3 由于根据定理 1，任一闭对称算子能扩张成一极大对称算子H_1，所以我们能使用我们的定理 3 以使 (5) 成立. 关于广义谱分解的详情请参看 N. I. Achieser-I. M. Glasman[1]或 B. Sz. Nagy[3]. Hilbert 空间中自伴算子的谱表示通过适当的修改能推广到 Banach 空间中的某类线性算子上. 这个结果是属于 N. Dunford 的，它可看作无限维空间中的"初等因子理论". 可参看 N. Dunford-J. Schwartz[6].

§16. 群环 L^1 及 Wiener 的陶贝尔定理

Gelfand 表示在泛函分析中具有另外一个重要应用，即 Wiener 的陶贝尔定理的按算子论形式的处理.

线性空间$L^1(-\infty,\infty)$关于函数和及如下定义的积×

$$(f\times g)(t)=(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)g(s)\,ds \tag{1}$$

成一环. 因为根据 Fubini-Tonelli 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)g(s)\,ds\right|dt\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f(t-s)|\,dt\int_{-\infty}^{\infty}|g(s)|\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt.$$

因此我们证明了

$$\|f\times g\|\leq\|f\|\cdot\|g\|,\ \text{其中}\|\ \|\text{为}L^1(-\infty,\infty)\text{中的范数}. \tag{2}$$

所以我们已证明

命题 1 我们能在形式地由

$$\tilde{z}=\lambda e+x,\quad x\in L^1(-\infty,\infty) \tag{3}$$

给定的所有元 $\tilde{z}$ 组成的环 L^1 中形式地引入一乘法单位元 e. 事实上按下列法则 L^1 是一赋范环:

$$\begin{cases}(\lambda_1 e_1+x_1)+(\lambda_2 e+x_2) &=(\lambda_1+\lambda_2)e+(x_1+x_2),\\ \alpha(\lambda e+x) &=\alpha\lambda e+\alpha x,\\ (\lambda_1 e+x_1)\times(\lambda_2 e+x_2) &=\lambda_1\lambda_2 e+\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_1+x_1\times x_2,\end{cases} \tag{4}$$

$$\|\lambda e+x\|=|\lambda|+\|x\|.$$

这个赋范环 L^1 称为实数加法群 R^1 的群环. 我们将找出这个环 L^1 的所有极大理想. 一个极大理想就是 $I_0=L^1(-\infty,\ \infty)$, L^1就是从它加上单位元 e 而得到的. 我们来找出所有极大理想 $I\neq I_0$.

对于赋范环 L^1 的任一极大理想, 我们将以 $(\tilde{z}, I)$ 表示在环同态映射 $L^1\to L^1/I$ 下对应于元 $\tilde{z}$ 的复数. 因此对 $\tilde{z}=\lambda e+x, x\in I_0$ 有 $(\tilde{z},\ I_0)=\lambda$.

设 I 为 L^1 的不同于 I_0 的一极大理想. 于是存在一函数 $x\in L^1(-\infty,\infty)=I_0$ 使得 $(x, I)\neq 0$. 我们令

$$\chi(\alpha)=(x_\alpha, I)/(x, I),\quad 其中\ x_\alpha(t)=x(t+\alpha). \tag{5}$$

则 $\chi(0)=1$, 且根据 $|(x_\alpha, I)|\leqq\|x_\alpha\|=\|x\|$, 我们知 $|\chi(\alpha)|\leqq\|x\|/|(x,\ I)|$. 因此函数 $\chi(\alpha)$ 对 α 是有界的. 此外, 由

$$|\chi(\alpha+\delta)-\chi(\alpha)|\leqq\|x_{\alpha+\delta}-x_\alpha\|/|(x, I)|,$$

知函数 $\chi(\alpha)$ 对 α 是连续的. 因为根据第十章 §1 之(2), 我们有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|x(\alpha+\delta+t)-x(\alpha+t)|\,dt=0.$$

另一方面, 根据 $(x_{\alpha+\beta}\times x)(t)=(x_\alpha\times x_\beta)(t)$ 我们有

$$(\chi_{\alpha+\beta}, I)=(\chi_\alpha, I)(\chi_\beta, I),$$

故

$$\chi(\alpha+\beta)=\chi(\alpha)\chi(\beta). \tag{6}$$

由此我们能够证明存在一唯一确定的实数 $\xi=\xi(I)$ 使得

$$\chi(\alpha)=\exp(i\cdot\xi(I)\cdot\alpha). \tag{7}$$

事实上, 根据 $\chi(n\alpha)=\chi(\alpha)^n$ 及函数 χ 的有界性, 我们得 $|\chi(\alpha)|\leqq 1$. 因而根据 $\chi(\alpha)\chi(-\alpha)=\chi(0)=1$ 我们必有 $|\chi(\alpha)|=1$. 因此作为(6)的连续解且其绝对值为 1 的这个函数 $\chi(\alpha)$ 必由(7)这种形式给出. 至于数值 $\xi(I)$ 仅由 I 确定而与 $x\in L^1(-\infty,\ \infty)$ 的选取无关这一点可从 $\chi(\alpha)(y, I)=(y_\alpha, I)$ 而知, 末一式系由 $x_\alpha\times y=x\times y_\alpha$ 导出.

(6) 的每一绝对值恒为 1 的连续解称为实数加法群 R^1 的一个**连续酉特征**.

因此我们已作出了群 R^1 关于给定的极大理想 $I\neq I_0$ 的(连续酉)特征 $\chi(\alpha)$.

其次我们指明如何重新构造关于这个特征的理想. 或者等价地, 如何由 χ 重新构造数值

(z, I).

对任一 $y \in L^1(-\infty, \infty)$，我们有

$$(x \times y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} x_{-s}(t)y(s)\,ds.$$

因而根据(5)及环同态 $L^1 \to L^1/I$ 的连续性，我们得

$$(x \times y, I) = (x, I)(y, I) = (x, I)\int_{-\infty}^{\infty} \chi(-s)y(s)\,ds.$$

因此，由 $(x, I) \neq 0$ 我们得

$$(y, I) = \int_{-\infty}^{\infty} y(s)\exp(-i \cdot \xi(I) \cdot s)\,ds. \tag{8}$$

所以对任一 $\tilde{z} = \lambda e + x$，其中 $x \in L^1(-\infty, \infty)$，有

$$(\tilde{z}, I) = (\lambda e, I) + (x, I) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\exp(-i \cdot \xi(I) \cdot s)\,ds. \tag{9}$$

反之，任一群 R^1 的(连续、酉)特征 $\chi(\alpha) = \exp(i \cdot \xi \cdot \alpha)$ 定义一个 L^1 到复数环上的同态：

$$\tilde{z} \to \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\exp(-i \cdot \xi \cdot s)\,ds \ (\tilde{z} = \lambda e + x, x \in L^1(-\infty, \infty)) \tag{10}$$

因为由 Fubini-Tonelli 定理，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 \times x_2)(t)\exp(-i \cdot \xi \cdot t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\exp(-i \cdot \xi \cdot t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\exp(-i \cdot \xi \cdot t)\,dt.$$

我们因此已证明了

定理 1(Gelfand[4]和 Raikov[1]) 在群 R^1 的群环 L^1 的所有极大理想 $I \neq L^1(-\infty, \infty)$ 的集合与这个群 R^1 的所有连续、酉特征 $\chi(\alpha)$ 的集合之间，存在一个一一对应. 这个对应由公式(9)确定.

我们来证明赋范环 L^1 是半单的，或者等价地，下面的定理为真.

定理 2 赋范环 L^1 无非零的广义幂零元.

证明 设 $x \in L^1(-\infty, \infty)$，$y \in L^2(-\infty, \infty)$. 于是由 Schwarz 不等式有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)\,ds\right| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)|\,ds \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)|\,|y(s)|^2\,ds\right)^{1/2},$$

故根据 Fubini-Tonelli 定理知左端属于 $L^2(-\infty, \infty)$ 且

$$\|x \times y\|_2 \leq \|x\|\|y\|_2, \text{其中} \|\ \|_2 \text{ 为 } L^2(-\infty, \infty) \text{中的范数.} \tag{11}$$

因而我们能由

$$(T_x y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)\,ds \quad \text{只要 } x \in L^1(-\infty, \infty), \tag{12}$$

定义一个映 $L^2(-\infty, \infty)$ 入 $L^2(-\infty, \infty)$ 内的有界线性算子 T_x，此外我们还有

$$\|T_x\|_2 \leq \|x\|, \tag{13}$$

$$T_x^* = T_{x^*}, \text{其中 } x^*(t) = \overline{x(-t)}. \tag{14}$$

因此再次应用 Fubini-Tonelli 定理，我们得

$$T_x T_x^* = T_{x \times x^*} = T_{x^* \times x} = T_x^* T_x, \text{亦即 } T_x \text{ 是正规算子.} \tag{15}$$

因而，由第十一章§3，我们有$\|T_x\|_2=\lim_{n\to\infty}(\|T_x^n\|_2)^{1/n}$. 所以由

$$\|\underbrace{x\times x\times x\times\cdots\times x}_{n\text{ 重}}\|\geqq\|T_x^n\|_2,$$

我们知，若x为广义幂零元则$\|T_x\|_2=0$. 由这个事实，我们容易证明x必是$L^1(-\infty,\infty)$的零矢量.

今设$\tilde{z}=\lambda e+x(x\in L^1(-\infty,\infty))$为赋范环$L^1$的一广义幂零元. 于是对$L^1$的任一极大理想$I$，我们必有$(\tilde{z},I)=\lambda+(x,I)=0$. 因而Fourier变换

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp(-i\cdot\xi\cdot t)dt$$

必恒等于$-(2\pi)^{1/2}\lambda$. 由此我们证明λ必为0. 因为，我们有(Riemann-Lebesgue定理)

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp(-i\cdot\xi\cdot t)dt\right|=\left|2^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)-x\left(t+\frac{\pi}{\xi}\right)\right]\exp(-i\cdot\xi\cdot t)dt\right|$$

$$\leqq 2^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)-x\left(t+\frac{\pi}{\xi}\right)\right|dt\to 0\quad\text{当 }\xi\to\infty.$$

因此一个广义幂零元$\tilde{z}\in L^1$必有$\tilde{z}=x$的形式，其中$x\in L^1(-\infty,\infty)$，故根据我们在上面已证明的结果，必有$\tilde{z}=x=0$.

现在我们能够叙述并证明N. Wiener[2]的陶贝尔定理：

定理3 设$x(t)\in L^1(-\infty,\infty)$是这样一个函数，它的Fourier变换

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp(-i\cdot\xi\cdot t)dt$$

对任意实数ξ均不为零. 则对任一$y(t)\in L^1(-\infty,\infty)$及$\varepsilon>0$，我们能找到一些实数$\beta$，一些复数$\alpha$，以及一个正整数$N$使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|y(t)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x(t-\beta_j)\right|dt<\varepsilon.\tag{16}$$

证明 只须找到使

$$\|y-x\times\tilde{z}\|\leqq\varepsilon/2\tag{17}$$

成立的$\tilde{z}\in L^1$就行了.

我们首先证明

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)-y^{(\alpha)}(t)|dt=0,\text{ 其中}$$

$$y^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y(t-s)\frac{1-\cos\alpha s}{\alpha s^2}ds.\tag{18}$$

因为由$\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos\alpha s)(\alpha s^2)^{-1}ds=\pi\quad(\alpha>0)$，左端为

$$\leqq(\pi)^{-1}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos s)}{s^2}ds\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|y(t)-y\left(t-\frac{s}{\alpha}\right)\right|dt\right\}=0.$$

其次我们有

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1-\cos\alpha u}{\alpha u^2}e^{-iut}du=\begin{cases}1-|\xi|/\alpha & (|\xi|<\alpha),\\ 0 & (|\xi|\geqq\alpha).\end{cases} \tag{19}$$

因为我们有

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1-|\xi|/\alpha)e^{i\xi u}d\xi=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{\xi}{\alpha}\right)\cos u\xi\cdot d\xi$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{u}\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{\xi}{\alpha}\right)d(\sin u\xi)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\alpha}\frac{\sin u\xi}{u\alpha}d\xi=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1-\cos u\alpha}{u^2\alpha},$$

故我们只须应用第六章 § 2 中的 Plancherel 定理. 因而根据 Fourier 变换的 Parseval 关系, 知

$$y^{(\alpha)}(t)\text{适合}\int_{-\infty}^{\infty}y^{(\alpha)}(t)\exp(-i\cdot\xi\cdot t)dt=0\ \text{当}\ |\xi|\geqq\alpha. \tag{20}$$

所以, 我们可以假定(17)中的 y 适合条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\exp(-i\cdot\xi\cdot t)dt=0\quad\text{只要}\ |\xi|\geqq\alpha. \tag{21}$$

其次我们选取正数 β 和一充分大的正数 γ 使得 $[-\beta-\gamma,\ -\beta+\gamma]$ 和 $[\beta-\gamma,\ \beta+\gamma]$ 均包含 $[-\alpha,\alpha]$. 设 $C_1(\xi)$ 和 $C_2(\xi)$ 分别为区间 $[-\gamma,\gamma]$ 和 $[-\beta,\beta]$ 的特征函数. 于是

$$\begin{cases}u(\xi)=(2\beta)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}C_1(\xi-\eta)C_2(\eta)d\eta=1 & \text{当}\ \xi\in[-\alpha,\alpha],\\ \qquad =0 & \text{当}\ |\xi|\ \text{充分大},\\ 0\leqq u(\xi)\leqq 1 & \text{对一切实数}\ \xi.\end{cases} \tag{22}$$

根据 Fourier 变换的 Parseval 关系, 我们有

$$\hat{u}(t)=\frac{1}{2\beta}(2\pi)^{1/2}\hat{C}_1(t)\hat{C}_2(t).$$

因此由 Plancherel 定理, 我们知 $\hat{u}(t)$ 属于 $L^1(-\infty,\infty)\cap L^2(-\infty,\infty)$. 因而我们可以使用定理 1, 使得

$$f(t)=\hat{u}(t)=(2\pi)^{-1/2}(u,I_t)\ \text{其中}\ I_t\neq I_0\ \text{为某一极大理想}. \tag{23}$$

此外, 由 Plancherel 定理, $f(t)$ 的逆 Fourier 变换等于 $u(\xi)$, 亦即我们有

$$u(\xi)=(2\pi)^{-1/2}(f,I_{-\xi}). \tag{24}$$

我们其次令 $\tilde{g}=e-(2\pi)^{-1/2}f$. 于是根据上面证明的, 有

$$0\leqq(\tilde{g},I_\xi)\leqq 1;\ (\tilde{g},I_\xi)=0\quad\text{只要}\ \xi\in[-\alpha,\alpha];$$

$$(\tilde{g},I_\xi)=1\quad\text{对充分大的}\ |\xi|. \tag{25}$$

另一方面, 因 $x^*(t)=\overline{x(-t)}$ 我们有关系 $\overline{(x,I_\xi)}=(x^*,I_\xi)$. 因此, 由假设对所有实数 ξ 我们有 $(x^*\times x,I_\xi)=|(x,I_\xi)|^2>0$. 因而元

$$\tilde{g}+x^*\times x\in L^1$$

满足条件: 对 L^1 的所有极大理想 I 恒有 $(\tilde{g}+x^*\times x,\ I)>0$. 由此, 在 L^1 中逆 $(\tilde{g}+x^*\times x)^{-1}$ 确实存在.

我们定义

$$z=(\tilde{g}+x\times x^*)^{-1}\times x^*\times y. \tag{26}$$

于是由(4)，元 $x\times\tilde{z}$ 属于 $L^1(-\infty,\infty)$．此外对每一实数 ξ 我们有

$$(x\times\tilde{z}, I_\xi)=(x, I_\xi)(\tilde{z}, I_\xi)=(x, I_\xi)\frac{(x^*, I_\xi)(y, I_\xi)}{(\tilde{g}, I_\xi)+(x, I_\xi)(x^*, I_\xi)}.$$

因而由(25)及当 $|\xi|\geqq\alpha$ 时 $(y, I_\xi)=0$ 的假设，我们得

$$(x\times\tilde{z}, I_\xi)=(y, I_\xi) \text{对一切实数} \xi.$$

由定理 2 赋范环 L^1 是半单的．因而我们必有 $x\times\tilde{z}=y$．因此我们证明了定理 3.

系 设 $k_1(t)$ 属于 $L^1(-\infty,\infty)$，又它的 Fourier 变换对实变量处处不为零．设 $k_2(t)$ 属于 $L^1(-\infty,\infty)$．设 $f(t)$ 为 Baire 可测且在 $(-\infty,\infty)$ 上是有界的．设对一常数 C 有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k_1(t-s)f(s)\,ds=C\int_{-\infty}^{\infty}k_1(t)dt. \tag{27}$$

则

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k_2(t-s)f(s)\,ds=C\cdot\int_{-\infty}^{\infty}k_2(t)dt. \tag{28}$$

证明 显然我们可以假设 $C=0$．又(28)对形如 $k_2(t)=(x\times k_1)(t)$ 的 $k_2(t)$ 成立，其中 $x(t)\in L^1(-\infty,\infty)$．易知若在 $L^1(-\infty,\infty)$ 中有 $k_2(t)=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}k^{(n)}(t)$，而对 $k^{(n)}(t)\in L^1(-\infty,\infty)$ (28)成立，则(28)对 $k_2(t)$ 成立．因而由定理 3，我们知(28)对每一 $k_2(t)\in L^1(-\infty,\infty)$ 成立．

注 N. Wiener([1]，[2]和[3])利用上面的系给出了级数和积分中的极限关系的经典结果以统一处理，其中包括素数定理的一个新证明．亦可参看 H. R. Pitt[1]．定理 3 的如上的证明取自 M. Fukamiya[1]和 I. E. Segal[1]．亦可参看 M. A. Naimark[1]和 C. E. Rickart[1]以及这些书中所引的参考书．为了理解上面的系的范围，我们将复述关于特殊陶贝尔定理的 Wiener 的推导．这个特殊陶贝尔定理，按照 J. E. Littlewood 所叙述的，说的是：

定理 4 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛于 $s(x)$，又设

$$\lim_{x\to1-0}s(x)=C. \tag{29}$$

此外设

$$\sup_{n\geq1}n|a_n|=K<\infty. \tag{30}$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=C. \tag{31}$$

证明 置 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{[x]}a_n$．于是由

$$|f(x)-s(e^{-1/x})|=\left|\sum_{n=1}^{[x]}a_n(1-e^{-n/x})-\sum_{[x]+1}^{\infty}a_ne^{-n/x}\right|$$

$$\leq\sum_{n=1}^{[x]}\frac{K}{n}\frac{n}{x}+\sum_{[x]+1}^{\infty}\frac{K}{n}e^{-n/x}\leqq2K+K\int_{[x]}^{\infty}e^{-u/x}u^{-1}du$$

$$\leqq 2K+K\int_1^\infty e^{-u}u^{-1}du=\text{常数},$$

知 $f(x)$ 是有界的.

因而根据分部积分

$$s(e^{-x})=\sum_{n=0}^\infty a_n e^{-nx}=\int_{-0}^\infty e^{-ux}df(u)=\int_0^\infty xe^{-ux}f(u)du.$$

因此我们有

$$C=\lim_{x\to 0}\int_0^\infty xe^{-ux}f(u)du=\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^\infty e^{-\xi}e^{-e^{\eta-\xi}}f(e^\eta)e^\eta d\eta. \tag{31'}$$

此式可写成

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^\infty k_1(t-s)f(e^s)\,ds=C\int_{-\infty}^\infty k_1(t)dt,\text{其中 } k_1(t)=e^{-t}e^{-e^{-t}} \tag{32}$$

这是因为

$$\int_{-\infty}^\infty k_1(t)dt=\int_{-\infty}^\infty e^{-t}e^{-e^{-t}}dt=\int_0^\infty e^{-x}dx=1.$$

此外我们还有

$$\int_{-\infty}^\infty k_1(t)e^{-iut}dt=\int_0^\infty x^{iu}e^{-x}dx=\Gamma(1+iu)\neq 0.$$

因此我们能够对

$$k_2(t)=0(t<0);\quad k_2(t)=e^{-t}(t>0)$$

使用系得到

$$C=C\int_0^\infty e^{-t}dt=C\int_{-\infty}^\infty k_2(t)dt=\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^\infty k_2(t-s)f(e^s)\,ds$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{-1}\int_0^x f(y)dy.$$

若 $\lambda>0$ 即得

$$C=\frac{(1+\lambda)C-C}{\lambda}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda x}\left\{\int_0^{(1+\lambda)x}f(y)dy-\int_0^x f(y)dy\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda x}\int_x^{(1+\lambda)x}f(y)dy=\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)+\frac{1}{\lambda x}\int_x^{(1+\lambda)x}[f(y)-f(x)]dy\right\}. \tag{33}$$

另一方面,由(30)对充分大的 x 我们有:

$$\left|\frac{1}{\lambda x}\int_x^{(1+\lambda)x}[f(y)-f(x)]dy\right|\leq\frac{1}{\lambda x}\int_x^{(1+\lambda)x}\sum_{[x]+1}^{[y]}\frac{K}{n}dy\leq\sum_{[x]+1}^{[(1+\lambda)x]}\frac{K}{[x]}\leq\frac{[\lambda x]K}{[x]}\leq 2\lambda K.$$

因而由(33)

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}|f(x)-C|\leqq 2\lambda K.$$

由于 λ 是任一正数，故我们得

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=C.$$

因此我们证明了(31).

第十二章　线性空间中其他一些表示定理

在本章中，我们要证明线性空间中三个表示定理．第一个Krein-Milman定理是说局部凸线性拓扑空间中的一个非空凸紧子集K等于K的诸极端点的凸壳的闭包．其余两个定理是关于表向量格为点函数和集合函数的定理．

§1．极端点．Krein-Milman 定理

定义　设K是实或复线性空间X的一个子集．一个非空子集$M\subseteq K$叫做K的一个极端子集，如果由K的两个点k_1和k_2的某个真凸组合$\alpha k_1+(1-\alpha)k_2$, $0<\alpha<1$, 在M内必可推出k_1及k_2两者都在M内．只由一个点组成的K的极端集叫做K的极端点．

例　三维欧氏空间中，球面是球的一个极端子集，而球面上的每一点都是该面的一个极端点．

定理(Krein-Milman)　局部凸线性拓扑空间X的一个非空紧的凸子集K至少有一个极端点．

证明　集合K本身就是K的一个极端集．设$\mathfrak{M}$是K的诸紧极端子集M的全体．用包含关系作为$\mathfrak{M}$的序关系．容易看出：如果$\mathfrak{M}_1$是$\mathfrak{M}$的一个线性有序子族，那么非空集$\bigcap M$ $(M\in\mathfrak{M}_1)$是K的一个紧的极端子集，且是$\mathfrak{M}_1$的一个下界．

因此，根据Zorn引理，$\mathfrak{M}$包含一个极小元素M_0．假定M_0含有两个不同的点x_0与y_0．则在X上存在一个连续线性泛函f使得$f(x_0)\neq f(y_0)$．我们可以假设$Ref(x_0)\neq Ref(y_0)$．因M_0是紧的，所以$M_1=\{x\in M_0; Ref(x)=\inf\limits_{y\in M_0}Ref(y)\}$是$M_0$的一个真子集．另一方面，如果$k_1$及$k_2$是$K$的两个点使得对某个满足$0<\alpha<1$的$\alpha$，有$\alpha k_1+(1-\alpha)k_2\in M_1$，由$M_0$的极端集性质，有$k_1$与$k_2$均属于$M_0$．由$M_1$的定义得$k_1$和$k_2$均属于$M_1$．因此$M_1$是真含于$M_0$内的一个闭的极端子集．又因$M_0$是$\mathfrak{M}$的一个极小元素，我们便得到一个矛盾．所以$M_0$必只由一个点所组成，因而它是$K$的一个极端点．

系　设K是局部凸实线性拓扑空间X的一个非空紧凸子集．若E是K的极端点的全体．则K与包含每个凸线性组合$\sum\limits_i\alpha_ie_i(\alpha_i\geq 0, \sum\limits_i\alpha_i=1)$的最小闭集一致，其中诸$e_i\in E$．亦即$K$等于$E$的凸壳$\mathrm{Conv}(E)$的闭包．

证明　包含关系$E\subseteq K$以及K的凸性导致$\mathrm{Conv}(E)^a$含于紧集K内．假若有一点k_0含于$(K-\mathrm{Conv}(E)^a)$内．那么我们可以取一点$c\in\mathrm{Conv}(E)^a$使得$(k_0-c)\overline{\in}(\mathrm{Conv}(E)^a-c)$．因集合$(\mathrm{Conv}(E)^a-c)$是紧凸集且含有0，于是，由第四章§6定理3′，存在一个在X上连续的实线性泛函f使得

$$f(k_0-c)>1 \text{ 且当}(k-c)\in(\text{Conv}(E)^a-c)\text{时, 有} f(k-c)\leq 1.$$

令 $K_1=\{x\in K; f(x)=\sup\limits_{y\in K} f(y)\}$. 则因 $k_0\in K$, 集合 $K_1\cap E$ 必是空集. 此外, 因为 K 是紧的, 故 K_1 是 K 的一个闭的极端子集. 另一方面, K_1 的任一极端子集也是K的极端子集, 于是 K_1 的任一极端点——由以上定理这样的点一定存在——也是K的一个极端点. 因为 $K_1\cap E$ 是空的, 所以我们得到一个矛盾.

注 以上的定理和系最先由 M. Krein-D. Milman[1]证明. 上面给出的证明取自 J. L. Kelley[2]. 应当指出: Hilbert 空间X的单位球 $S=\{x\in X; \|x\|\leq 1\}$的极端点恰好是$S$表面上的点, 即范数为 1 的那些点. 这点从第一章 § 5 的(1)式容易看出. 关于极端点的概念对具体空间的应用, 可以参看 K. Hoffman[1].

一个简单的例子 若 $C[0, 1]$是定义在$[0, 1]$上的实值连续函数 $x(t)$赋予范数

$$\|x\|=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|$$

所成的空间. 对偶空间 $X=C[0, 1]'$ 是$[0, 1]$上的有界全变差实 Baire 测度所成的空间. X的单位球K在X的弱*拓扑(参看第五章附录的定理 1)下是紧的. 容易看出 K 的极端点与形如 $\langle x, f_{t_0}\rangle=x(t_0)$, $t_0\in[0, 1]$ 的线性泛函 $f_{t_0}\in X$ 是一一对应的. 以上的系说, 任一线性泛函 $f\in X$ 是由形如

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x(t_j), \text{ 其中 } \alpha_j>0, \ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1 \text{ 而 } t_j\in[0,1]$$

的诸泛函的弱*极限给出. 最近, G. Choquet[1]证明了更精确的结果: 如果X是一个度量空间, 则E是一个 G_δ-集且对每一个$x\in K$, 存在一个对X的诸 Baire 集B确定的非负 Baire 测度$\mu_x(B)$使得 $\mu_x(X-E)=0$, $\mu_x(E)=1$ 且 $x=\int_E y\mu_x(dy)$. 关于 μ_x 的唯一性和进一步的文献, 参看 G. Choquet 和 P. A. Meyer[2].

§ 2. 向 量 格

在具体函数空间中"正性"的概念在理论上和应用上都是很重要的. 线性空间中的"正性"的一个系统的抽象的叙述是由 F. Riesz[6]引进的, 而后由 H. Freudenthal[2], G. Birkhoff[1]和许多其他作者所进一步发展. 这些结果称作向量格的理论, 我们从向量格的定义开始.

定义 1 一个实向量空间X叫做一个向量格, 如果X按照部分序关系 $x\leq y$ 成为一个格, 且此部分序关系满足条件:

$$\text{由 } x\leq y \quad \text{可导致} \quad x+z\leq y+z, \tag{1}$$

$$\text{由 } x\leq y \quad \text{可导致} \quad \alpha x\leq \alpha y \ (\text{或 } \alpha x\geq \alpha y) \quad \text{对每个 } \alpha\geq 0 \ (\text{或 } \alpha\leq 0). \tag{2}$$

命题 1 如果在一个向量格X内, 我们定义

$$x^+=x\vee 0 \quad \text{及} \quad x^-=x\wedge 0, \tag{3}$$

则我们有

$$x \vee y = (x-y)^{+} + y,\ x \wedge y = -((-x) \vee (-y)). \tag{4}$$

证明 因为从 X 到 X 上的一一映射 $x \to x+z$ 和 $x \to \alpha x(\alpha>0)$ 两者都保持了 X 内的部分序关系.

例 设 $A(S, \mathfrak{B})$ 是实值 σ-可加集函数 $x(B)$ 的全体所成的集合，其中 $x(B)$ 在诸集 $B \subseteq S$ 所成的 σ-可加族 $(S, \mathfrak{B})$ 上有定义且有限. 则按照运算

$$(x+y)(B) = x(B) + y(B),\ (\alpha x)(B) = \alpha x(B)$$

以及在 $\mathfrak{B}$ 上由 $x(B) \leqq y(B)$ 所定义的部分序 $x \leq y A(S, \mathfrak{B})$ 成为一个向量格. 事实上，在这种情况下，我们有

$$x^{+}(B) = \sup_{N \subseteq B} x(N) = x \text{ 在 } B \text{ 上的正变差 } \bar{V}(x; B). \tag{5}$$

证明 我们必须证明 $\mathfrak{B}(x; B) = (x \vee 0)(B)$. 显然在 $\mathfrak{B}$ 上 $\bar{V}(x; B) \geqq 0$ 且 $x(B) \leq \bar{V}(x; B)$. 如果在 $\mathfrak{B}$ 上有 $0 \leq y(B)$ 且 $x(B) \leq y(B)$，那么对任何 $N \subseteq B$，有 $y(B) = y(N) + y(B-N) \geqq x(N)$，所以在 $\mathfrak{B}$ 上有 $y(B) \geqq \bar{V}(x; B)$.

命题 2 在向量格 X 内，我们有

$$x \overset{\vee}{\wedge} y + z = (x+z) \overset{\vee}{\wedge} (y+z), \tag{6}$$

$$\alpha(x \overset{\vee}{\wedge} y) = (\alpha x) \overset{\vee}{\wedge} (\alpha y),\ \text{当 } \alpha>0 \text{ 时}, \tag{7}$$

$$\alpha(x \overset{\vee}{\wedge} y) = (\alpha x) \overset{\wedge}{\vee} (\alpha y),\ \text{当 } \alpha<0 \text{ 时}, \tag{8}$$

$$x \wedge y = -(-x) \vee (-y),\quad x^{-} = -(-x)^{+},\ x^{+} = -(-x)^{-}. \tag{9}$$

证明 由(1)与(2)知以上结果显然成立.

系
$$x + y = x \vee y + x \wedge y,\ \text{特别地},\ x = x^{+} + x^{-} \tag{10}$$

证明 $x \vee y - x - y = 0 \vee (y-x) - y = (-y) \vee (-x) = -(y \wedge x)$.

命题 3 我们有

$$x \overset{\vee}{\wedge} y = y \overset{\vee}{\wedge} x \quad (\text{交换性}), \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = \sup(x, y, z) \quad (12) \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = \inf(x, y, z) \quad (13) \end{array}\right\} (\text{结合性}),$$

$$\left.\begin{array}{l} (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \quad (14) \\ (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad (15) \end{array}\right\} (\text{分配性})$$

证明 我们仅需证明分配性. 显然有 $(x \wedge y) \vee z \leq x \vee z,\ y \vee z$. 令 $w \leq x \vee z,\ y \vee z$. 则 $w \leq x \vee z = x + z - x \wedge z$ 从而有 $x + z \geqq w + x \wedge z$. 类似地，我们有 $y + z \geqq w + y \wedge z$. 于是

$$w + (x \wedge z) \wedge (y \wedge z) = (w + x \wedge z) \wedge (w + y \wedge z) \leqq (x+z) \wedge (y+z) = x \wedge y + z,$$

所以
$$w \leqq (x \wedge y) + z - (x \wedge y) \wedge z = (x \wedge y) \vee z.$$

于是我们证明了(14)式. 在(14)式中分别以 $-x,\ -y,\ -z$ 代替 x, y, z 便可证明(15)式.

注 1 在一个格内，分配恒等式

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{16}$$

一般不成立. 模恒等式

$$\text{由 } x \leqq z \text{ 可导致 } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \tag{17}$$

弱于分配恒等式(15). 若 G 是一个群, 那么, 如果我们定义 $N_1 \vee N_2$ 和 $N_1 \wedge N_2$ 分别是由 N_1 与 N_2 产生的不变子群以及不变子群 $N_1 \cap N_2$, 则 G 的不变子群 N 的全体构成一个模格, 即满足模恒等式(17)的一个格.

注 2 分配格的一个典型例子是 Boole 代数; 一个分配格 B 叫做一个 Boole 代数, 如果它满足条件: (i) 存在元素 I 和 0 使得对每一个 $x \in B$ 都有 $0 \leqq x \leqq I$, (ii) 对任何 $x \in B$, 存在唯一确定的补元 $x' \in B$ 满足 $x \vee x' = I$, $x \wedge x' = 0$. 一个固定集合的全体子集所成的集乃是一个 Boole 代数, B 中的部分序由集合的包含关系给出.

命题 4 在一个向量格 X 中, 我们定义绝对值

$$|x| = x \vee (-x). \tag{18}$$

则有

$$|x| > 0, \text{以及} |x| = 0 \text{ 当且仅当 } x = 0 \text{ 时成立}, \tag{19}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \ |\alpha x| \leqq |\alpha|\,|x|. \tag{20}$$

证明 我们有

$$x^+ \wedge (-x^-) = x^+ \wedge (-x)^+ = 0. \tag{21}$$

因为, 由 $0 = x - x = x \vee (-x) + x \wedge (-x) \geqq 2(x \wedge (-x))$ 及分配恒等式(14), 有 $0 = (x \wedge (-x)) \vee 0 = x^+ \wedge (-x)^+$. 所以

$$x^+ - x^- = x^+ + (-x)^+ = x^+ \vee (-x)^+.$$

另一方面, 由 $x \vee (-x) \geqq x \wedge (-x) \geqq -((-x) \vee x)$, 得 $x \vee (-x) \geqq 0$, 从而根据(21)式有

$$x \vee (-x) = (x \vee (-x)) \vee 0 = x^+ \vee (-x)^+ = x^+ + (-x)^+.$$

于是, 我们证明了

$$x^+ - x^- = x^+ + (-x)^+ = x^+ \vee (-x)^+ = x \vee (-x). \tag{22}$$

现在我们来证明(19)和(20). 如果 $x = x^+ + x^- \neq 0$, 则 x^+ 或 $(-x^-)$ 是大于 0 的, 所以 $|x| = x^+ \vee (-x^-) > 0$. $|\alpha x| = (\alpha x) \vee (-\alpha x) = |\alpha|(x \vee (-x)) = |\alpha|\,|x|$. 由 $|x| + |y| \geqq x + y, -x-y$, 可得到 $|x| + |y| \geqq (x+y) \vee (-x-y) = |x+y|$.

注 分解式 $x = x^+ + x^-$, $x^+ \wedge (-x^-) = 0$ 叫做 x 的 Jordan 分解式; x^+, x^- 和 $|x|$ 分别相应于有界变差函数 $x(t)$ 的正变差、负变差和全变差.

命题 5 对任何 $y \in X$, 有

$$|x - x_1| = |x \vee y - x_1 \vee y| + |x \wedge y - x_1 \wedge y|. \tag{23}$$

证明 我们有

$$|a-b| = (a-b)^+ - (a-b)^- = a \vee b - b - (a \wedge b - b) = a \vee b - a \wedge b.$$

于是由(10), (14)和(15), (23)式的右端

$$\begin{aligned}
&= (x \vee y) \vee x_1 - (x \vee y) \wedge (x_1 \vee y) + (x \wedge y) \vee (x_1 \wedge y) - (x \wedge y) \wedge x_1 \\
&= (x \vee x_1) \vee y - (x \wedge x_1) \vee y + (x \vee x_1) \wedge y - (x \wedge x_1) \wedge y = x \vee x_1 + y - (x \wedge x_1 + y) \\
&= x \vee x_1 - x \wedge x_1 = |x - x_1|.
\end{aligned}$$

定义 2 对向量格 X 内的一个序列 $\{x_n\}$, 如果存在一个序列 $\{w_n\}$ 使得 $|x - x_n| \leqq w_n$ 且

$w_n \downarrow 0$，这里 $w \downarrow 0$ 的意思是 $w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq \cdots$ 且 $\bigwedge_{n\geq 1} w_n = 0$，则称 $\{x_n\}$ 为 O-收敛于元素 $x \in X$，记为 $O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$（$O$-lim 也记为序-lim）。$O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ 如果存在，它必是唯一确定的。因为若 $O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 又 $O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = y$。则 $|x - x_n| \leqq w_n$，$w_n \downarrow 0$ 且 $|y - x_n| \leqq u_n$，$u_n \downarrow 0$。因此 $|x - y| \leqq |x - x_n| + |x - y_n| \leqq w_n + u_n$ 且由 $w_n + \bigwedge_{n\geq 1} u_n \geqq \bigwedge_{n\geq 1} (w_n + u_n)$ 可知 $(w_n + u_n) \downarrow 0$。这就证明了 $x = y$。

命题 6 对于 O-lim 而言，运算 $x+y$，$x \vee y$ 以及 $x \wedge y$ 关于 x 和 y 都是连续的。

证明 若 $O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$，$O\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = y$。则由 $|x + y - x_n - y_n| \leqq |x - x_n| + |y - y_n|$ 便可导致 $O\text{-}\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$。用(23)，我们有

$|x \overset{\vee}{\wedge} y - x_n \overset{\vee}{\wedge} y_n| \leqq |x \overset{\vee}{\wedge} y - x_n \overset{\vee}{\wedge} y| + |x_n \overset{\vee}{\wedge} y - x_n \overset{\vee}{\wedge} y_n| \leqq |x - x_n| + |y - y_n|$，从而有 $O\text{-}\lim(x_n \overset{\vee}{\wedge} y_n) = (O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{\vee}{\wedge} (O\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n)$。

注 我们有

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot x_n = \alpha \cdot O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n.$$

但是，一般有

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha_n x \neq (\lim_{n\to\infty} \alpha_n) x.$$

前一关系由 $|\alpha x - \alpha x_n| = |\alpha|\,|x - x_n|$ 知是显然成立的。后一不等关系可用下面的反例来证明：在二维向量空间中我们引入字典式的部分序关系，即 $(\xi_1, \eta_1) \geqq (\xi_2, \eta_2)$ 的意思是指或者 $\xi_1 > \xi_2$ 或者 $\xi_1 = \xi_2$，$\eta_1 \geqq \eta_2$。容易看出，这样我们便得到了一个向量格。在这个格内，我们有

$$n^{-1}(1, 0) \geqq (0, 1) > 0 = (0, 0) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是 $O\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1}(1, 0) \neq 0$。方程

$$O\text{-}\lim_{\alpha_n \to \alpha} \alpha_n x = \alpha x \tag{24}$$

成立的必要充分条件是所谓的阿基米德原理

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1} x = 0 \quad \text{对每个 } x \geqq 0 \text{ 成立}. \tag{25}$$

这点从 Jordan 分解 $y = y^+ + y^-$ 就可看出。

定义 3 向量格 X 的一个子集 $\{x_\alpha\}$ 称为有界的，如果存在 y 和 z 使得 $y \leqq x_\alpha \leqq z$ 对所有的 x_α 成立。X 叫做是完备的，如果对于 X 的任一有界集 $\{x_\alpha\}$，在 X 内都存在 $\sup_\alpha x_\alpha$ 及 $\inf_\alpha x_\alpha$。这里 $\sup_\alpha x_\alpha$ 是在 X 的部分序意义下的最小上界，而 $\inf_\alpha x_\alpha$ 是在 X 的部分序意义下的最大下界。一个向量格 X 叫做 σ-完备的，如果对于 X 的任何有界序列 $\{x_n\}$，$\sup_{n\geq 1} x_n$ 与 $\inf_{n\geq 1} x_n$ 在 X 内都存在。在 σ-完备向量格 X 内，我们定义

$$\begin{cases} O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf_m \left(\sup_{n\geq m} x_n\right), \\ O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup_m \left(\inf_{n\geq m} x_n\right). \end{cases} \tag{26}$$

命题 7 $O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 当且仅当 $O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = x$。

证明 假设$|x-x_n|\leq w_n$, $w_n\downarrow 0$. 那么 $x-w_n\leq x_n\leq x+w_n$, 所以我们得到 $O\text{-}\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x-w_n)=x\leq O\text{-}\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n\leq O\text{-}\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x+w_n)=x$, 即是 $O\text{-}\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 类似地, 可得 $O\text{-}\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

其次我们证明充分性. 设 $u_n=\sup\limits_{m\geq n}x_m$, $v_n=\inf\limits_{m\geq n}x_m$, $u_n-v_n=w_n$. 则根据假设有 $w_n\downarrow 0$. 同样, 根据$x_n\leq u_n=x+(u_n-x)\leq x+(u_n-V_n)=x+w_n$以及类似地得到的$x_n\geq x-w_n$, 我们证出$|x-x_n|\leq w_n$, 于是 $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

命题 8 在 σ-完备向量格 X 内, αx 对于 O-lim 关于 α, x 都是连续的.

证明 我们有$|\alpha x-\alpha_n x_n|\leq|\alpha x-\alpha x_n|+|\alpha x_n-\alpha_n x_n|=|\alpha||x-x_n|+|\alpha-\alpha_n||x_n|$. 于是, 如果 $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$, 则上式右边第一项的 O-lim 是 0. 因此, 令 $\sup\limits_{n\geq 1}|x_n|=y$, $\sup\limits_{m\geq n}|\alpha-\alpha_m|=\beta_n$后, 我们必须证明 $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n y=0$. 而由 $y\geq 0$ 以及 $\beta_n\downarrow 0$, 我们看出 $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n y=z$ 存在且 $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}2^{-1}\beta_n y=2^{-1}z$. 因为对任意的 n, 都存在一个 n_0 使得 $\beta_{n_0}\leq 2^{-1}\beta_n$, 所以必定有 $z=2^{-1}z$, 亦即 $z=0$.

命题 9 在一个 σ-完备的向量格 X 内, 当且仅当

$$O\text{-}\lim_{n,m\to\infty}|x_n-x_m|=0 \tag{27}$$

时, $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

证明 由$|x_n-x_m|\leq|x_n-x|+|x-x_m|$知必要性显然成立. 如果我们设$|x_n-x_m|=y_{nm}$, 那么 $O\text{-}\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n\leq x_m+O\text{-}\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_{nm}$, $O\text{-}\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\geq x_m-O\text{-}\varliminf\limits_{n\to\infty}y_{nm}$. 于是

$$O\leq O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty}x_n-O\text{-}\varliminf_{n\to\infty}x_n\leq O\text{-}\lim_{m\to\infty}\left(O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty}y_{nm}-O\text{-}\varliminf_{n\to\infty}y_{nm}\right)=0.$$

于是我们证明了充分性.

命题 10 一个向量格 X 是 σ-完备的当且仅当每一个单调增加, 有界序列$\{x_n\}\subseteq X$ 在 X 内都具有 $\sup\limits_{n\geq 1}x_n$.

证明 我们只须证明充分性. 若$\{z_n\}$是 X 内任一有界序列, 令 $x_n=\sup\limits_{m\leq n}z_m$. 那么, 根据假设条件 $\sup\limits_{n\geq 1}x_n=z$ 在 X 内存在, 且有 $z=\sup\limits_{n\geq 1}z_n$. 类似地, 我们看出 $\inf\limits_{n\geq 1}z_n=\inf\limits_{n\geq 1}(\inf\limits_{m\leq n}z_m)$在 X 内也存在.

§ 3. *B*-格和 *F*-格

定义 一个实的 B-空间(F-空间) X 叫做一个 B-格(F-格)如果它是一个向量格且使

$$\text{由}|x|\leq|y|\text{可导致}\|x\|\leq\|y\|. \tag{1}$$

例 $C(S)$, $L^p(S)$按照自然部分序关系 $x\leq y$ 都是 B-格, $x\leq y$ 是指在 S 上有 $x(s)\leq y(s)$ (对于$L^p(S)$的情形, 在 S 上有 $x(s)\leq y(s)$ a. e.). 具有 $m(S)<\infty$ 的 $M(S, \mathfrak{B}, m)$按照 $L^p(S)$情形中的部分序成为一个 F-格. $A(S, \mathfrak{B})$按$\|x\|=|x|(S)=x$ 在 S 上的全变差, 成为一个 B-格.

由(1)和$|x|=|(|x|)|$，我们有

$$\|x\|=\|(|x|)\|. \tag{2}$$

此外，在 $A(S,\mathfrak{B})$ 内，我们有

$$x\geqq 0,\ y\geqq 0 \text{ 导致} \|x+y\|=\|x\|+\|y\|. \tag{3}$$

S. Kakutani 称满足条件(3)的B-格为一个抽象 L^1-空间．由(3)我们有

$$|x|<|y| \text{ 导致} \|x\|<\|y\|. \tag{4}$$

$A(S,\mathfrak{B})$内的范数是在 O-lim 下连续的，即是

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x \text{ 导致 } \lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|. \tag{5}$$

这是因为，在 $A(S,\mathfrak{B})$ 内，$O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 等价于 $y_n\in A(S,\mathfrak{B})$ 的存在，而 y_n 使得 $|x-x_n|(S)\leqq y_n(S)$ 成立，其中 $y_n(S)\downarrow 0$．容易看出 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 满足(4)和(5)．

命题 1 一个满足条件(4)与(5)的 σ-完备 F 格 X 是一个完备格．特别地，$A(S,\mathfrak{B})$ 与 $L^p(S)$都是完备格．

证明 若$\{x_\alpha\}\subseteq X$ 是有界的．我们可假设对所有的 α 有 $0\leqq x_\alpha\leqq x$，并将证明 $\sup\limits_\alpha x_\alpha$ 存在．考察作为有限个 x_α 的 sup 而得到的 z_β: $z_\beta=\bigvee\limits_{j=1}^{n}x_{\alpha_j}$ 的全体$\{z_{\beta_j}\}$．设 $\gamma=\sup\limits_\beta\|z_\beta\|$．则存在一序列$\{z_{\beta_j}\}$使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\|z_{\beta_j}\|=\gamma$．如果我们令 $z_n=\sup\limits_{j\leqq n}z_{\beta_j}$，那么 $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}z_n=w$ 存在，且由(5)以及 γ 的定义，我们有$\|w\|=\gamma$．我们来证明 $w=\sup\limits_\alpha x_\alpha$．假若 $x_\alpha\vee w>w$ 对某个确定的 x_α 成立．那么由(4)有$\|x_\alpha\vee w\|>\|w\|=\gamma$．但由 $x_\alpha\vee w=O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(x_\alpha\vee z_n)$，$x_\alpha\vee z_n\in\{z_\beta\}$ 以及(5)，我们有 $\|x_\alpha\vee w\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_\alpha\vee z_n\|\leqq\gamma$，这是一个矛盾．于是对于所有的 α 必有 $w\geqq x_\alpha$．设对于所有的 x_α 有 $x_\alpha\leqq u$．假若$w\wedge u<w$．那么由(4)有$\|w\wedge u\|<\gamma$，这与对所有的 z_β 有 $w\wedge u\geqq z_\beta$ 成立的事实相矛盾．所以必定有 $w=\sup\limits_\alpha x_\alpha$．

注 在$C(S)$内，$O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 并不必定导致 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$．在 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 内，$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 并不必定导致 $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$．为了看出这点，设 $x_1(s), x_2(s), \cdots$是$[0,1]$的诸区间：

$$\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},\frac{2}{2}\right],\left[0,\frac{1}{4}\right],\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right],\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right],\left[\frac{3}{4},\frac{4}{4}\right],\left[0,\frac{1}{8}\right],\left[\frac{1}{8},\frac{2}{8}\right],\cdots$$

的特征函数．这时序列$\{x_n(S)\}\subseteq M([0,1])$渐近地收敛于 0 但不 a. e. 收敛于 0，即 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 成立而 $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 不成立．

命题 2 若 X 是一个 F-格．又设序列$\{x_n\}\subseteq X$ 满足条件 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$．则$\{x_n\}$ 相对一致*收敛于 x．这指的是从$\{x_n\}$的任一子序列$\{y_n\}$中，我们都能选取一子序列$\{y_{n(k)}\}$及一个 $z\in X$ 使得

$$|y_{n(k)}-x|\leqq k^{-1}z \quad (k=1,2,\cdots). \tag{6}$$

反之，如果$\{x_n\}$相对一致*收敛于 x，则 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$．

证明 我们可以限于讨论 $x=0$ 的情形. 从 $\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=0$, 我们看出存在正整数的一个序列 $\{n(k)\}$ 使得 $\|ky_{n(k)}\|\leqq k^{-2}$. 则取 $z=\sum_{k=1}^{\infty}|ky_{n(k)}|$ 得(6)式成立. 反之, 若条件(6)在 $x=0$ 时成立, 那么从 $|y_{n(k)}|\leqq k^{-1}z$ 得到 $\|y_{n(k)}\|\leqq\|k^{-1}z\|$. 于是 $s\text{-}\lim_{k\to\infty}y_{n(k)}=0$. 所以不能存在 $\{x_n\}$ 的某个子序列 $\{y_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\|y_n\|>0$.

注 上述命题是下列事实的一个抽象表述, 即具有 $m(S)<\infty$ 的 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 的一个渐近收敛序列含有一个 m-a.e. 收敛的子序列.

§4. Banach 收敛定理

这个定理涉及其值域是可测函数的线性算子序列的几乎处处收敛性. 参看 S. Banach[2]. 此定理的一个格理论表述如下(K. Yosida[15]).

定理 若 X 是具有范数$\|\ \|$的一实 B-空间且 Y 是具有拟范数$\|\ \|_1$ 的一个 σ-完备 F-格使得

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty}y_n=y \text{ 导致 } \lim_{n\to\infty}\|y_n\|_1=\|y\|_1. \tag{1}$$

设 $\{T_n\}$ 是属于 $L(X,Y)$ 的有界线性算子序列. 假设

对于构成第二纲集 G 的诸 $x\in X$ 有

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty}|T_nx| \text{ 存在}. \tag{2}$$

则对任何 $x\in X$, $O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}T_nx$ 及 $O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}T_nx$ 两者都存在且由

$$\widetilde{T}x=\left(O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}T_nx\right)-\left(O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}T_nx\right) \tag{3}$$

定义的算子 $\widetilde{T}$(不必是线性的)作为把 X 映入 Y 内的一个算子是连续的.

注 如果当且仅当 $y_1(s)\leqq y_2(s)$ m-a.e. 时, 我们记 $y_1\leqq y_2$, 而用 $\|y\|_1=\int_S|y(s)(1+|y(s)|)^{-1}\cdot m(ds)$ 来定义拟范数 $\|y\|_1$, 则具有 $m(S)<\infty$ 的空间 $M(S,\mathfrak{B},m)$ 满足条件(1). 同样, 具有 $m(S)<\infty$ 的 $L^p(S,\mathfrak{B},m)$ 采用同样的半序时也满足条件(1).

定理的证明 设 $T_nx=y_n$, $y_n'=\sup_{n\geq m}|y_m|$, $y'=\sup_{n\geq1}|y_n|$, 考察算子 $V_nx=y'_n$ 以及至少定义在 G 上并把 G 映入 Y 内的算子 $Vx=y'$. 根据前面 §2 的(23)式, 每个 V_n 随着 T_k 强连续而强连续. 因为由(1)有 $\lim_{n\to\infty}\|V_nx-Vx\|_1=0$, 所以有 $\lim_{n\to\infty}\|k^{-1}V_nx\|=\|k^{-1}Vx\|$ 并进而有 $\lim_{k\to\infty}\|k^{-1}Vx\|_1=0$. 这些结果都可由 F-空间 Y 内的 αy 对 α, y 的连续性推导出来. 因此, 对任何 $\varepsilon>0$, 有

$$G\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k, \text{ 其中 } G_k=\{x\in X;\sup_{n\geq1}\|k^{-1}V_nx\|_1\leqq\varepsilon\}. \tag{4}$$

由 V_n 的强连续性知每一个 G_k 是 X 的一个强闭集. 由于 G 是第二纲集的假设, 所以某个 G_{k_0} 含有 X 的一个球. 即是, 存在 $x_0\in X$ 和 $\delta>0$ 使得 $\|x_0-x\|\leqq\delta$ 导致 $\sup_{n\geq1}\|k_0^{-1}V_nx\|_1\leqq\varepsilon$. 因此, 令 $z=x_0-x$, 便有 $\sup_{n\geq1}\|k_0^{-1}V_nz\|_1\leqq\sup_{n\geq1}\|k_0^{-1}V_nx_0\|_1+\sup_{n\geq1}\|k_0^{-1}V_nx\|_1\leqq2\varepsilon$, 亦即, 因为 $V_n(k_0^{-1}z)=k_0^{-1}V_nz$,

我们有

$$\sup_{n\geq 1}\|V_n z\|_1 \leq 2\varepsilon \text{ 成立, 只要 } \|z\|\leq \delta/k_0.$$

这就证明了 $s\text{-}\lim_{\|z\|\to 0} V_n\cdot z=0$ 对 n 一致地成立.

因为 G 在 X 内稠密, 所以对于所有的 $x\in X$, $V\cdot x$ 有定义且 $V\cdot x$ 在 $x=0$ 处是强连续的且有 $V\cdot 0=0$. 于是, 由

$|\widetilde{T}\cdot x|\leq 2V\cdot x$ 以及 $\|\widetilde{T}x_1-\widetilde{T}x_2\|_1\leq\|\widetilde{T}(x_1-x_2)\|_1$, 我们看出 $\widetilde{T}\cdot x$ 在每个 $x\in X$ 处是强连续的.

系 在条件(1)下, 集合 $G=\{x\in X; O\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n x \text{ 存在}\}$ 或者与 X 重合或者是第一纲集.

证明 假若 G 是第二纲集. 那么根据定理, 算子 $\widetilde{T}$ 是映 X 入 Y 内的一个强连续算子. 因此, $G=\{x\in X;\ \widetilde{T}y=0\}$ 在 X 内是强闭的. 此外, G 是 X 的一个线性子空间. 于是 G 必与 X 重合. 否则, G 在 X 内不会是稠密的.

§5. 向量格的点函数表示

若向量格 X 含有一个单位 I, 它具有性质:

$$I>0, \text{ 且对任何 } f\in X, \text{ 存在 } \alpha>0,$$
$$\text{使得 } -\alpha I\leq f\leq \alpha I. \tag{1}$$

我们可以象把赋范环表为点函数那样, 对于这样的一个向量格给出一个类似的表示.

如果 $n|f|\leq I\ (n=1, 2, \cdots)$, 则元素 $f\in X$ 叫做幂零的. 所有幂零元素 $f\in X$ 所成的集合 R 叫做 X 的根. 根据第十二章 §2 的(20)式, R 构成 X 的一个线性子空间. 此外, 在

$$f\in R \text{ 以及 } |g|\leq|f| \text{ 导致 } g\in R \tag{2}$$

的意义下, R 是一个理想.

引理 设 X_1 和 X_2 都是向量格. 把 X_1 映到 X_2 上的一个线性算子 T 叫做一个格同态, 如果

$$T(x{\vee\atop\wedge}y)=(Tx){\vee\atop\wedge}(Ty). \tag{3}$$

那么 T 是一个格同态当且仅当 $N=\{x\in X;Tx=0\}$ 是 X_1 的一个理想.

证明 设 T 是一个格同态. 又设 $x\in N$ 以及 $|y|\leq|x|$. 则由 $T(|x|)=T(x\vee -x)=(Tx)\vee(T(-x))=0$, 可得 $0\leq Ty^+=T(y^+\wedge|x|)=Ty^+\wedge T|x|=0$ 从而 $y^+\in N$. 类似地可得 $y^{-1}\in N$. 因此 $y=y^++y^-\in N$.

其次, 设线性子空间 $N=\{x\in X_1;\ Tx=0\}$ 是 X_1 的一个理想. 则线性子空间 X_2 同构于商空间 X_1/N. 我们必须证明 $\overline{(x{\vee\atop\wedge}y)}=\bar{x}{\vee\atop\wedge}\bar{y}$, 其中 $\bar{x}$ 是含有 x 的模 N 剩余类. 但是, 如果 $\bar{y}=\bar{z}$ 即如果 $y-z\in N$, 则由第十二章 §2 的(23)式可得

$$|x{\vee\atop\wedge}y-x{\vee\atop\wedge}z|\leq|y-z|\in N.$$

所以剩余类 $\overline{(x{\vee\atop\wedge}y)}$ 的确定是与从剩余类 $\bar{x}, \bar{y}$ 中怎样分别选取代表元素 x, y 无关.

注 上面的引理可表述如下. 若 N 是向量格的一个线性子空间, 则当且仅当 N 是 X 的一个理想时, 线性同余 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ N)$ 也是格同余:

由 $a\equiv b, a'\equiv b' (\bmod N)$ 可导出 $a{}^{\vee}_{\wedge}b\equiv a'{}^{\vee}_{\wedge}b' (\bmod\ N)$.

如果 $N\neq\{0\}, X$, 则理想 N 叫做非平凡的. 一个非平凡理想, 如果它不含于其他的不等于 X 的理想内, 则称它为极大理想. 用 $\mathfrak{M}$ 表示 X 的所有极大理想 N 所成的集合. X 的 mod N 的剩余类 X/N, 其中 N 是任一 $\in\mathfrak{M}$ 的理想, 是简单的, 即 X/N 不含有非平凡理想. 下面将证明, 具有单位的简单向量格是同构于实数向量格的一个线性格, 其非负元和单位 I 用非负数和数 1 表示. 借助于线性格同态 $X\to AX/N, N\in\mathfrak{M}$, 我们以 $f(N)$ 表示与 $f\in X$ 对应的实数.

有了这些预备之后, 我们可以叙述

定理 1 根 R 与交理想 $\bigcap N \quad (N\in\mathfrak{M})$ 重合.

证明 第一步 若 X 是具有单位 I 的简单向量格, 则必有 $X=\{\alpha I; -\infty<\alpha<\infty\}$.

证明, X 不含有幂零元素 $f\neq 0$, 因为否则 X 就含有一个非平凡理想 $N=\{g; |g|\leqq\eta|f|$ 对于某个 $\eta<\infty$ 成立$\}$. 于是, 根据(1), X 满足阿基米德原理:

$$\text{序-}\lim_{n\to\infty} n^{-1}|x|=0 \text{ 对所有的 } x\in X \text{ 成立.} \tag{4}$$

假设存在一个 $f_0\in X$ 使得 $f_0\neq\gamma I$ 对任一实数 γ 成立, 令

$$\alpha=\inf_{f_0\leq\alpha' I}\alpha', \quad \beta=\sup_{\beta' I\leq f_0}\beta'.$$

则由(4)有 $\beta I\leqq f_0\leqq\alpha I$ 以及 $\beta<\alpha$. 于是 $(f_0-\delta I)^+\neq 0$, $(f_0-\delta I)^-\neq 0$ 对于 $\beta<\delta<\alpha$ 成立. 因此, 由 $x^+\wedge(-x^-)=0$, 集合 $N_0=\{g; |g|\leqq\eta(f_0-\delta I)^+$ 对于某个 $\eta<\infty$ 成立$\}$ 是一个非平凡理想, 这与假设相矛盾.

第二步 对任何非平凡理想 N_0, 存在含有 N_0 的极大理想 N_1.

证明. 设 $\{N_0\}$ 是含有 N_0 的非平凡理想的全体. 我们以包含关系作为 $\{N_0\}$ 的诸理想的序关系, 即如果 N_{α_1} 是 N_{α_2} 的一个子集, 我们就记 $N_{\alpha_1}\leqq N_{\alpha_2}$. 假设 $\{N_\alpha\}$ 是 $\{N_0\}$ 的一个线性有序子集且集合 $N_\beta=\bigcup_{N_\alpha\in\{N_\alpha\}} N_\alpha$. 那末我们将证明 N_β 是 $\{N_\alpha\}$ 的一个上界. 因为, 如果 $x, y\in N_\beta$, 则存在理想 N_{α_1} 和 N_{α_2} 使得 $x\in N_\alpha$ 及 $y\in N_{\alpha_2}$. 由于 $\{N_\alpha\}$ 是线性有序的, 所以 $N_{\alpha_1}\subseteqq N_{\alpha_2}$(或 $N_{\alpha_1}\supseteqq N_{\alpha_2}$) 从而 x 和 y 两者都属于 N_{α_2}. 这就证明了 $(\gamma x+\delta y)\in N_{\alpha_2}\subseteqq N_\beta$ 以及由 $|z|\leqq|x|$ 可导出 $z\in N_{\alpha_1}\subseteqq N_\beta$. 因为没有 N_α 包含单位 I, 所以 N_β 也不包含 I. 所以 N_β 是含有每个 N_α 的非平凡理想, 即 N_β 是 $\{N_\alpha\}$ 的一个上界. 于是根据 Zorn 引理, 至少存在一个包含 N_0 的极大理想.

第三步 $R\subseteqq\cap N$. 设 $f>0$ 且 $nf\leqq I\,(n=1, 2, \cdots)$. 那么对任何 $N\in\mathfrak{M}$, 有 $nf(N)\leqq I(N)=1\,(n=1, 2, \cdots)$, 所以 $f(N)=0$ 即 $f\in N$.

第四步 $R\supseteqq\cap N \quad (N\in\mathfrak{M})$. 设 $f>0$ 不是幂零的. 那么我们必须证明存在一个理想 $N\in\mathfrak{M}$ 使得 $f\bar{\in} N$. 这可以证明如下.

因为 $f>0$ 不是幂零的, 所以存在一个整数 n 使得 $nf\nleqq I$. 我们可以假设 $nf\ngeqq I$, 如若不然, 则对任何 $N\in\mathfrak{M}$ 有 $f\bar{\in} N$, 从而得证. 于是我们就假定 $p=I-(n\cdot f)\wedge I>0$. 则对任何正整数 m, $m\cdot p\geqq I$ 都不成立. 如若不然, 我们会有 $m^{-1}I\leqq I-(n\cdot f)\wedge I$, 于是

$$(n\cdot f)\wedge I=(n\cdot f)\wedge(1-m^{-1})I.$$

这样一来，根据第十二章 §2 的(6)式，有

$$(n\cdot f-(1-m^{-1})I)\wedge m^{-1}I=(n\cdot f-(1-m^{-1})I)\wedge 0\leqq 0,$$

于是，由向量格的分配性

$$0=\{(n\cdot f-(1-m^{-1})I\wedge m^{-1}I\}\vee 0=(n\cdot f-(1-m^{-1})I)^{+}\wedge m^{-1}I,$$

即$(n\cdot f-(1-m^{-1})I)^{-}\wedge I=0$. 令 $b=(n\cdot f-(1-m^{-1})I)^{+}$且假定 $b>0$, 根据条件(1), 对某个$\alpha>1$, 我们有 $b<\alpha I$. 那么 $0<b=b\wedge\alpha I$ 于是 $0<(\alpha^{-1}b)\wedge I\leqq b\wedge I$, 这与 $b\wedge I=0$ 矛盾. 所以$b=0$, 即 $n\cdot f\leqq(1-m^{-1})I$. 这与 $n\cdot f\nleqq I$ 的事实相矛盾. 所以集合 $N_0=\{g;\ |g|\leqq\eta|p|$, 对某个 $\eta<\infty\}$是一个非平凡理想. 根据第二步, N_0 至少包含在一个极大理想N内. 那么 $0=p(N)=1-(n\cdot f(N))\wedge 1$, 这就证明了 $f(N)>0$, 即 $f\in N$.

于是我们证明了定理 1.

向量格 $\bar{X}=X/R$ 还是一个具有单位 $\bar{I}$ 的向量格. 根据定理 1, $\bar{X}$ 的所有极大理想 $\bar{N}$ 的交理想 $\bigcap_{N}\bar{N}$ 是零理想且 $\bar{X}$ 不含幂零元素$\neq 0$. 于是 $\bar{X}$ 满足阿基米德原理

$$\text{序-}\lim_{n\to\infty}n^{-1}|\bar{f}|=0 \text{ 对所有 } \bar{f}\in\bar{X} \text{ 成立}. \tag{5}$$

若 $\bar{N}$ 是 $\bar{X}$ 的任一极大理想. 则商空间 $\bar{X}/\bar{N}$ 是一个简单向量格, 于是根据定理 1 证明的第一步, $\bar{X}/\bar{N}$ 是线性格同构于实数的向量格; 其非负元素和单位由非负数和 1 来表示. 我们用 $\bar{f}(\bar{N})$表示按同态关系 $\bar{X}\to\bar{X}/\bar{N}$ 与 $\bar{f}$ 对应的实数. 我们再用$\overline{\mathfrak{M}}$表示 $\bar{X}$ 的所有极大理想所构成的集合. 于是我们有

定理 2 按对应关系 $\bar{f}\to\bar{f}(\bar{N})$, $\bar{X}$线性格同构地被映成$\overline{\mathfrak{M}}$上的实值有界函数所组成的向量格 $F(\overline{\mathfrak{M}})$, 它使得(i) $|\bar{f}|\to|\bar{f}(\bar{N})|$, (ii) $\bar{I}(\bar{N})\equiv 1$ 在 $\overline{\mathfrak{M}}$ 上成立以及(iii)在下述意义下 $F(\overline{\mathfrak{M}})$ 可分$\overline{\mathfrak{M}}$的点.

对于$\overline{\mathfrak{M}}$的两个不同的点 $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, 至少存在

$$\text{一个 } \bar{f}\in\bar{X} \text{ 使得 } \bar{f}(\bar{N}_1)\neq\bar{f}(\bar{N}_2). \tag{6}$$

注 把形如

$\{\bar{N}\in\overline{\mathfrak{M}};\ |\bar{f}_i(\bar{N})-\bar{f}_i(\bar{N}_0)|<\varepsilon_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,

其中 $-\bar{I}\leqq\bar{f}\leqq\bar{I}$ 对所有 i 成立$\}$

的集合称为 N_0 的邻域, 用这种办法在$\overline{\mathfrak{M}}$内引进一个拓扑. 这时$\overline{\mathfrak{M}}$是紧的, 这是因为它可以与诸闭区间$[-1, 1]$的拓扑乘积的一个闭子集恒等(该乘积的次数满足$-\bar{I}\leqq\bar{f}\leqq\bar{I}$ 的诸元素 $\bar{f}\in X$ 所成集合的基数相同). 证明完全类似于第十一章 §2 中赋范环的所有极大理想所成集合的情形. 此外, 每一个函数 $\bar{f}(\bar{N})\in F(\overline{\mathfrak{M}})$在用这种方法拓扑化了的紧空间$\overline{\mathfrak{M}}$上是连续的. 因此, 根据第 0 章 §2 中的 Kakutani-Krein 定理, 我们知道 $F(\overline{\mathfrak{M}})$在 B- 空间 $C(\overline{\mathfrak{M}})$内是稠密的. 以上两个定理取材于 K. Yosida-M. Fukamiya[16], 也可参看 S. Kakutani[4]和 M. Krein-S. Krein[2].

§6. 向量格的集合函数表示

设X是一个σ-完备的向量格. 选取X的任一正元素 x, 称它为 X 的一个"单位"并把它写成

1；当不发生混淆时，我们也把$\alpha\cdot 1$写成α．一个非负元素$e\in X$，如果有$e\wedge(1-e)=0$成立，就称它为一个“拟单位”．诸拟单位e_i的一个线性组合$\sum_i \alpha_i e_i$叫做一个“阶梯元素”，而如果$y\in X$可以表成阶梯元素序列的O-lim，则我们称元素y（关于单位1）是绝对连续的．如果对$z\in X$有$|z|\wedge 1=0$，则元素z叫做（关于单位1）“奇异”的．

我们将给出积分论中Radon-Nikodym定理的一个抽象表述．

定理 X的任一元素可以唯一地表成一个绝对连续元素与一个奇异元素的和．

证明 第一步．如果$f>0, f\wedge 1\neq 0$，则存在一个正数α与一个拟单位$e_\alpha\neq 0$使得$f\geqq \alpha e_\alpha$．事实上，我们可以取

$$e_\alpha=\bigvee_{n\geq 1}\{n(\alpha^{-1}f-\alpha^{-1}f\wedge 1)\wedge 1\}. \tag{1}$$

证明，设$y_\alpha=\alpha^{-1}f-\alpha^{-1}f\wedge 1$．则可得

$$2e_\alpha\wedge 1=\{\bigvee_{n\geq 1}(2ny_\alpha\wedge 2)\}\wedge 1=e_\alpha,$$

所以e_α是一个拟单位．由

$$ny_\alpha\wedge 1=n_\alpha^{-1}f\wedge[1+n(\alpha^{-1}f\wedge 1)]-n(\alpha^{-1}f\wedge 1)\leqq(n+1)\alpha^{-1}f\wedge(n+1)-n(\alpha^{-1}f\wedge 1)$$
$$\leqq\alpha^{-1}f\wedge 1\leqq\alpha^{-1}f.$$

可以得到$f\geqq\alpha e_\alpha$．如果我们能证明对于某个$\alpha>0$有$y_\alpha\wedge 1>0$，那么对这样的α便有$e_\alpha>0$．假若这样的正α不存在．则对每个具有条件$0<\alpha<1$的α，我们有

$$\alpha^{-1}(\alpha^{-1}f-\alpha^{-1}f\wedge 1)\wedge\alpha^{-1}=0.$$

于是$(f-f\wedge\alpha)\wedge 1=0$且当令$\alpha\downarrow 0$时，我们便得到$f\wedge 1=0$，这与假设条件$f\wedge 1\neq 0$相矛盾．

第二步．设$f\geqq 0$，并且$f\geqq\alpha e$其中$\alpha>0$而e是一个拟单位．则对于$0<\alpha'<\alpha$有$e_{\alpha'}\geqq e$以及$f\geqq\alpha' e_{\alpha'}$，其中$e_{\alpha'}$是由(1)定义的．

证明．为简单计，假设$\alpha=1$．对于$0<\delta<1$有

$$\frac{f}{1-\delta}+\frac{e}{1-\delta}\wedge 1=\left(\frac{f}{1-\delta}+\frac{e}{1-\delta}\right)\wedge\left(1+\frac{f}{1-\delta}\right)\geqq\left(\frac{f}{1-\delta}+\frac{e}{1-\delta}\right)\wedge\left(1+\frac{e}{1-\delta}\right)$$
$$=\frac{f}{1-\delta}\wedge 1+\frac{e}{1-\delta}.$$

因为e是一个拟单位，我们有$2e\wedge 1=e, e\wedge 1=e$．所以$me\wedge 1=e$当$m\geqq 1$时成立．于是，由$1<(1-\delta)^{-1}$，我们有$(1-\delta)^{-1}e\wedge 1=e$．所以从以上不等式可得

$$\frac{\delta}{1-\delta}e=\frac{e}{1-\delta}-\frac{e}{1-\delta}\wedge 1\leqq\frac{f}{1-\delta}-\frac{f}{1-\delta}\wedge 1=y_{1-\delta},$$

从而，由(1)，有$e\leqq e_{1-\delta}$．

第三步．所有的拟单位组成的集合构成一个Boole代数，即如果e_1和e_2都是拟单位，那么，$e_1\vee e_2$以及$e_1\wedge e_2$也都是拟单位且$0\leqq e_i\leqq 1$．拟单位$(1-e)$是e的补元，而0，1分别是全体拟单位中的最小元素和最大元素．

证明．条件$e\wedge(1-e)=0$等价于$2e\wedge 1=e$．于是如果e_1, e_2都是拟单位，则

$$2(e_1\wedge e_2)\wedge 1=(2e_1\wedge 1)\wedge(2e_2\wedge 1)=e_1\wedge e_2,$$
$$2(e_1\vee e_2)\wedge 1=(2e_1\wedge 1)\vee(2e_2\wedge 1)=e_1\vee e_2,$$

所以 $e_1\wedge e_2$ 和 $e_1\vee e_2$ 都是拟单位.

第四步 若 $f>0$, 再设 $\bar{f}=\sup\beta e_\beta$ 其中sup是对所有正有理数 β 取的. 由于第三步, 有限个形如 $\beta_i e_{\beta_i}$ 的元素的 sup 是一个阶梯元素. 于是 $\bar{f}$ 关于单位元素 1 是绝对连续的. 我们必须证明 $g=f-\bar{f}$ 关于单位元素 1 是奇异的. 假若 g 不是奇异的. 则根据第一步, 存在正数 α 和一个拟单位 e 使得 $g\geqq\alpha e$. 所以 $f\geqq\alpha e$, 从而由第二步, 对 $0<\alpha_1<\alpha$, 存在一个拟单位 $e_{\alpha_1}\geqq e$ 使得 $f\geqq\alpha_1 e_{\alpha_1}$. 我们可以假定 α_1 是一个有理数. 因此 $\bar{f}\geqq\alpha_1 e_{\alpha_1}$ 所以 $f=\bar{f}+g\geqq 2\alpha_1 e_{\alpha_1}$. 再根据第二步知对 $0<\alpha_1'<\alpha_1$ 存在一个拟单位 $e_{2\alpha_1'}\geqq e_{\alpha_1}$ 使得 $f\geqq 2\alpha_1' e_{2\alpha_1'}$. 我们可以假定 $2\alpha_1'$ 是一个有理数, 所以 $\bar{f}\geqq 2\alpha_1' e_{2\alpha_1'}$. 于是 $f=\bar{f}+g\geqq 3\alpha_1' e$. 重复这个过程, 我们可以证明: 对满足关系 $0<\alpha_n<\alpha$ 的任何有理数 α_n 有

$$f\geqq(n+1)\alpha_n e\quad(n=1,2,\cdots).$$

如果我们取 $\alpha_n\geqq\alpha/2$, 就有 $(n+1)\alpha_n e\geqq 2^{-1}n\alpha e$. 于是 $f\geqq n\alpha e\,(n=1,2,\cdots)$ 对于 $\alpha>0$, $e>0$ 成立. 这是一个矛盾. 因为根据 X 的 σ-完备性, 在 X 内阿基米德原理成立.

第五步 设 $f=f^++f^-$ 是一般元素 $f\in X$ 的一个 Jordan 分解. 把第四步的结果分别用到 f^+ 和 f^- 上, 我们看到 f 分解成一个绝对连续元素与一个奇异元素的和. 如果我们能证明对一个元素 $h\in X$, 当 h 是绝对连续且是奇异时, 必有 $h=0$, 则分解的唯一性就得到证明. 而因为 h 是绝对连续的, 我们有 $h=O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}h_n$, 其中 h_n 均是阶梯元素. 正因为 h_n 是一个阶梯元素, 所以存在正数 α_n 使得 $|h_n|\leqq\alpha_n\cdot 1$. 又因为 h 是奇异的, 我们有 $|h|\wedge|h_n|=0$. 所以

$$|h|=|h|\wedge|h|=O\text{-}\lim_{n\to\infty}(|h|\wedge|h_n|)=0.$$

应用于 Radon-Nikodym 定理 考察 $X=A(S,\mathfrak{B})$ 的情况. 我们已经知道 (第十二章 § 3中的命题 1) $A(S,\mathfrak{B})$ 是一个完备格, 且在 $A(S,\mathfrak{B})$ 内有

$$x^+(B)=\sup_{B'\subseteq B}x(B')=x\text{ 在 }B\text{ 上的正变差 }\overline{V}(x,B).\tag{2}$$

我们先来证明一个

命题 在 $A(S,\mathfrak{B})$ 内, 取 $x>0$, $z\geqq\theta$ 使得 $x\wedge z=0$. 则存在一个集合 $B_0\in\mathfrak{B}$ 使得 $x(B_0)=0$ 以及 $z(S-B_0)=0$.

证明 因为 $x\wedge z=(x-z)^-+z$, 由(2)我们有

$$(x\wedge z)(B)=\inf_{B'\subseteq B}(x-z)(B')+z(B)=\inf_{B'\subseteq B}[x(B')+z(B-B')].\tag{3}$$

根据条件 $x\wedge z=0$, 于是得

$$\inf[x(B)+z(S-B)]=(x\wedge z)(S)=0.\qquad(B\in\mathfrak{B})$$

于是, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在一个 $B_\varepsilon\in\mathfrak{B}$ 使得 $x(B_\varepsilon)\leqq\varepsilon$, $z(S-B_\varepsilon)\leqq\varepsilon$. 令 $B_0=\bigcap\limits_{k\geq 1}\Big(\bigcup\limits_{n\geq k}B_{2^{-n}}\Big)$, 则根据 $x(B)$ 与 $z(B)$ 的 σ- 可加性, 有

$$0 \leqq x(B_0) = \lim_{k\to\infty} x\left(\bigcup_{n\geq k} B_{2^{-n}}\right) \leqq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 0,$$

$$0 \leqslant z(S-B_0) = \lim_{k\to\infty} z\left(S - \bigcup_{n\geq k} B_{2^{-n}}\right) \leqslant \lim_{k\to\infty} z(S-B_{2^{-k}}) = 0.$$

系 设 e 是 $A(S, \mathfrak{B})$ 内关于 $x>0$ 的一个拟单位. 那末,存在一个集合 $B_1\in\mathfrak{B}$ 使得

$$e(B) = x(B\cap B_1) \quad \text{对所有 } B\in\mathfrak{B} \text{ 成立.} \tag{4}$$

证明 因为 $(x-e)\wedge e=0$, 所以存在一个集合 $B_0\in\mathfrak{B}$ 使得 $e(B_0)=0$, $(x-e)(S-B_0)=0$. 于是 $e(S-B_0)=x(S-B_0)=e(S)$, 所以 $e(B)=x(B-B_0)=x(B\cap B_1)$ 其中 $B_1=S-B_0$.

现在我们可以来证明积分论中的 Radon-Nikodym 定理了. 借助以上的系, 则在 $A(S, \mathfrak{B})$ 内, 一个关于 $x>0$ 的拟单位 e 是一个压缩测度 $e(B)=x(B\cap B_e)$. 于是 $A(S, \mathfrak{B})$ 内的一个阶梯元素是形如

$$\sum_i \lambda_i \int_{B\cap B_i} x(ds)$$

的积分, 即是一个阶梯函数(=有限值函数)的不定积分. 于是 $A(S, \mathfrak{B})$ 内的一个绝对连续元素是关于测度 $x(B)$ 的一个不定积分. 以上命题说的是(关于单位 x 的)一个奇异元素 g 是与一个集合 $B_0\in\mathfrak{B}$ 相联系的, 而此 B_0 使得 $x(E_0)=0$ 及对所有的 $B\in\mathfrak{B}$, $g(B)=g(B\cap B_0)$ 成立. 这样的一个测度 $g(B)$ 就是所谓(关于 $x(B)$ 的)奇异测度. 因此任何元素 $f\in A(S, \mathfrak{B})$ 都可表示成(关于 $x(B)$ 的)一个不定积分与一个(关于 $x(B)$ 的)奇异测度 $g(B)$ 的和. 这种分解是唯一的. 所得结果正好是 Radon-Nikodym 定理.

注 以上定理摘自 K. Yosida[2]. 参看 F. Riesz[6], H. Freudenthal[2] 以及 S. Kakutani[5], 更进一步研究, 可参看 G. Birkhoff[1].

第十三章　遍历理论和扩散理论

遍历理论和扩散理论构成半群的分析理论在应用方面使人着迷的领域. 从数学上来说，遍历理论涉及的是半群 T_t 的"时间平均"$\lim\limits_{t\uparrow\infty} t^{-1}\int_0^t T_s ds$，而扩散理论涉及的是：利用和随机过程有内在联系的半群的无穷小生成元来研究随机过程。

§1. 具有不变测度的 Markov 过程

在 1862 年，英国植物学家 R. Brown 在显微镜下观察到在液体中悬浮着的微粒——某种花的花粉——无规则地运动着，不断地改变着自己的位置和方向. 为了描述这种现象，我们考虑在时刻 t 从位置 x 出发的一个微粒在下一个时刻 s 进入集合 E 的转移概率 $P(t,x;s,E)$. 转移概率 $P(t,x;s,E)$ 的引入是以这样一个根本性的假设为基础的，即任何一个微粒在时刻 t 以后所作的无规则运动同它在时刻 t 以前的历程是完全无关的，即是说，如果我们知道了微粒在时刻 t 的位置 x，那么，该微粒在时刻 t 之后的历程完全是随机地确定的. 微粒不记得自己的过去这个假设意味着转移概率 P 满足方程

$$P(t,x;s,E)=\int_S P(t,x;u,dy)P(u,y;s,E) \text{ 对 } t<u<s \text{ 成立}, \tag{1}$$

这里，积分是对微粒作无规则运动的整个空间 S 进行的.

由满足(1)的转移概率所控制的随时间而演变的过程称为 Markov 过程，而方程(1)称为 Chapman-Kolmogorov 方程. Markov 过程是确定性过程的一种自然推广，对于确定过程来说，针对 $y\in E$ 或 $y\bar{\in} E$ 而有 $P(t,x;s,E)=1$ 或 $=0$；这就是说，对于确定过程，在时刻 t 处于位置 x 的微粒在此后的每一固定的时刻 s 均以概率 1 运动到某个确定的位置 $y=y(x,t,s)$. Markov 过程叫做时齐的，如果 $P(t,x;s,E)$ 是 $(s-t)$ 的函数且与 t 无关. 对于这种情形，我们就需要考虑位于 x 的微粒经过 t 个单位时间之后进入集合 E 的转移概率 $P(t,x,E)$. 这时，方程(1)就变为

$$P(t+s,x,E)=\int_S P(t,x,dy)P(s,y,E) \quad \text{对 } t,s>0 \text{ 成立}. \tag{2}$$

在一个适当的函数空间 X 中，$P(t,x,E)$ 给出一个线性变换 T_t：

$$(T_t f)(x)=\int_S P(t,x,dy)f(y), \quad f\in X, \tag{3}$$

由(2)可知，此变换具有半群性质：

$$T_{t+s}=T_tT_s \quad (t,s>0). \tag{4}$$

统计力学中的一个基本的数学问题是关于时间平均

$$\lim_{t\uparrow\infty} t^{-1}\int_0^t T_s f\,ds \tag{5}$$

的存在性问题．实际上，设 S 是用经典的哈密顿方程来描绘的一个力学系统的相空间，并且此哈密顿方程的哈密顿函数不显含时间变量．于是，S 的点 x 在经过 t 个单位时间之后就按照由 Liouville 给出的一个经典定理所规定的方式运动到 S 点 $y_t(x)$，即对于每个固定的 t，由 S 到 S 上的映射 $x\to y_t(x)$ 是一个同等测度变换，即是说，映射 $x\to y_t(x)$ 保持着 S 的"相体积"不变．在这种确定性的情形，我们有

$$(T_t f)(x)=f(y_t(x)), \tag{6}$$

从而，在假设了 $\int_S dx<\infty$ 之后，Boltzmann 的遍历假设

任何一个物理量的时间平均＝
该物理量的空间平均

就可以表示为

$$\lim_{t\uparrow\infty} t^{-1}\int_0^t f(y_s(x))\,ds=\int_S f(x)dx\Big/\int_S dx \quad 对一切\ f\in X\ 成立,$$

dx 表示 S 的相体积元. (7)

要想把同等测度变换 $x\to y_t(x)$ 自然地推广到 Markov 过程 $P(t,x,E)$ 的情形就需要假设存在一个不变测度 $m(dx)$：

$$\int_S m(dx)P(t,x,E)=m(E) \quad 对一切\ t>0\ 和一切\ E\ 成立. \tag{8}$$

因此，我们给出

定义 设 $\mathfrak{B}$ 是 S 的子集 B 的一个 σ-可加族，且 S 本身 $\in\mathfrak{B}$. 又设对于每个 $t>0$、$x\in S$ 和 $E\in\mathfrak{B}$，存在一个函数 $P(t,x,E)$ 使得：

$$P(t,x,E)\geqq 0,\quad P(t,x,S)=1, \tag{9}$$

对固定的 t 和 x，$P(t,x,E)$ 对 $E\in\mathfrak{B}$ 是 σ-可加的， (10)

对固定的 t 和 E，$P(t,x,E)$ 对 x 是 $\mathfrak{B}$-可测的， (11)

$$P(t+s,x,E)=\int_S P(t,x,dy)P(s,y,E)\ \text{(Chapman-Kolmogorov 方程)}. \tag{12}$$

这时，我们就说这样一个系统 $P(t,x,E)$ 确定了一个在相空间 $(S,\mathfrak{B})$ 上的 Markov 过程．如果我们还进一步假设 $(S,\mathfrak{B},m)$ 是一个这样的测度空间，即

$$\int_S m(dx)P(t,x,E)=m(E)\ 对一切\ E\in\mathfrak{B}\ 成立, \tag{13}$$

那么我们就说 $P(t,x,E)$ 是一个具有不变测度 $m(E)$ 的 Markov 过程.

定理 1 假设 $P(t,x,E)$ 是一个具有不变测度 m 的 Markov 过程并且 $m(S)<\infty$. 对于 $p\geqq 1$，我们把空间 $X_p=L^p(S,\mathfrak{B},m)$ 中的范数记为 $\|f\|_p$. 则可以用(3)定义一个有界线性算子 $T_t\in L(X_p,X_p)$ 使得 $T_{t+s}=T_tT_s\ (t,s>0)$ 并且

T_t 是正算子，亦即，如果 $f(x)\geqq 0$ 在 S 上 m-a. e. 成立，则 $(T_t f)(x)\geqq 0$ 在 S 上 m-a. e. 成立， (14)

$$T_t\cdot 1=1, \tag{15}$$

对于 $f\in X_p=L^p(S,\mathfrak{B},m)$ 且 $p=1, 2$ 和∞，有

$$\|T_t f\|_p\leqq\|f\|_p. \tag{16}$$

证明 (14)和(15)是显然的. 令 $f\in L^\infty(S,\mathfrak{B},m)$. 于是由(9)、(10)和(11)可知，$f_t(x)=(T_t f)(x)\in L^\infty(S,\mathfrak{B},m)$是确定的并且$\|f_t\|_\infty\leqq\|f\|_\infty$. 于是，对于 $f\in L^\infty(S,\mathfrak{B},m)$，$p=1$ 或 $p=2$，由(9)和(13)可得

$$\begin{aligned}\|f_t\|_p&=\left\{\int_S m(dx)\left|\int_S P(t,x,dy)f(y)\right|^p\right\}^{1/p}\\&\leqq\left\{\int_S m(dx)\left[\int_S P(t,x,dy)\,|f(y)|^p\cdot\int_S P(t,x,dy)1^p\right]\right\}^{1/p}\\&=\left\{\int_S m(dy)\,|f(y)|^p\right\}^{1/p}=\|f\|_p.\end{aligned}$$

对于非负的 $f\in L^p(S,\mathfrak{B},m)$，$p=1$ 或 $p=2$，我们令

$${}_nf(s)=\min(f(s),n)，这里\ n\ 是一个正整数.$$

于是，我们就得到 $0\leqq({}_nf(s))_t\leqq({}_{n+1}f(s))_t$ 和$\|({}_nf)_t\|_p\leqq\|{}_nf\|_p\leqq\|f\|_p$. 因此，如果我们令 $f_t(s)=\lim\limits_{n\to\infty}({}_nf(s))_t$，则由 Lebesgue-Fatou 引理可知$\|f_t\|_p\leqq\|f\|_p$，即是说，$f_t\in L^p(S,\mathfrak{B},m)$. 再利用 Lebesgue-Fatou 引理就得到

$$\begin{aligned}f_t(x)&=\lim_{n\to\infty}\int_S P(t,x,dy)\,({}_nf(y))\geqq\int_S P(t,x,dy)\left(\lim_{n\to\infty}({}_nf(y)\right)\\&=\int_S P(t,x,dy)f(y).\end{aligned}$$

因此，对于满足 $f_t(x_0)\neq\infty$的那些 x_0，亦即对于 m-a. e. x_0，$f(y)$关于测度 $P(t,x_0,dy)$ 是可积的. 于是，利用 Lebesgue-Fatou 引理，我们就最后得到

$$\int_S P(t,x_0,dy)\,(\lim_{n\to\infty}({}_nf(y)))=\lim_{n\to\infty}\int_S P(t,x_0,dy)\,({}_nf(y)).$$

所以，$f_t(x_0)=\int_S P(t,x_0,dy)f(y)$ m-a. e. 成立，并且$\|f_t\|_p\leqq\|f\|_p$. 对于一般的 $f\in L^p(S,\mathfrak{B},m)$，在把正算子 T_t 分别应用于 f^+和 f^-之后，我们就得到同样的结果.

定理 2 (K. Yosida) 设 $P(t,x,E)$ 是一个具有不变测度 m 的Markov 过程并且 $m(S)<\infty$. 则对任何一个 $f\in L^p(S,\mathfrak{B},m)$，$p=1$ 或 $p=2$，平均遍历定理成立：

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^{n}T_k f=f^*\ 在\ L^p(S,\mathfrak{B},m)内存在并且当\ f\in L^p(S,\mathfrak{B},m)时，有\ T_1f^*=f^*, \tag{17}$$

此外还有

$$\int_S f(s)m(ds)=\int_S f^*(s)m(ds). \tag{18}$$

证明 在 Hilbert空间 $L^2(S,\mathfrak{B},m)$ 中, 由(16)和第八章§3的一般平均遍历定理可知, 平均遍历定理(17)是成立的.

因为 $m(S)<\infty$, 所以由 Schwarz 不等式可知, 任何一个 $f\in L^2(S,\mathfrak{B},m)$ 都必属于 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 且 $\|f\|_1\leq\|f\|_2\cdot m(S)^{1/2}$. 于是对任何一个 $f\in L^2(S,\mathfrak{B},m)$, 平均遍历定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_S\left|f^*(s)-n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(T_kf)(s)\right|m(ds)=0 \text{ 和 } T_1f^*=f^* \text{ 都成立.}$$

再利用 $m(S)<\infty$ 和 $0=\lim\limits_{n\to\infty}\|f-{}_nf\|_1=\lim\limits_{n\to\infty}\int_S|f(s)-{}_nf(s)|m(ds)$, 这里, ${}_nf(s)=\min(f(s),n)$, 我们可以看出 $L^2(S,\mathfrak{B},m)$ 在 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 中是 L^1 稠密的. 即是说, 对任一 $f\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 和 $\varepsilon>0$, 总存在某个 $f_\varepsilon\in L^2(S,\mathfrak{B},m)\cap L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 使得 $\|f-f_\varepsilon\|_1<\varepsilon$. 因此, 由(16)可得

$$\left\|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}T_kf-n^{-1}\sum_{k=1}^{n}T_kf_\varepsilon\right\|_1\leq\|f-f_\varepsilon\|_1\leq\varepsilon.$$

对于 f_ε, 平均遍历定理(17)在 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 内是成立的, 从而, 由上述不等式可知对于 f, (17)在 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 内也必定成立.

因为强收敛必然导致弱收敛, 所以(18)是(17)的一个推论.

注 1 上述定理 2 出自 K. Yosida[17]. 此外, 可参看 S. Kakutani[6], 那里, 证明了对每一个 $f\in L^\infty(S,\mathfrak{B},m)$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_kf)(x)$ 是 m-a. e. 收敛的. 当半群 T_t 对 t 是强连续的时, 我们能够证明, 可以把(17)中的 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}T_kf$ 换为 $s\text{-}\lim\limits_{t\uparrow\infty}t^{-1}\int_0^tT_sf\,ds$. 我们不去详细叙述这些内容了, 因为在 E. Hopf[1]和 K. Jacobs[2]这些有关遍历理论的书中已对它们有所叙述. 我们还要提到 S. Kakutani[8]的精采报告, 其内容是关于遍历理论自 Hopf 于 1937 年提出的有关报告一直到 1950 年在剑桥召开的国际数学家会议期间的发展情况.

为了使用遍历假设(7), 我们必须证明个别遍历定理, 其意义为

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(T_kf)(x)=f^*(x)\ \ m\text{-a. e. 成立.}$$

在下一节, 我们要讨论序列 $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_kf)(x)$ 的 m-a. e. 收敛性. 我们的目的是利用第十二章§4中的 Banach 收敛定理从平均收敛来导出 m-a. e. 收敛.

§2. 个别遍历定理及其应用

我们首先证明

定理 1(K. Yosida) 设 X_1 是一个实的、σ-完备的 F-格, 并且它还具有一个拟范数 $\|x\|_1$ 使得

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 必导致 } \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1 = \|x\|_1. \tag{1}$$

设 X_1 的线性子空间 X 是一个实的 B-空间且具有范数 $\|x\|$, 使得

$$\text{在 } X \text{ 内 } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 必导致在 } X_1 \text{ 内 } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x. \tag{2}$$

设 $\{T_n\}$ 是由 X 到 X 内的有界线性算子所成的序列, 使得

$$O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}|T_n x|, \text{对 } X \text{ 内组成一个第二纲集 } S \text{ 的那些 } x, \text{总是存在的.} \tag{3}$$

假定对某个 $z\in X$, 存在相应的一个 $\bar{z}\in X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n z - \bar{z}\| = 0, \tag{4}$$

$$T_n\bar{z} = \bar{z} \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{5}$$

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty}(T_n z - T_n T_k z) = 0 \text{ 对 } k=1, 2, \cdots \text{成立.} \tag{6}$$

则

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n z = \bar{z}. \tag{7}$$

证明 令 $z=\bar{z}+(z-\bar{z})$. 我们用下述等式定义一个由 S 入 X_1 内的算子 $\widetilde{T}$:

$$\widetilde{T}x = O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}} T_n x - O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}} T_n x. \tag{8}$$

则由(5)可知

$$O \leqq \widetilde{T}z \leqq \widetilde{T}(z-\bar{z}).$$

由(6)我们有 $\widetilde{T}(z-T_k z)=0 (k=1, 2, \cdots)$, 而由(4)可得 $\lim_{n\to\infty}\|(z-\bar{z})-(z-T_k z)\|=0$. 于是, 根据第十二章 § 4 的 Banach 定理, 我们有 $\widetilde{T}(z-\bar{z})=0$. 因此 $0\leqq\widetilde{T}z\leqq 0$, 即是说 $O\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n z = w$ 存在.

我们尚须证明 $w=\bar{z}$. 由(4)和(2)可得 $\lim_{n\to\infty}\|T_n z-\bar{z}\|_1=0$. 由(1)和 $O\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n z = w$ 又可得到 $\lim_{n\to\infty}\|T_n z - w\|_1 = 0$. 因此, $w=\bar{z}$.

在把 X_1 取为实空间 $M(S, \mathfrak{B}, m)$ 而把 X 取为实空间 $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 之后, 我们可以证明下述个别遍历定理.

定理 2 (K. Yosida) 设 T 是一个由 $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 入 $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 内的有界线性算子, 这里, $m(S)<\infty$. 假定

$$\|T^n\| \leqq C < \infty \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{9}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(T^m x)(s)\right| < \infty \quad m\text{-a. e. 成立.} \tag{10}$$

再假定对于某个 $z\in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}(T^m z)(s) = 0 \quad m\text{-a. e. 成立,} \tag{11}$$

且序列$\left\{n^{-1}\sum_{m=1}^{n}T^m z\right\}$含有一个弱收敛

于某个元素$\bar{z}\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$的子序列. (12)

则

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{m=1}^{n}T^m z=\bar{z},\quad T\bar{z}=\bar{z}, \tag{13}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(T^m z)(s)=\bar{z}(s)\quad m\text{-a. e. 成立}. \tag{14}$$

证明 考虑空间$M(S,\mathfrak{B},m)$. 令F-格$X_1=M(S,\mathfrak{B},m)$而

$$\|x\|_1=\int_S |x(s)|(1+|x(s)|)^{-1}m(ds),$$

又令B-格$X=L^1(S,\mathfrak{B},m)$而$\|x\|=\int_S |x(s)|m(ds)$, 再令$T_n=n^{-1}\sum_{m=1}^{n}T^m$. 于是, 它们满足定理1的诸条件. 作为例子, 我们来验证(6)是成立的. 因为

$$T_n z-T_n T^k z=n^{-1}(T+T^2+\cdots+T^n)z-n^{-1}(T^{k+1}+T^{k+2}+\cdots+T^{k+n})z,$$

从而由(11)可知, $\lim_{n\to\infty}(T_n z-T_n T^k z)(s)=0$对$k=1,2,\cdots m$-a. e. 成立. 因此, 对$k$进行算术平均, 我们就得到$\lim_{n\to\infty}(T_n z-T_n T_k z)(s)=0$对$k=1,2,\cdots m$-a. e. 成立. 条件(4)和(5), 亦即条件(13)是第八章§3的平均遍历定理的一个结果.

注 上述两个定理取材于K. Yosida[15]和[18]. 在那两篇文章中还给出了由定理1导出的一些其它遍历定理.

关于上面的条件(11), 有下述的E. Hopf[3]的结果:

定理3 设T是将实的$L^1(S,\mathfrak{B},m)$映入自己内的一个正的线性算子且其L^1范数$\|T\|\leqq 1$. 如果$f\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$而$p\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$且$p(s)\geqq 0$ m-a. e. 成立, 则

$$\lim_{n\to\infty}(T^n f)(s)\Big/\sum_{j=0}^{n-1}(T^j p)(s)=0 \text{ 在使 } p(s)>0$$

的集合上m-a. e. 成立.

如果$m(S)<\infty$且$T\cdot 1=1$, 则取$p(s)=1$, 就得到(11).

证明 只需对$f\geqq 0$的情形证明本定理就可以了. 任取$\varepsilon>0$并考虑函数

$$g_n=T^n f-\varepsilon\cdot\sum_{j=0}^{n-1}T^j p,\quad g_0=f.$$

令$x_n(s)$是集合$\{s\in S; g_n(s)\geqq 0\}$的特征函数. 由于$x_n g_n=g_n^+=\max(g_n,0)$和$g_{n+1}+\varepsilon p=Tg_n$, 再利用$T$是正算子和$\|T\|\leqq 1$, 我们就得到

$$\int_S g_{n+1}^+\cdot m(ds)+\varepsilon\int_S x_{n+1}p\cdot m(ds)=\int_S x_{n+1}(g_{n+1}+\varepsilon p)m(ds)$$

$$=\int_S x_{n+1}Tg_n\cdot m(ds)\leqq\int_S x_{n+1}Tg_n^+\cdot m(ds)\leqq\int_S Tg_n^+\cdot m(ds)\leqq\int_S g_n^+\cdot m(ds).$$

把这些不等式从 $n=0$ 起求和，我们就得到

$$\int_S g_n^+\cdot m(ds)+\varepsilon\int_S p\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot m(ds)\leqq\int_S g_0^+\cdot m(ds),$$

从而

$$\int_S p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cdot m(ds)\leqq\varepsilon^{-1}\int_S g_0^+\cdot m(ds).$$

于是 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k(s)$ 在使 $p(s)>0$ 的集合上 m-a.e. 收敛．因此，对一切充分大的 n，$g_n(s)<0$ 必定在使 $p(s)>0$ 的集合上 m-a.e. 成立．

所以，我们就证明了对一切充分大的 n，$(T^nf)(s)<\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}(T^kp)(s)$ 在使 $p(s)>0$ 的集合上 m-a.e. 成立．由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以我们就证明了此定理．

至于条件(10)，我们给出取自 R. V. Chacon-D. S. Ornstein[1]的下述定理：

定理 4(R. V. Chacon-D. S. Ornstein)　设 T 是将实的 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 映入自己内的一个正线性算子并且其 L^1 范数 $\|T\|_1\leqq1$．如果 f 和 p 都是 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 中的函数且 $p(s)\geqq0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(T^kf)(s)\Big/\sum_{k=0}^{n}(T^kp)(s)\right\}\text{在使}\sum_{n=0}^{\infty}(T^np)(s)>0$$

的集合上是 m-a.e. 有限的．

如果 $m(S)<\infty$ 且 $T\cdot1=1$，则令 $p(s)=1$ 就可以得到(10)．

为了进行证明，我们需要一个

引理(Chacon-Ornstein[1])　如果 $f=f^++f^-$，又如果在集合 B 上有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=0}^{n}(T^kf)(s)>0$，则存在非负函数的序列 $\{d_k\}$ 和 $\{f_k\}$，使得对于每个 N 都有

$$\int_S\sum_{k=0}^{N}d_k\cdot m(ds)+\int_S f_N\cdot m(ds)\leqq\int_S f^+\cdot m(ds),\tag{15}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}d_k(s)=-f^-(s)\text{在}B\text{上成立},\tag{16}$$

$$T^Nf^+=\sum_{k=0}^{N}T^{N-k}d_k+f_N.\tag{17}$$

证明　归纳地规定

$$d_0=0,\quad f_0=f^+,$$

$$f_{i+1}=(Tf_i+f^-+d_0+\cdots+d_i)^+,\quad d_{i+1}=Tf_i-f_{i+1}.\tag{18}$$

我们指出

$$f^- + d_0 + \cdots + d_i \leqq 0, \tag{19}$$

并且(19)中的等式在使 $f_i(s) > 0$ 的集合上成立，这是因为

$$f_i = (Tf_{i-1} + f^- + d_0 + \cdots + d_{i-1})^+ = (Tf_{i-1} - f_i + f^- + d_0 + \cdots + d_{i-1} + f_i)^+$$
$$= (d_i + f^- + d_0 + \cdots + d_{i-1} + f_i)^+.$$

从(18)可得

$$T^j f^+ = \sum_{k=0}^{j} T^{j-k} d_k + f_i. \tag{20}$$

根据定义，f_i 是非负的，从而由(18)最后两个方程和(19)可知，d_i 也是非负的．由(20)可得到

$$\sum_{j=0}^{n} T^j f^+ = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} T^{j-k} d_k + \sum_{j=0}^{n} f_j. \tag{21}$$

其次，我们来证明

$$\sum_{j=0}^{n} T^j f^+ \leqq \sum_{j=0}^{n} d_j - \sum_{j=1}^{n} T^j f^- + \sum_{j=0}^{n} f_j. \tag{22}$$

为此目的，我们注意到，

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} T^{j-k} d_k = \sum_{j=0}^{n} T^j \left(\sum_{k=0}^{n-j} d_k \right),$$

并且，根据(19)和 T 是正算子，

$$-T^j f^- \geqq T^j \left(\sum_{k=0}^{n-j} d_k \right) \quad \text{对 } 1 \leqq j \leqq n \text{ 成立}. \tag{23}$$

改写(22)后，我们就得到

$$\sum_{j=0}^{n} T^j (f^+ + f^-) \leqq \sum_{j=0}^{n} (d_j + f_j) + f^-. \tag{24}$$

现在我们来证明

$$\sum_{j=0}^{n} d_j(s) + f^-(s) \geqq 0 \text{ 在 } B \text{ 上成立}. \tag{25}$$

利用(19)后面的说明，容易看出(25)中的等式在集合 $C = \{s \in S;\ 对某一个\ j \geqq 0\ 有\ f_j(s) > 0\}$ 上成立．剩下的就是要证明(25)在集合 $B-C$ 上成立．这可以用以下事实来证明，即由(24)式可导出在 B 上，特别是在 $B-C$ 上成立不等式

$$\sum_{j=0}^{\infty} (d_j + f_j)(s) + f^-(s) \geqq 0.$$

现在我们注意到(17)刚好就是(20)，并且(16)可由(19)和(25)导出来．为了看出(15)成立，我们指出，根据对 T 的假设和(18)式，有

$$\int_S \left(\sum_{k=0}^{j} d_k + f_j \right) m(ds) \geqq \int_S \left(\sum_{k=0}^{j} d_k + T \cdot f_j \right) m(ds) = \int_S \left(\sum_{k=0}^{j+1} d_k + f_{j+1} \right) m(ds).$$

因为 $d_0 + f_0 = f^+$，所以由上式对 j 使用归纳法就可以得出(15)式．

定理 4 的证明 只须对于在 S 上 $f(s)\geqq 0$ 这种情形来证明此定理就够了，并且只须证明，当 $p(s)>0$ 时，所指出的上极限是有限的. 第一点是显然的，而第二点可以证明如下. 假设在使 $p(s)>0$ 的点 s 处，所指出的上极限是有限的. 因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sum_{j=0}^{n}(T^{j+k}f)(s)\Big/\sum_{j=0}^{n}(T^{j+k}p)(s)\right\}\text{在使}$$

$$(T^k p)(s)>0\ \text{的集合上是}\ m\text{-a.e.}\ \text{有限的,}\tag{26}$$

而这就意味着 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sum\limits_{j=0}^{n}(T^j f)(s)\Big/\sum\limits_{j=0}^{n}(T^j p)(s)\right\}$ 在使 $(T^k p)(s)>0$ 的集合上是 m-a.e. 有限的.

现在假定我们要证明的结论不成立. 这时

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sum_{j=0}^{n}(T^j f)(s)\Big/\sum_{j=0}^{n}(T^j p)(s)\right\}$$

在某个具有正的 m-测度的集合 E 上是 m-a.e. 无限的，并且对于某个正的常数 β，在 E 上有 $p(s)>\beta>0$. 所以，对于任何一个正的常数 α，我们有

$$\sup_n\left\{\sum_{j=0}^{n}(T^j((f-\alpha p)^+ + (f-\alpha p)^-))(s)\right\}>0$$

在 E 上 m-a.e. 成立. 应用引理，并用 $(f-\alpha p)$ 来代替其中的 f，于是由(15)和(16)就得到

$$\int_S(f-\alpha p)^+ m(ds)\geqq\int_S\sum_{k=0}^{\infty}d_k m(ds)\geqq-\int_E(f-\alpha p)^- m(ds).$$

然而，最右边的积分随 $\alpha\uparrow\infty$ 而趋于 ∞，但最左边的积分当 $\alpha\uparrow\infty$ 时却是有界的. 这是一个矛盾，从而我们就证明了此定理.

因此，我们证明了

定理 5 设 T 是一个将 $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 映入自己内的正线性算子，并且其 L^1 范数 $\|T\|_1\leqq 1$. 如果 $m(S)<\infty$ 且 $T\cdot 1=1$，则对任一 $f\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$，序列 $\left\{n^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}T^j f\right\}$ 的平均收敛必导致它的 m-a.e. 收敛.

作为上述定理的一个推论，我们得到

定理 6 设 $P(t,x,E)$ 是测度空间 $(S,\mathfrak{B},m)$ 上的一个具有不变测度 m 的 Markov 过程，并且 $m(S)<\infty$. 则对于用 $(T_t f)(x)=\int_S P(t,x,dy)f(y)$ 定义的线性算子 T_t，我们有 i) 平均遍历定理：

$$\text{对于任一}\ f\in L^p(S,\mathfrak{B},m),\ s\text{-}\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^{n}T_k f=f^*$$

$$\text{在}\ L^p(S,\mathfrak{B},m)\ \text{内存在且}\ T_1 f^*=f^*\ \ (p=1,2),\tag{27}$$

以及 ii) 个别遍历定理：

对于任一 $f\in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$，这里 $p=1$ 或 $p=2$，

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_kf)(s)$ m-a. e. 存在且为有限值，

同时它 m-a. e. 等于 $f^*(s)$，此外还有

$$\int_S f(s)m(ds)=\int_S f^*(s)m(ds). \tag{28}$$

证明 由上一节的定理 2 可知，平均遍历定理(27)成立，从而可应用定理 5 得出(28).

注 如果 T_t 是一个由 S 到 S 上的同等测度变换 $x\to y_t(x)$，则 (27) 正好就是 J. von Neumann[3]的平均遍历定理，而(28)正好就是 G. D. Birkhoff[1]和 A. Khintchine[1]的个别遍历定理.

历史简况 最先把 Birkhoff-Khintchine那种类型的个别遍历定理推广到算子理论的人是 J. L. Doob[1]. 他在下述条件之下证明了 $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_kf)(x)$ 是 m-a. e. 收敛的，即 T_t 是由在测度空间 $(S, \mathfrak{B}, m)$ 上具有不变测度 m 的 Markov 过程 $P(t, x, E)$ 来定义的，其中 $m(S)=1$，而 f 是某个属于 $\mathfrak{B}$ 的集合的特征函数. S. Kakutani[6]指出，当 f 只是一个有界 $\mathfrak{B}$-可测函数时，仍可用 Doob 的方法得到同样的结果. 此后，E. Hopf[2]只假设了 f 是一个 m-可积的函数就证明了该定理. N. Dunford-J. Schwartz[4]对于下述线性算子 T_t 证明了(28)，从而推广了 Hopf的结果，那里，T_t 既不增大 L^1 范数也不增大 L^∞ 范数，他没有假设 T_t 是正算子而只假设了 $T_k=T_1^k$ 和 $T_1\cdot 1=1$. 需要指出，Hopf 和 Dunford-Schwartz 的论证用到了我们的定理 1 的想法. R. V. Chacon-D. S. Ornstein[1]对于 L^1 范数 ≤ 1 的正线性算子 T_t 证明了(28)，那里并没有假设 T_t 不增大 L^∞ 范数，而且也不涉及我们的定理 1. 当然，那里假设了 $T_k=T_1^k$ 和 $T\cdot 1=1$. 我们不再谈细节了，因为，为了阐述有关 Markov 过程的这一章的内容，以定理 6 作为遍历理论的基础就够了，而定理 6 是我们的定理 1 的一个推论.

§3. 遍历假设和 H 定理

设 $P(t, x, E)$ 是在测度空间 $(S, \mathfrak{B}, m)$ 上具有不变测度 m 的一个 Markov 过程，并且 $m(S)=1$. 我们用下述条件来定义过程 $P(t, x, E)$ 的遍历性：

对于每一个 $f\in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ $(p=1, 2)$，

时间平均 $f^*(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_kf)(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_S P(k, x, dy)f(y)$

$=$空间平均 $\int_S f(x)m(dx)$ m-a. e. 成立. (1)

因为 $\int_S f^*(x)m(dx)=\int_S f(x)m(dx)$，所以(1)可以改写为

对于每一个 $f\in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ $(p=1, 2)$，

$f^*(x)=$ 常数 m-a. e. 成立， (1′)

对于遍历假设(1)和(1′)，我们将给出三种不同的解释.

1. 设 $\chi_B(x)$是集合 $B\in\mathfrak{B}$ 的特征函数. 则对于任何两个集合 $B_1, B_2\in\mathfrak{B}$, B_1 内的诸点经过 k 个单位时间后，进入集合 B_2 的概率的时间平均等于乘积 $m(B_1)m(B_2)$. 即是说，我们有

$$(\chi^*_{B_2}, \chi_{B_1}) = m(B_1)m(B_2). \tag{2}$$

证明 如果 $f, g\in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$，则由(1′)式，从 $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$内的强收敛 $n^{-1}\sum_{k=1}^{n}T_kf\to f^*$ 可以得出

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(T_kf, g) = (f^*, g) = f^*(x)\int_S g(x)m(dx)$$

$$= \int_S f(x)m(dx)\cdot\int_S g(x)m(dx) \text{对 } xm\text{-a. e. 成立.}$$

选取 $f(x)=\chi_{B_2}(x)$, $g(x)=\chi_{B_1}(x)$，我们就得到(2).

注 因为，对于 $p=1$ 和 $p=2$，特征函数 $\chi_B(x)$的线性组合在空间 $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$是稠密的，所以容易看出(2)等价于遍历假设(1′). (2)说的是，S 的每个部分，在时间平均意义下，均匀地进入 S 的每个部分.

2. 第八章§3的平均遍历定理说的是，映射 $f\to T^*f=f^*$ 给出了 T_1 的对应于 T_1 的本征值 1 的本征空间；此本征空间由值域 $R(T^*)$给出. 于是遍历假设(1′)刚好就是这种假设，即 $R(T^*)$ 是一维的. 因此，$P(t, x, E)$的遍历假设可以用算子 T_1 的谱来解释.

3. Markov 过程$P(t, x, E)$ 叫做度量可递的或不可分解的，如果以下条件成立：

$$S \text{ 不可能分解为这样不相交的集合 } B_1, B_2\in\mathfrak{B}\text{之和，使得 } m(B_1)>0, m(B_2)>0$$
$$\text{且对于每个 } x\in B_i, E\subseteq B_j \text{ 而 } i\neq j \text{ 都有 } P(1, x, E)=0. \tag{3}$$

证明 假定$P(t, x, E)$是遍历的且 S 可按(3)分解. 于是特征函数 $\chi_{B_1}(x)$根据下述条件满足$T_1\chi_{B_1}=\chi_{B_1}$：

$$\int_S P(1, x, dy)\chi_{B_1}(y) = P(1, x, B_1) = 1 = \chi_{B_1}(x), \text{对于 } x\in B_1, =0=\chi_{B_1}(x), \text{ 对于 } x\overline{\in} B_1.$$

然而，由于 $m(B_1)m(B_2)>0$，所以函数 $\chi_{B_1}(x)=\chi^*_{B_1}(x)$不可能 m-a. e. 等于一个常数.

其次，假定过程 $P(t, x, E)$是不可分解的. 令 $T_1f=f$，而我们要来证明 $f^*(x)=f(x)m$-a. e. 等于一个常数. 因为 T_1 把实值函数映射为实值函数，所以我们可以认为函数$f(x)$是实值的. 如果 $f(x)$不 m-a. e. 等于一个常数，则存在某个常数 α 使得集合

$$B_1=\{s\in S; f(s)>\alpha\}\text{和 } B_2=\{s\in S; f(s)\leq\alpha\}$$

都是 m-测度>0 的. 因为 $T_1(f-\alpha)=f-\alpha$，所以，由后面第二段关于角变量的讨论可知，

$$T_1(f-\alpha)^+=(f-\alpha)^+,\quad T_1(f-\alpha)^-=(f-\alpha)^-.$$

因此，如果 $x\in B_i$, $E\subseteq B_j(i\neq j)$，我们就得到 $P(1, x, E)=0$.

注 度量可递性概念是由 G. D. Birkhoff-P. A. Smith[2]针对 S 到 S 上的同等测度变换 $x\to y_t(x)$的情形而引入的.

遍历的同等测度变换的一个例子 设S是一个环形区域. 即是说, S是实数x, y的所有这样由实数对$s=\{x, y\}$组成的集合, 其元素$s=\{x, y\}$和$s'=\{x', y'\}$是等同的, 当且仅当$x\equiv x'$ (mod1)和$y\equiv y'$(mod1); 用s的坐标x, y的实数拓扑赋予S以拓扑. 我们考虑S到S上的映射

$$s=\{x, y\}\longrightarrow T_t s=s_t=\{x+t\alpha, y+t\beta\},$$

它使S上的测度$dxdy$保持不变. 这里, 我们要假设实数α, β, 在下述意义下关于 mod 1 是整系数线性无关的: 如果整数n, k满足$n\alpha+k\beta\equiv 0$(mod1), 则$n=k=0$. 这时, 映射$s\rightarrow T_t s$就是遍历的.

证明 设$f(s)\in L^2(S)$关于T_1是不变的, 即是说, 设$f(s)=f(s_1)$在S上$dxdy$-a. e. 成立. 我们需要证明$f(s)=f^*(s)=$常数, 在S上$dxdy$-a. e. 成立. 我们来考察$f(s)$和$f(s_1)=f(T_1 s)$各自的 Fourier 系数:

$$\int_0^1\int_0^1 f(s)\exp(-2\pi i(k_1x+k_2y))\,dxdy,$$

$$\int_0^1\int_0^1 f(T_1 s)\exp(-2\pi i(k_1x+k_2y))\,dxdy.$$

由$T_1 s=\{x+\alpha, y+\beta\}$以及测度$dxdy$对于映射$s\rightarrow T_1 s$的不变性可知, 后一个积分等于

$$\int_0^1\int_0^1 f(s)\exp(-2\pi i(k_1x+k_2y))\exp(2\pi i(k_1\alpha+k_2\beta))\,dxdy.$$

于是, 根据对应于$f(s)$和$f(T_1 s)$的 Fourier 系数的唯一性, 就必定有

$$当\int_0^1\int_0^1 f(s)\exp(-2\pi i(k_1x+k_2y))\,dxdy\neq 0 时, \quad \exp(2\pi i(k_1\alpha+k_2\beta))=1.$$

因此, 由关于α, β的假设可知,

$$当\ k_1^2+k_2^2\neq 0 时, \quad \int_0^1\int_0^1 f(s)\exp(-2\pi i(k_1x+k_2y))\,dxdy=0.$$

所以, $f(s)=f^*(s)$必定$dxdy$-a. e. 等于一个常数.

角变量 设T_t是用在$(S, \mathfrak{B}, m)$上具有不变测度m的 Markov 过程$P(t, x, E)$来定义的, 并且$m(S)=1$. 设$f(s)\in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$是$T_1$的对应于$T_1$的绝对值为 1 的本征值$\lambda$的本征向量, 亦即

$$T_1 f=\lambda f, \quad |\lambda|=1.$$

于是有$T_1|f|=|f|$. 这是因为, 由于算子T_1是正的, 所以$(T_1|f|)(x)\geqq|(T_1f)(x)|=|f(x)|$, 即是说, $\int_S P(1, x, dy)|f(y)|\geqq|f(x)|$. 在这个不等式中, 其等式必定对$xm$-a. e. 成立, 这可以通过对不等式的两端关于$m(dx)$求积分并注意到测度m的不变性看出来. 因此, 如果$P(t, x, E)$是遍历的, 则$|f(x)|$必定m-a. e. 等于一个常数. 所以, 如果我们令

$$f(x)=|f(x)|\exp(i\Theta(x)), \quad 0\leqq\Theta(x)<2\pi,$$

则必定有

$$T_1\exp(i\Theta(x))=\lambda\exp(i\Theta(x)).$$

在$\lambda\neq 1$的情形, 这样的$\Theta(x)$就称为遍历的 Markov 过程$P(t, x, E)$的一个角变量.

混合假设 设 T_t 是用在 $(S, \mathfrak{B}, m)$ 上具有不变测度 m 的 Markov 过程 $P(t, x, E)$ 来定义的，并且 $m(S)=1$. 比 $P(t, x, E)$ 的遍历假设更强的一个条件是

$$\lim_{k\to\infty}(T_k f, g)=(f^*, g)=\int_S f(x)m(dx)\cdot\int_S g(x)m(dx)$$

对 $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ 中的每个向量对 (f, g) 成立. (4)

此条件称为 Markov 过程 $P(t, x, E)$ 的混合假设. 同遍历假设一样，对它可作如下解释：S 的每一部分都终归会均匀地进入 S 的每一部分. 至于混合同等测度变换 $x\to y_t(x)$ 的例子，我们建议读者去看前面引用过的 E. Hopf 的书.

H-定理 设 $P(t, x, E)$ 是在 $(S, \mathfrak{B}, m)$ 上具有不变测度 m 的一个 Markov 过程，并且 $m(S)=1$. 考虑函数

$$H(z)=-z\log z, \ z\geqq 0. \tag{5}$$

我们可以证明

定理(K. Yosida(17)) 设非负函数 $f(x)\in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 属于 Zygmund 类，即是说，我们假设 $\int_S f(x)\log^+ f(x)m(dx)<\infty$，这里，对应于 $|z|\geqq 1$ 或 $|z|<1$ 而有 $\log^+|z|=\log|z|$ 或 $=0$. 则

$$\int_S H(f(x))m(dx)\leqq\int_S H((T_t f)(x))m(dx). \tag{6}$$

证明 因为，当 $z>0$ 时，$H(z)=-z\log z$ 满足 $H''(z)=-1/z<0$，所以 $H(z)$ 是凹函数. 于是得到

$H(f(x))$ 的加权平均 $\leqq H(f(x)$ 的加权平均$)$,

从而有

$$\int_S P(t, x, dy)H(f(y))\leqq H\left(\int_S P(t, x, dy)f(y)\right).$$

两端关于 $m(dx)$ 积分，并注意到测度 $m(E)$ 的不变性，我们就得到(6).

注 利用半群的性质 $T_{t+s}=T_tT_s$ 以及(6)，容易得到

$$\int_S H((T_{t_1}f)(x))m(dx)\leqq\int_S H((T_{t_2}f)(x))m(dx) \text{ 当 } t_1<t_2 \text{ 时成立.} \tag{6'}$$

可以把(6′)看作类似于统计力学中经典的 H-定理的一个定理.

§4. 具有局部紧的相空间的 Markov 过程的遍历分解

设 S 是一个可分度量空间，它的有界闭集都是紧的. 设 $\mathfrak{B}$ 是 S 的所有 Baire 子集的集合，并考虑 $(S, \mathfrak{B})$ 上的一个 Markov 过程 $P(t, x, E)$. 我们假设

$$f(x)\in C_0^0(S) \text{ 能导致 } f_t(x)=\int_S P(t, x, dy)f(y)\in C_0^0(S). \tag{1}$$

本节的目的是把 S 分解为遍历部分和耗散部分，它可以看作在紧的度量空间 S 中的确定性的、可逆的转移过程的 Krylov-Bogolioubov 情形(见N. Krylov-N. Bogolioubov[1])的一种推广. 关于这种推广的可能性，K. Yosida(17) 曾谈到过 S 是一个紧的度量空间并且满足条件(1)的情

形，而这个想法由 N. Beboutov[1]独立于 Yosida 实现了. K. Yosida[19]则对于局部紧空间 S 的情形作出了这种推广. 我们按照最后指出的这篇论文来讲述.

引理 1 设 $C_0^0(S)$ 是一个赋范线性空间，其范数为极大值范数 $\|f\|=\sup\limits_{x\in S}|f(x)|$. 再设 $L(f)$ 是 $C_0^0(S)$ 上的一个非负线性泛函，就是说，如果在 S 上 $f(x)\geqq 0$，则 $L(f)\geqq 0$. 于是，存在一个唯一确定的正则测度 $\varphi(E)$，它是 σ-可加的，同时对 S 的 Baire 子集 E 是 $\geqq 0$ 的，并且 $L(f)$ 可以用 $\varphi(E)$ 表示如下：

$$L(f)=\int_S f(x)\varphi(dx) \quad \text{对一切 } f\in C_0^0(S) \text{ 成立.} \tag{2}$$

这里，测度 φ 的正则性指的是

$$\varphi(E)=\inf \varphi(G) \text{ 而 } G \text{ 遍取一切开集} \supseteqq E. \tag{3}$$

证明 读者可以参看 P. R. Halmos[1].

设 $\varphi(E)$ 是定义在 $\mathfrak{B}$ 上且满足 $\varphi(S)\leqq 1$ 的非负、σ-可加的正则测度. 如果

$$\varphi(E)=\int_S \varphi(dx)P(t,x,E) \text{ 对所有的 } t>0 \text{ 和 } E\in\mathfrak{B} \text{ 都成立,} \tag{4}$$

则我们把 $\varphi(E)$ 叫做 Markov 过程的一个不变测度. 这时，我们有

引理 2 对任一 $f\in C_0^0(S)$ 和任一不变测度 $\varphi(E)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=f^*(x)\left(f_k(x)=\int_S P(k,x,dy)f(y)\right)\varphi\text{-a. e. 存在,} \tag{5}$$

并且

$$\int_S f^*(x)\varphi(dx)=\int_S f(x)\varphi(dx). \tag{6}$$

这刚好是 §2 定理 6 的一个推论.

现在，令 ${}_1f, {}_2f, {}_3f, \cdots$ 在赋范线性空间 $C_0^0(S)$ 内是稠密的. 由对于空间 S 所作的假设可以肯定这种序列是存在的. 把引理 2 应用到 ${}_1f, {}_2f, {}_3f, \cdots$ 并把 φ-测度为零的例外集合加起来，于是我们知道，存在 φ-测度为零的集合 N，它具有性质：

$$\text{对任何一个 } x\overline{\in} N \text{ 和任何一个 } f\in C_0^0(S),$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=f^*(x) \text{ 总是存在的.} \tag{7}$$

一个 Baire 集 $S'\subseteqq S$ 叫做极大概率的，如果 $\varphi(S-S')=0$ 对每一个不变测度 φ 都成立. 因此，使 $f^*(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ 对每一个 $f\in C_0^0(S)$ 都存在的那些 x 的全体所成的集合 S' 就是极大概率的. 于是，如果存在一个满足 $\varphi(S)>0$ 的不变测度，则存在一个 $g\in C_0^0(S)$ 和一个点 x_0 使得

$$g^{**}(x_0)=\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} g_k(x_0)>0. \tag{8}$$

这是因为，不然的话，我们就有 $f^*(x)=0$ 在 S 上对所有的 $f\in C_0^0(S)$ 都成立，从而由(6)可知

$$\int_S f(x)\varphi(dx)=0.$$

反之，设(8)对某个 $g\in C_0^0(S)$ 和某个点 x_0 成立．设$\{n'\}$是从自然数中如此选出来的一个子序列，它使得 $\lim\limits_{n'\to\infty}(n')^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n'}g_k(x_0)=g^{**}(x_0)$．利用对角线法，我们可以选出$\{n'\}$的一个子序列$\{n''\}$使得 $\lim\limits_{n''\to\infty}(n'')^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n''}({}_jf)_k(x_0)$对于 $j=1,2,\cdots$都存在．根据$\{{}_jf\}$在 $C_0^0(S)$中的稠密性，我们容易看出

$\lim\limits_{n''\to\infty}(n'')^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n''}f_k(x_0)=f^{***}(x_0)$ 对每一个 $f\in C_0^0(S)$ 都存在．如果我们记 $f^{***}(x_0)=L_{x_0}(f)$，则

$$L_{x_0}(f)=L_{x_0}(f_1). \tag{9}$$

这是因为，由条件(1)可知 $f_1\in C_0^0(S)$，从而

$$L_{x_0}(f)=\lim_{n''\to\infty}(n'')^{-1}\sum_{k=1}^{n''}f_{k+1}(x_0)=f_1^{***}(x_0)=L_{x_0}(f_1).$$

由引理 1 可知，存在一个正则测度 $\varphi_{x_0}(E)$使得

$$L_{x_0}(f)=f^{***}(x_0)=\int_S f(x)\varphi_{x_0}(dx). \tag{10}$$

当然，我们有

$$0\leqq\varphi_{x_0}(E)\leqq 1, \tag{11}$$

并且由(9)可得

$$\int_S f(x)\varphi_{x_0}(dx)=\int_S\left(\int_S P(1,x,dy)f(y)\right)\varphi_{x_0}(dx).$$

让 $f(x)$趋于 Baire 集 E 的特征函数，我们就可以看出 $\varphi_{x_0}(E)$是一个不变测度．因为 $\varphi_{x_0}(S)>0$，所以由(8)和(10)可得 $L_{x_0}(g)=g^{***}(x_0)=\int_S g(x)\varphi_{x_0}(dx)>0$．因此，我们就证明了

定理 1 非平凡的不变测度不存在的一个充分而又必要的条件是

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=f^*(x)=0 \text{ 在 } S \text{ 上对任何一个 } f\in C_0^0(S)\text{都成立}. \tag{12}$$

定义 如果$(S,\mathfrak{B})$上的过程 $P(t,x,E)$满足条件(12)，则此过程就叫做**耗散的**．

例 设 S 是半直线$(0,\ \infty)$而$\mathfrak{B}$是$(0,\ \infty)$的一切 Baire 集所成的集合．则由下式所定义的 Markov 过程 $P(t,x,E)$是耗散的，即

$$P(t,x,E)=1,\quad \text{当}(x+t)\in E\text{ 时，而}$$
$$P(t,x,E)=0,\quad \text{当}(x+t)\overline{\in}E\text{ 时}.$$

我们假设 $P(t,x,E)$不是耗散的．再设 D 表示集合

$$\left\{x\in S;\ f^*(x)=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=0 \text{ 对一切 } f\in C_0^0(S)\text{ 都成立}\right\}.$$

由于它等于

$$\{x\in S;\ ({}_jf)^*(x)=0 \text{ 对 } j=1,2,\cdots \text{ 成立}\},$$

所以D是一个 Baire 集．我们把D叫做S的**耗散部分**．下面，我们可以证明对任何不变测度φ都有$\varphi(D)=0$．因为假设了过程$P(t,x,E)$是非耗散的，所以$S_0=S-D$是非空的．我们已经知道，存在一个 Baire 集$S_1\subseteqq S_0$，它具有性质：

对任何一个$x\in S_1$都对应着一个非平凡的不变测度$\varphi_x(E)$使得

$$f^*(x)=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\int_S f(z)\varphi_x(dz) \tag{13}$$

且对任何不变测度φ都有$\varphi(S_0-S_1)=0$

对于任何不变测度φ，我们都有(6)，从而由(13)可得

$$\int_S f(y)\varphi(dy)=\int_{S_1}\left(\int_S f(z)\varphi_y(dz)\right)\varphi(dy).$$

因此，我们得到

$$\varphi(E)=\int_{S_1}\varphi_y(E)\varphi(dy), \tag{14}$$

从而我们就证明了

定理 2 任何一个不变测度φ都是以y作参数的不变测度$\varphi_y(E)$的凸组合．

从(11)和(14)，可以看出集合

$$S_2=\{x\in S;\ x\in S_1,\ \ \varphi_x(S_1)=1\}$$

是极大概率集．所以S_0是极大概率集．

对任一$f\in C_0^0(S)$和任一不变测度φ，我们有

$$\int_{S_2}\varphi(dx)\left(\int_{S_2}(f^*(y)-f^*(x))^2\varphi_x(dy)\right)=0, \tag{15}$$

这是因为，根据(13)、(14)、(6)以及S_2的定义，上式左端等于

$$\int_{S_2}\varphi(dx)\left(\int_{S_2}f^*(y)^2\varphi_x(dy)\right)-2\int_{S_2}f^*(x)\varphi(dx)\left(\int_{S_2}f^*(y)\varphi_x(dy)\right)$$
$$+\int_{S_2}f^*(x)^2\varphi(dx)\cdot\int_{S_2}\varphi_x(dy)$$
$$=\int_{S_2}f^*(y)^2\varphi(dy)-2\int_{S_2}f^*(x)^2\varphi(dx)+\int_{S_2}f^*(x)^2\varphi(dx).$$

把(15)应用于${}_1f,{}_2f,{}_3f,\cdots$，我们看见集合

$$S_3=\{x\in S_2;\ \int_{S_2}(f^*(y)-f^*(x))^2\varphi_x(dy)=0 \ \text{ 对一切 } f\in C_0^0(S) \text{ 成立}\}$$

是极大概率集．

我们来作S的**遍历分解**．对任何一个$x\in S_3$，令

$$E_x=\{y\in S_3;\ f^*(y)=f^*(x) \ \text{ 对一切 } f\in C_0^0(S) \text{ 成立}\}. \tag{16}$$

于是我们可以证明，每一个 E_x 都包含有一个具有下述性质的集合 $\hat{E}_x$:

$$\varphi_x(E_x)=\varphi_x(\hat{E}_x) \text{ 和 } P(1,y,\hat{E}_x)=1 \quad \text{对任何 } y\in\hat{E}_x \text{ 成立.} \tag{17}$$

证明 由 S_3 的定义可知，如果测度 $\varphi_x(E)$ 在点 y 有变差，则 $f^*(y)=f^*(x)$. 于是 $\varphi_x(E_x)=\varphi_x(S_3)=1$. 因此，由测度 φ_x 的不变性可得

$$1=\varphi_x(E_x)=\int_{S_3}P(1,z,E_x)\varphi_x(dz)=\int_{E_x}P(1,z,E_x)\varphi_x(dz).$$

因为 $0\leqq P(1,z,E_x)\leqq 1$, 所以存在一个 Baire 集 $E^1\subseteqq E_x$ 使得

$$\varphi_x(E^1)=\varphi_x(E_x) \text{ 和 } z\in E^1 \text{ 必导致 } P(1,z,E_x)=1.$$

令

$$E^2=\{z\in E^1,\ P(1,z,E^1)=1\}.$$

因为

$$\int_{E^1}P(1,z,E^1)\varphi_x(dz)=\varphi_x(E^1)=\varphi_x(E_x)=\int_{E^1}P(1,z,E_x)\varphi_x(dz),$$

所以必定有

$$\int_{E^1}(P(1,z,E_x)-P(1,z,E^1))\varphi_x(dz)=0.$$

当 $z\in E^2$ 时，由 E^2 的定义可知 $P(1,z,E^1)=1$, 于是我们就得到 $\varphi_x(E^1-E^2)=0$.

其次，令

$$E^3=\{z\in E^2;\ P(1,z,E^2)=1\}.$$

则仿上述讨论可得 $\varphi_x(E^3)=\varphi_x(E_x)$. 继续作下去，我们就得到一个序列 $\{E^n\}$ 使得

$$E_x\supseteqq E^1\supseteqq E^2\supseteqq\cdots,\quad \varphi_x(E^n)=\varphi_x(E_x) \text{ 以及}$$

$$\text{当 } z\in E^{n+k} \text{ 时}, P(1,z,E^n)=1\quad (n\geqq 0, k\geqq 1, E^0=E_x),$$

因此，我们就得到了具有所需要的性质的集合 $\hat{E}_x=\bigcap_{n=1}^{\infty}E^n$.

所以，我们有

定理 3 $P(t,y,E)$ 在每一个 $\hat{E}_x$ 内都定义了一个Markov过程. 这里的 $\hat{E}_x$ 是在下述意义下遍历的，即

$$\begin{cases} \hat{E}_x \text{ 不可能分解为这样的两个部分 } A \\ \text{和 } B \text{ 使得，对于某个不变测度 } \varphi, \\ \varphi(A)\cdot\varphi(B)>0, \text{ 并且当 } a\in A \text{ 时}, \\ P(1,a,B)=0 \text{ 而当 } b\in B \text{ 时}, P(1,b,A) \\ =0. \end{cases} \tag{18}$$

证明 设 φ 是 $\hat{E}_x$ 中的任何一个满足 $\varphi(\hat{E}_x)=1$ 的不变测度. 则由(14)可知当 $E\subseteqq\hat{E}_x$ 时，$\varphi(E)=\int_{\hat{E}_x}\varphi(dz)\varphi_z(E)$. 因为对每一个 $z\in\hat{E}_x$ 都有 $\varphi_z(E)=\varphi_x(E)$, 所以，根据 $\hat{E}_x$ 的定义，我们有

$$\varphi(E)=\varphi_x(E)\int_{\hat{E}_x}\varphi(dz)=\varphi_x(E).$$

因此,在$\hat{E}_x$内实质上只有唯一的一个不变测度$\varphi_x(E)$. 这就证明了$\hat{E}_x$的遍历性.这是因为,设$\hat{E}_x$可以按(18)分解. 则由φ的不变性可知

$$\text{当 } C\subseteqq\hat{E}_x\text{时},\quad \varphi(C)=\int_{\hat{E}_x}P(1,z,C)\varphi(dz).$$

因此，由

$$\psi(C)=\varphi(C)/\varphi(A),\text{当 } C\subseteqq A\text{ 时},$$
$$\qquad\qquad =0,\ \text{当 } C\subseteqq B\text{ 时}$$

所定义的测度$\psi(C)$在$\hat{E}_x$中是不变的,并且ψ异于唯一不变测度φ.

§5. 齐次黎曼空间上的布朗运动

Markov 过程与微分方程之间有一个很有意义的相互联系. 在三十年代初期，A. Kolmogorov 对于在某种正则性假设之下的转移概率$P(t,x,E)$证明了

$$u(t,x)=\int_S P(t,x,dy)f(y)$$

满足扩散型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=b^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+a^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}=Au,\ t>0, \tag{1}$$

这里，微分算子A在相空间S的点x的局部坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$之下是椭圆算子. 这里沿用了Einstein规定的张量记号,例如,$a^i(x)\partial/\partial x_i$就表示$\sum\limits_{i=1}^{n}a^i(x)\partial/\partial x_i$. 至于方程(1)的导出，见 A. Kolmogorov[1]. 他研究的主题是要弄清楚 Markov 过程的局部性质.

遵循 F. Hille 1949 年在斯堪的纳维亚大会上所作的报告(参看 E. Hille[9])以及K. Yosida 1948 年写成的文章[29], W. Feller[2]于 1952 年开始，用半群的分析理论对概率论的这个新领域进行了系统的研究. 把 W. Feller 的研究工作进一步发展起来的人有 E. B. Dynkin[1], [2]、K. Itô-H. McKean[1]、D. Ray[1]、G. A. Hunt[1]、A. A. Yushkevitch[1]、G. Maruyama[1]以及许多年轻的学者,特别是日本、苏联和美国的学者们. 这些研究工作统称为扩散理论. 参看 K. Itô-H. McKean[1]这本关于扩散理论的专著.我们来简略地介绍一下该理论的某些突出的、分析方面的特点.

设S是一个局部紧空间，而$\mathfrak{B}$是S中的 Baire 集的全体. 为了定义空间S上的 Markov 过程$P(t,x,E)$的空齐性概念,我们假定S是一个n维的、可定向的、连通的C^∞黎曼空间，使得S的等距变换所成的完全群$\mathfrak{G}$(它是一个 Lie 群)在S上是可递的群. 即是说，对于S的每一对点$\{x,y\}$,总存在一个等距变换$M\in\mathfrak{G}$使得$M\cdot x=y$. 这时,如果

$$P(t,x,E)=P(t,M\cdot x,M\cdot E)\text{对每个 } x\in S,E\in\mathfrak{B}\text{ 和 } M\in\mathfrak{G}\text{ 都成立}, \tag{2}$$

则称此过程$P(t,x,E)$为空齐的.

S 上的一个既是时齐的又是空齐的 Markov 过程称为 S 上的一个布朗运动，如果它满足下述的条件，即所谓的 Lindeberg 型的连续性条件：

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1} \int_{\mathrm{dis}(x,y)>\varepsilon} P(t,x,dy)=0 \text{ 对每个 } \varepsilon>0 \text{ 和 } x\in S \text{ 都成立.} \tag{3}$$

命题. 设 $C(S)$ 是 S 上一切有界且一致连续的实函数 $f(x)$ 所成的 B-空间，并且 $f(x)$ 的范数为 $\|f\|=\sup_x|f(x)|$. 规定

$$\begin{cases}(T_tf)(x)=\int_S P(t,x,dy)f(y), \text{ 当 } t>0 \text{ 时,}\\ \qquad\quad =f(x), \text{ 当 } t=0 \text{ 时.}\end{cases} \tag{4}$$

则 $\{T_t\}$ 构成 $C(S)$ 中的一个 (C_0) 类的收缩半群.

证明. 由于 $P(t,x,E)\geqq 0$ 和 $P(t,x,S)=1$，所以我们得到

$$|(T_tf)(x)|\leqq \sup_y|f(y)|$$

以及算子 T_t 的正性. 半群性质 $T_{t+s}=T_tT_s$ 可以从 Chapman-Kolmogorov 方程得出来. 如果我们用下式来定义一个线性算子 M'，即 $(M'f)(x)=f(M\cdot x)$，$M\in\mathfrak{G}$，则我们就得到

$$T_tM'=M'T_t, \quad t\geqq 0. \tag{5}$$

这是因为

$$\begin{aligned}(M'T_tf)(x)=(T_tf)(M\cdot x)&=\int_S P(t,M\cdot x,dy)f(y)=\int_S P(t,M\cdot x,d(M\cdot y))f(M\cdot y)\\ &=\int_S P(t,x,dy)f(M\cdot y)=(T_tM'f)(x).\end{aligned}$$

如果 $M\in\mathfrak{G}$ 且使得 $M\cdot x=x'$，则我们有

$$(T_tf)(x)-(T_tf)(x')=(T_tf)(x)-(M'T_tf)(x)=T_t(f-M'f)(x).$$

于是由 $f(x)$ 的一致连续性可知，$(T_tf)(x)$ 是一致连续的和有界的.

为了证明 T_t 对 t 的强连续性，根据第九章 § 1 的定理，只须证明 T_t 在 $t=0$ 处的弱右连续性就够了. 所以，只要证明了 $\lim_{t\downarrow 0}(T_tf)(x)=f(x)$ 对 x 一致成立就足够了. 因为

$$\begin{aligned}|(T_tf)(x)-f(x)|&=\left|\int_S P(t,x,dy)[f(y)-f(x)]\right|\\ &\leqq\left|\int_{d(x,y)\leqq\varepsilon} P(t,x,dy)[f(y)-f(x)]\right|+\left|\int_{d(x,y)>\varepsilon} P(t,x,dy)[f(y)-f(x)]\right|\\ &\leqq\left|\int_{d(x,y)\leqq\varepsilon} P(t,x,dy)[f(y)-f(x)]\right|+2\|f\|\int_{d(x,y)>\varepsilon} P(t,x,dy).\end{aligned}$$

右端第一项当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，对 x 一致趋于零，而对于固定的 $\varepsilon>0$，右端第二项当 $t\downarrow 0$ 时，对 x 一致趋于零. 后一事实可以由(3)和空齐性得出来. 因此，$\lim_{t\downarrow 0}(T_tf)(x)=f(x)$ 对 x 一致成立.

定理 设 x_0 是 S 的一个固定点. 再假设合痕群 $\mathfrak{G}_0=\{M\in\mathfrak{G}; M\cdot x_0=x_0\}$ 是紧的. 因为 $\mathfrak{G}_0$ 是 Lie 群 $\mathfrak{G}$ 的一个闭子群，所以由 E. Cartan 定理可知 $\mathfrak{G}_0$ 也是一个 Lie 群. 设 A 是半群 T_t 的无穷

小生成元. 则我们有以下结果:

[1] 如果 $f\in D(A)\cap C^2(S)$, 则对于 x_0 处的坐标系 $(x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n)$, 有

$$(Af)(x_0)=a^i(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0^i}+b^{ij}(x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i\partial x_0^j}, \tag{6}$$

其中,

$$a^i(x_0)=\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int_{d(x_0,x)\leq e}(x^i-x_0^i)P(t,x_0,dx), \tag{7}$$

$$b^{ij}(x_0)=\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int_{d(x_0,x)\leq e}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)P(t,x_0,dx), \tag{8}$$

此二极限存在且与充分小的 $e>0$ 无关.

[2] 集合 $D(A)\cap C^2(S)$ 在这种意义下是"大的", 即对于任何一个具有紧支集的 $C^\infty(S)$ 函数 $h(x)$, 总存在一个 $f(x)\in D(A)\cap C^2(S)$ 使得 $f(x_0)$、$\partial f/\partial x_0^i$、$\partial^2 f/\partial x_0^i\partial x_0^j$ 分别任意地靠近 $h(x_0)$、$\partial h/\partial x_0^i$、$\partial^2 h/\partial x_0^i\partial x_0^j$.

证明 第一步. 设 $h(x)$ 是一个具有紧支集的 C^∞ 函数. 如果 $f\in D(A)$, 则"卷积"

$$(f\otimes h)(x)=\int_{\mathfrak{G}}f(M_y\cdot x)h(M_y\cdot x_0)dy \tag{9}$$

(M_y 表示 $\mathfrak{G}$ 的一个一般元素而 dy 表示 $\mathfrak{G}$ 上的一个固定的右不变 Haar 测度使得对每个 $M\in\mathfrak{G}$ 都有 $dy=d(y\cdot M)$) 是 C^∞ 函数且属于 $D(A)$. 上述积分是存在的, 这是因为合痕群 $\mathfrak{G}_0$ 是紧的以及 h 有一个紧支集. 利用 f 的一致连续性和 h 的支集的紧性, 我们就可以利用 Riemann 和 $\sum_{i=1}^{k}f(M_{y_i}\cdot x)C_i$ 对 x 一致地逼近积分(9):

$$(f\otimes h)(x)=s\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}f(M_{y_i}\cdot x)C_i.$$

因为 $T_tM'=M'T_t$, 所以 M' 可以同 A 交换, 亦即, 如果 $f\in D(A)$, 则 $M'f\in D(A)$ 且 $AM'f=M'Af$. 令 $g(x)=(Af)(x)$, 于是我们就得到 $g\in C(S)$ 和

$$A\left(\sum_{i=1}^{k}f(M_{y_i}\cdot x)C_i\right)=\sum_{i=1}^{k}(AM'_{y_i}\cdot f)(x)C_i=\sum_{i=1}^{k}(M'_{y_i}Af)(x)C_i$$

$$=\sum_{i=1}^{k}g(M_{y_i}\cdot x)C_i,$$

而此式的右端是趋于 $(g\otimes h)(x)=(Af\otimes h)(x)$ 的. 因为无穷小生成元 A 是闭的, 所以 $f\otimes h\in D(A)$ 且 $A(f\otimes h)=Af\otimes h$. 因为 S 是 Lie 群 $\mathfrak{G}$ 的一个齐性空间, 亦即, $S=\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, 所以我们可以找到 x_0 的一个坐标邻域 U, 使得对于每个 $x\in U$ 都存在一个满足以下条件的元素

$$M=M(x)\in\mathfrak{G}:$$

i) $M(x)\cdot x=x_0$,

ii) $M(x)\cdot x_0$ 解析地依赖于点 $x\in S$ 的坐标 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$.

之所以如此, 是因为集合 $\{M_y\in\mathfrak{G}; M_y\cdot x=x_0\}$ 构成了 $\mathfrak{G}$ 的一个解析子流形; 它是 $\mathfrak{G}$ 关于 Lie

子群 $\mathfrak{G}_0$ 的一个傍系. 因此, 根据 dy 的右不变性, 我们有

$$(f\otimes h)(x)=\int_{\mathfrak{G}}f(M_yM(x)x)h(M_yM(x)x_0)dy=\int_{\mathfrak{G}}f(M_y\cdot x_0)h(M_yM(x)\cdot x_0)dy.$$

其右端在 x_0 附近是无穷可微的, 并且

$$D_x^s(f\otimes h)(x)=\int_{\mathfrak{G}}f(M_y\cdot x_0)D_x^s h(M_yM(x)\cdot x_0)dy. \tag{10}$$

第二步 注意到 $D(A)$ 在 $C(S)$ 内是稠密的并适当地选取 f 和 h 之后, 我们就得到:

存在 C^∞ 函数 $F^1(x), F^2(x), \cdots, F^n(x)\in D(A)$ 使得

$$\text{在 } x_0 \text{ 处雅可比行列式}\frac{\partial(F^1(x),\cdots,F^n(x))}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}>0, \tag{11}$$

此外还得到:

存在一个 C^∞ 函数 $F_0(x)\in D(A)$ 使得

$$(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_0^i\partial x_0^j}\geqq\sum_{i=1}^n(x^i-x_0^i)^2. \tag{12}$$

我们可以把 $F^1(x), F^2(x), \cdots, F^n(x)$ 当作点 x_0 的邻域 $\{x;\mathrm{dis}(x_0,x)<\varepsilon\}$ 内的坐标函数. 我们把这些新的局部坐标记为 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$. 因为 $F^j(x)\in D(A)$, 所以由 Lindeberg 条件(3)可知,

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int_S P(t,x_0,dx)(F^j(x)-F^j(x_0))&=(AF^j)(x_0)\\ &=\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int_{\mathrm{dis}(x,x_0)\leq\varepsilon}P(t,x_0,dx)(F^j(x)-F^j(x_0))\end{aligned}$$

且此式与充分小的 $\varepsilon>0$ 无关. 于是, 对于坐标函数 $x^1, x^2, \cdots, x^n (x^j=F^j)$, 存在有限的

$$\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int_{\mathrm{dis}(x,x_0)\leq\varepsilon}(x^j-x_0^j)P(t,x_0,dx)=a^j(x_0), \tag{13}$$

它与充分小的 $\varepsilon>0$ 无关. 因为 $F_0\in D(A)$, 再利用 Lindeberg 条件(3), 于是得到

$$\begin{aligned}(AF_0)(x)&=\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int_S P(t,x_0,dx)(F_0(x)-F_0(x_0))\\ &=\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int_{\mathrm{dis}(x_0,x)\leq\varepsilon}P(t,x_0,dx)(F_0(x)-F_0(x_0))\\ &=\lim_{t\downarrow 0}\Bigg[t^{-1}\int_{\mathrm{dis}(x_0,x)\leq\varepsilon}(x^i-x_0^i)\frac{\partial F_0}{\partial x_0^i}P(t,x_0,dx)\\ &\quad+t^{-1}\int_{\mathrm{dis}(x_0,x)\leq\varepsilon}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^i\partial x^j}\right)_{x=x_0+\theta(x-x_0)}P(t,x_0,dx)\Bigg],\end{aligned}$$

这里, $0<\theta<1$. 右端第一项有极限 $a^i(x_0)\dfrac{\partial F_0}{\partial x_0^i}$. 于是, 根据 $P(t,x,E)$ 的正性和(12), 我们看见

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\,t^{-1}\int_{\mathrm{dis}(x_0,x)<\varepsilon}\sum_{i=1}^n(x^i-x_0^i)^2P(t,x_0,dx)<\infty. \tag{14}$$

第三步 设 $f\in D(A)\cap C^2$, 于是利用把 $f(x)-f(x_0)$ 展开的办法, 我们就得到

$$\frac{(T_t f)(x_0)-f(x_0)}{t}=t^{-1}\int_S (f(x)-f(x_0))P(t,x_0,dx)$$

$$=t^{-1}\int\limits_{\mathrm{dis}(x,x_0)>\varepsilon}(f(x)-f(x_0))P(t,x_0,dx)$$

$$+t^{-1}\int\limits_{\mathrm{dis}(x,x_0)\le\varepsilon}(x^i-x_0^i)\frac{\partial f}{\partial x_0^i}P(t,x_0,dx)$$

$$+t^{-1}\int\limits_{\mathrm{dis}(x,x_0)\le\varepsilon}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i\partial x_0^j}P(t,x_0,dx)$$

$$+t^{-1}\int\limits_{\mathrm{dis}(x,x_0)\le\varepsilon}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)C_{ij}(\varepsilon)P(t,x_0,dx)$$

$$=C_1(t,\varepsilon)+C_2(t,\varepsilon)+C_3(t,\varepsilon)+C_4(t,\varepsilon),$$

这里，当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$C_{ij}(\varepsilon)\to 0$. 由(3)可知，对于固定的 $\varepsilon>0$ 有 $\lim\limits_{t\downarrow 0}C_1(t,\varepsilon)=0$，并且

$$\lim_{t\downarrow 0}C_2(t,\varepsilon)=a^i(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0^i}$$

与充分小的 $\varepsilon>0$ 无关. 由(14)和 Schwarz 不等式可知，当 $t>0$ 时 $C_4(t,\varepsilon)$ 有界，且 $\lim\limits_{t\downarrow 0}C_4(t,\varepsilon)=0$. 当 $t\downarrow 0$ 时，上式左端也有一个极限 $(Af)(x_0)$. 因此，差

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}C_3(t,\varepsilon)-\underline{\lim_{t\downarrow 0}}C_3(t,\varepsilon)$$

可以利用把 $\varepsilon>0$ 取得充分小的办法而任意小. 然而，由(14)、Schwarz 不等式和(3)可知，此差与充分小的 $\varepsilon>0$ 无关. 因此，有限极限 $\lim\limits_{t\downarrow 0}C_3(t,\varepsilon)$ 存在且与充分小的 $\varepsilon>0$ 无关. 因为我们可以这样选取 $F\in D(A)\cap C^\infty(S)$ 使得 $\partial^2 F/\partial x_0^i\partial x_0^j\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 任意靠近 α_{ij}，这里，α_{ij} 是任意给定的常数，由此，用类似于前面的讨论可以得到

$$\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int\limits_{\mathrm{dis}(x,x_0)\le\varepsilon}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)P(t,x_0,dx)=b^{ij}(x_0)\text{存在且有限}\tag{15}$$

并且

$$\lim_{t\downarrow 0}C_3(t,\varepsilon)=b^{ij}(x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i\partial x_0^j}.$$

这就完成了我们的定理的证明.

注 上述定理及其证明出自 K. Yosida[20]. 我们指出，$b^{ij}(x)=b^{ji}(x)$ 并且

因为 $(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)\xi_i\xi_j=\left(\sum\limits_{i=1}^n(x^i-x_0^i)\xi_i\right)^2$，所以

对每个实向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 都有 $b^{ij}(x_0)\xi_i\xi_j\geqq 0$. (16)

三维球面上的布朗运动 对于 S 是三维球 S^3 的表面而 $\mathfrak{G}$ 是 S^3 的旋转群这种特殊情形可以证明，由 S 上的布朗运动导出的半群的无穷小生成元 A 为

$A=C\Lambda$，这里，C 是一个正的常数而 Λ 是

$$S^3\text{ 表面上的拉普拉斯算子}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\tag{17}$$

因此，在S^3的表面上实质上只存在一个布朗运动．至于详细的讨论，见 K. Yosida(27)．

§6. W. Feller 的广义拉普拉斯算子

设S是实轴上的一个有限或无限的开区间(r_1, r_2)，而$\mathfrak{B}$是(r_1, r_2)内一切 Baire 集所成的集合．考虑$(S, \mathfrak{B})$上的一个满足下述的 Lindeberg 条件的 Markov 过程$P(t, x, E)$，即

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\int_{|x-y|>\varepsilon} P(t, x, dy) = 0 \text{ 对每个 } x\in(r_1, r_2) \text{ 和 } \varepsilon>0 \text{ 成立.} \tag{1}$$

令$C[r_1, r_2]$是定义在(r_1, r_2)内的、实值的、有界的一致连续函数组成的B-空间，而$f(x)$的范数为$\|f\|=\sup\limits_x|f(x)|$．于是

$$(T_t f)(x) = \int_{r_1}^{r_2} P(t, x, dy) f(y)\ (t>0);\ = f(x)\ (t=0) \tag{2}$$

定义了一个$C[r_1, r_2]$上的正的收缩半群．由(1)，可以证明T_t在$t=0$处是弱右连续的，所以由第九章§1的定理可知T_t是(C_0)类的．

关于半群T_t的生成元A，我们有以下两个由 W. Feller 给出的定理．

定理 1.

$$A\cdot 1 = 0; \tag{3}$$

A是局部性的，其意义是：如果$f\in D(A)$在点x_0的某个邻域内为零，则

$$(Af)(x_0) = 0; \tag{4}$$

如果$f\in D(A)$在x_0处达到局部极大值，则$(Af)(x_0)\leqq 0$. (5)

证明 从$T_t\cdot 1=1$显然可得(3)．由(1)我们有

$$(Af)(x_0) = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}\int_{|x_0-y|\leq\varepsilon} P(t, x_0, dy)(f(y)-f(x_0))$$

与充分小的$\varepsilon>0$无关．于是，利用$P(t, x, E)\geqq 0$，我们容易得到(4)和(5)．

定理 2 设线性算子A是将$C[r_1, r_2]$的一个线性子空间$D(A)$映入$C[r_1, r_2]$内的一个算子，并且A满足条件(3)、(4)和(5)．又设A是非退化算子，即它满足以下两个条件：

至少存在一个$f_0\in D(A)$使得，对一切$x\in(r_1, r_2)$都有$(Af_0)(x)>0$, (6)

存在$A\cdot v=0$的一个解v，它同函数 1 在区间(r_1, r_2)的每一个子区间(x_1, x_2)内是线性无关的. (7)

则$A\cdot s=0$在(r_1, r_2)内有一个严格递增的连续解$s=s(x)$使得，如果我们用下式定义一个在(r_1, r_2)内不必连续也不必有界的严格递增函数$m=m(x)$：

$$m(x) = \int^x \frac{1}{(Af_0)(t)} d(D_s^+ f_0(t)), \tag{8}$$

那么我们就可以得到表示式：

$$(Af)(x) = D_m^+ D_s^+ f(x) \text{ 在 } (r_1, r_2) \text{ 内对任何 } f\in D(A) \text{ 都成立.} \tag{9}$$

这里，对严格递增函数$p=p(x)$的右导数D_p^+的定义为

$$
\begin{cases} D_p^+ g(x) = \lim\limits_{y \downarrow x} \dfrac{g(y+0)-g(x-0)}{p(y+0)-p(x-0)} \text{在 } p \text{ 的连续点处,} \\ \qquad\quad = \dfrac{g(x+0)-g(x-0)}{p(x+0)-p(x-0)} \text{在 } p \text{ 的间断点处.} \end{cases} \tag{10}
$$

证明 第一步 设 $u \in D(A)$ 满足 $A \cdot u = 0$ 且 $u(x_1) = u(x_2)$, 这里, $r_1 < x_1 < x_2 < r_2$. 则 $u(x)$ 在 (x_1, x_2) 内必定是一个常数. 否则, $u(x)$ 就会, 譬如说, 在 (x_1, x_2) 的某个内点 x_0 处取得一个极大值使得, 对于某个 $\varepsilon > 0$, 有 $u(x_0) - \varepsilon \geqq u(x_1) = u(x_2)$. 设 f_0 是由条件(6)给出的、属于 $D(A)$ 的函数. 则对于一个充分大的 $\delta > 0$, 函数 $F(x) = f_0(x) + \delta u(x)$ 满足 $F(x_0) > F(x_i)$ $(i = 1, 2)$. 于是, $F(x)$ 在某个内点 x_0' 处达到它在 $[x_1, x_2]$ 内的极大值, 但是显然 $(AF)(x_0') = (Af_0)(x_0') > 0$. 这同条件(5)是矛盾的.

第二步 由(7)和第一步, 我们可以看出, $A \cdot s = 0$ 有一个严格递增的连续解 $s(x)$. 我们用 s 作为参数来重新表示该区间, 使得我们可以认为

$$\text{函数 } 1 \text{ 和 } x \text{ 都是 } A \cdot f = 0 \text{ 的解.} \tag{11}$$

这时, 我们可以证明

$$\text{如果对于区间 } (r_1, r_2) \text{ 的子区间 } (x_1, x_2) \text{ 内的一切点 } x \text{ 都有 } (Ah)(x) > 0, \text{ 则 } h(x) \text{ 在 } (x_1, x_2) \text{ 内是凸向下的.} \tag{12}$$

这是因为函数 $u(x) = h(x) - \alpha x - \beta$ 对于在 (x_1, x_2) 内的一切点 x 都满足 $(Au)(x) = (Ah)(x) > 0$, 所以它在 (x_1, x_2) 的内点上不可能达到局部极大值.

第三步 设 $f \in D(A)$ 则由(12)和(6)可知, 对充分大的 $\delta > 0$, 两个函数 $f_1(x) = f(x) + \delta f_0(x)$ 和 $f_2(x) = \delta f_0(x)$ 都是凸向下的. 因为 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ 是两个凸函数之差, 所以它在 (r_1, r_2) 的每个点 x 处都有右导数. 令

$$A \cdot f = \varphi, \quad A \cdot f_0 = \varphi_0, \quad D_x^+ f_0(x) = \mu(x). \tag{13}$$

对于 $g_t = f - t f_0$, 我们有 $A \cdot g_t = Af - t A \cdot f_0 = \varphi - t \varphi_0$. 因此, 根据(12),

$$
\begin{cases} t < \min\limits_{x_1 < x < x_2} \varphi(x)/\varphi_0(x) \text{意味着 } g_t(t) \text{ 在 } (x_1, x_2) \text{ 内} \\ \text{是凸向下的, 从而 } D_x^+ g_t(x) \text{ 在 } (x_1, x_2) \text{ 内是} \\ \text{递增的.} \end{cases}
$$

对 $t > \max\limits_{x_1 < x < x_2} \varphi(x)/\varphi_0(x)$ 进行同样的讨论, 我们就得到:

$$
\begin{cases} \text{对于 } (r_1, r_2) \text{ 的任何子区间 } (x_1, x_2), \text{ 有} \\ \lim\limits_{x_1 < x < x_2} \dfrac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)} \times (D_x^+ f_0(x_2) - D_x^+ f_0(x_1)) \leqq D_x^+ f(x_2) - D_x^+ f(x_1) \\ \qquad \leqq \max\limits_{x_1 < x < x_2} \dfrac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)} \times (D_x^+ f_0(x_2) - D_x^+ f_0(x_1)). \end{cases}
$$

由此不等式可知, 函数 $\varphi(x)/\varphi_0(x)$ 的连续性意味着

$$D_x^+ f(x_2) - D_x^+ f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)} d(D_x^+ f_0(x)),$$

它刚好是 $A \cdot f = D_m^+ D_x^+ f$ 的积分形式.

注 1 我们可以在下述意义下把算子 $D_m^+D_s^+$ 看作一个广义拉普拉斯算子，这里，D_s^+ 和 D_m^+ 分别对应于一维的广义梯度和广义散度. Feller 把 $s=s(x)$ 叫做有关的 Markov 过程的标准尺度而把 $m=m(x)$ 叫做该 Markov 过程的标准测度. 由前述的第一步，我们容易看出函数 1 和 s 组成了 $A\cdot v=0$ 的一个线性无关的基础解系，使得 $A\cdot v=0$ 的任何一个解都可以唯一地表示为 1 和 $s(x)$ 的某个线性组合. 因此，$P(t,x,E)$ 的标准尺度确定到一个线性变换，亦即，另外的标准尺度 s_1 必可表示为 $s_1=\alpha s+\beta, \alpha>0$; 于是，对应于 s_1 的标准测度 m_1 必可表示为 $m_1=\alpha^{-1}m$.

注 2 定理 2 给出了无穷小生成元 A 在 (r_1, r_2) 的内点 x 的表示式. 为了肯定算子 A 是由 $C[r_1, r_2]$ 入 $C[r_1, r_2]$ 内的、(C_0) 类的正收缩半群 T_t 的无穷小生成元，我们须考虑侧面条件，亦即算子 A 在边界点 r_1 和 r_2 处的边界条件；用它可以具体而完全地描绘出 A 的定义域 $D(A)$. 遵照 Feller[2] 和 [6] 的作法(参看 E. Hille[6])，我们把边界点 r_1(或 r_2)分类为正则边界点、流出边界点、流入边界点和自然边界点. 为此目的，我们引入四个量:

$$\sigma_1=\iint\limits_{r_1<y<x<r_1'} dm(x)ds(y),\ \mu_1=\iint\limits_{r_1<y<x<r_1'} ds(x)dm(y),$$

$$\sigma_2=\iint\limits_{r_2>y>x>r_2'} dm(x)ds(y),\ \mu_2=\iint\limits_{r_2>y>x>r_2'} ds(x)dm(y).$$

边界点 $r_i(i=1,2)$ 称为

$$\left.\begin{array}{l}\text{正则的, 如果 } \sigma_i<\infty,\ \mu_i<\infty,\\ \text{流出的, 如果 } \sigma_i<\infty,\ \mu_i=\infty,\\ \text{流入的, 如果 } \sigma_i=\infty,\ \mu_i<\infty,\\ \text{自然的, 如果 } \sigma_i=\infty,\ \mu_i=\infty\end{array}\right\}\left(\begin{array}{l}\text{这些条件同 } r_1' \text{ 和}\\ r_2' \text{ 的选择无关}\end{array}\right).$$

我们用一些简单例子来说明它们.

例 1 $D_m^+D_s^+=d^2/dx^2, S=(-\infty, \infty)$. 我们可以取 $s=x, m=x$. 于是

$$\sigma_2=\iint\limits_{\infty>y>x>r_2'} dxdy=\int_{r_2'}^{\infty}(y-r_2')dy=\infty,$$

$$\mu_2=\iint\limits_{\infty>y>x>r_2'} dxdy=\infty,$$

因此，∞ 是一个自然边界点. 类似地，$-\infty$ 也是一个自然边界点.

例 2 $D_m^+D_s^+=d^2/dx^2, S=(-\infty, 0)$. 我们可以取 $s=x, m=x$. 在这种情况下，$-\infty$ 是一个自然边界点而 0 是一个正则边界点.

例 3 $D_m^+D_s^+=x^2\dfrac{d^2}{dx^2}-\dfrac{d}{dx}, S=(0, \infty)$. $D_m^+D_s^+s=0$ 的一个严格递增连续解 $s=s(x)$ 为 $s(x)=\int^x e^{-1/t}dt$，从而

$$D_s=e^{1/x}\frac{d}{dx},\quad D_m^+D_s^+=x^2e^{-1/x}\frac{d}{dx}e^{1/x}\frac{d}{dx}.$$

所以, $ds=e^{-1/x}dx$, $dm=x^{-2}e^{1/x}dx$. 于是

$$\sigma_1=\iint\limits_{0<y<x<1} x^{-2}e^{1/x}dx e^{-1/y}dy=\int_0^1[-e^{1/x}]_y^1 e^{-1/y}dy<\infty,$$

$$\mu_1=\iint\limits_{0<y<x<1} e^{-1/x}dx y^{-2}e^{1/y}dy=\int_0^1 e^{-1/x}[-e^{1/y}]_0^x dx=\infty.$$

因此, 0 是一个流出边界点. 类似地, 我们看见

$$\sigma_2=\iint\limits_{\infty>y>x>1} e^{1/x}x^{-2}dx e^{-1/y}dy=\int_1^\infty[-e^{1/x}]_1^y\cdot e^{-1/y}dy=\infty,$$

$$\mu_2=\iint\limits_{\infty>y>x>1} e^{-1/x}dx e^{1/y}y^{-2}dy=\int_1^\infty e^{-1/x}[-e^{1/y}]_x^\infty dx=\infty.$$

从而∞是一个自然边界点.

例 4 $D_m^+D_s^+=x^2\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{d}{dx}$, $S=(0,2)$. 同上面一样, 我们看出 $ds=e^{1/x}dx$, $dm=x^{-2}e^{-1/x}dx$, 从而可以肯定 0 是一个流入边界点而 2 是一个正则边界点.

Feller 对上述分类的概率解释如下:

最初位于开区间(r_1, r_2)内部的一个微粒, 它在经过了一段有限的时间之后达到一个正则边界点或一个流出边界点的概率是正的; 同时, 该微粒在一段有限的时间之内既不可能达到流入边界点又不可能达到自然边界点.

参 考 文 献

Feller 的原始论文发表于 1952 年: W. Feller[2]. 上面叙述的定理 2 的证明选自 W. Feller[3]和[4], 他还作过一次很有启发性的讲演 [5]. 我们还建议读者参看 K. Itô-H. McKean[1]和 E. B. Dynkin[3] 以及这两本书所列的参考文献.

§7. 扩散算子的一种推广

设 Markov 过程(它不必是时齐的) 的一个可能的状态是用一个 n 维的 C^∞ 黎曼空间 R 的点 x 来表示的. 我们用 $P(s,x,t,E)$, $s\leqq t$, 来表示在瞬时 s 的状态 x 在下一个瞬时 t 进入 Baire 集 $E\subseteq R$ 的转移概率.

设算子 A_s 的定义为

$$(A_sf)(x)=\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int_R P(s,x,s+t,dy)(f(y)-f(x)),\ f\in C_0^0(R), \tag{1}$$

这里, 并没有假设成立 Lindeberg 型的条件:

$$\lim_{t\downarrow 0}t^{-1}\int\limits_{d(x,y)\geqq\varepsilon} P(s,x,s+k^{-1},dy)=0 \text{ 对一切正的常数 } \varepsilon \text{ 成立}$$

$$(d(x,y)=\text{点 } x \text{ 与 } y \text{ 之间的测地距离}). \tag{2}$$

我们来讨论算子 A_s 可能具有的形式. 可以证明

定理 存在一个正整数的递增序列$\{k\}$使得，对于一组固定的$\{s,x\}$，有

$$\lim_{a\uparrow\infty} k\cdot\int_{d(x,y)\geqq a} P(s,x,s+k^{-1},dy)=0 \text{ 对 } k \text{ 一致成立，} \tag{3}$$

$$k\int_R \frac{d(x,y)^2}{1+d(x,y)^2} P(s,x,s+k^{-1},dy) \text{ 对 } k \text{ 一致有界.} \tag{4}$$

对于函数$f(x)\in C_0^2(R)$，假设

$$\text{存在一个有限的} \lim_{k\to\infty} k\left\{\int_R P(s,x,s+k^{-1},dy)f(y)-f(x)\right\} \tag{5}$$

则在点$x\in R$的任何一组固定的局部坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$之下，总有

$$\begin{aligned}(A_s f)(x)&=a_j(s,x)\frac{\partial f}{\partial x_j}+b_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\\&+\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\int_{d(x,y)\geqq\varepsilon}\left\{f(y)-f(x)-\frac{\rho(x,y)}{1+d(x,y)^2}(y_j-x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\}\\&\times\frac{1+d(x,y)^2}{d(x,y)^2}G(s,x,dy),\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$G(s,x,E)$对 Baire 集$E\subseteq R$是非负且σ-可加的，同时，$G(s,x,R)<\infty$，　　(7)

$\rho(x,y)$关于x,y是连续的，且当$d(x,y)\leqq\delta/2$时$\rho(x,y)=1$，而当$d(x,y)>\delta$时$\rho(x,y)=0$（δ是一个固定的常数>0），　　(8)

二次型$b_{ij}(s,x)\xi_i\xi_j$是$\geqq 0$的.　　(9)

注 公式(6)是在 K. Yosida[26]中给出的．它是前几节所讨论的那种二阶椭圆微分算子——扩散算子的一种推广．(6)的右端的第三项是无穷多个差分算子之和．这种项的出现是由于我们没有假设 Lindeberg 型的条件(2)成立．公式(6)是概率论中 P. Lévy-A. Khintchine-K. Itô 的无穷可分律在算子理论方面的对应物．关于这个问题，见 E. Hille-Phillips[1] 的 652 页．

定理的证明 考虑由下式给出的一个非负的、σ-可加的测度序列，即

$$G_k(s,x,E)=k\int_E \frac{d(x,y)^2}{1+d(x,y)^2} P(s,x,s+k^{-1},dy). \tag{10}$$

由(3)和(4)可知，

$$G_k(s,x,E)\text{关于} E \text{和} k \text{是一致有界的，} \tag{11}$$

$$\lim_{a\uparrow\infty}\int_{d(x,y)\geqq a} G_k(s,x,dy)=0 \quad \text{对 } k \text{ 一致成立.} \tag{12}$$

因此，对固定的$\{s,x\}$，下式给出的线性泛函L_k，即

$$L_k(g)=\int_R G_k(s,x,dy)g(y),\ g\in C_0^0(R),$$

在赋范线性空间 $C_0^0(R)$ 上是非负且连续的，这里，$C_0^0(R)$ 内的函数 $g(x)$ 的范数为 $\|g\|=\sup_x|g(x)|$；并且 L_k 的范数对 k 是一致有界的.

所以，利用赋范线性空间 $C_0^0(R)$ 的可分性，我们可以选出 $\{k\}$ 的一个子序列 $\{k'\}$ 使得 $\lim_{k\to\infty}L_{k'}(g)=L(g)$ 存在并且是 $C_0^0(R)$ 上的一个非负线性泛函. 由测度论(P. R. Halmos[1])中的一个引理可知，存在一个非负的、σ-可加的测度 $G(s,x,E)$，使得 $G(s,x,R)<\infty$ 并且

$$\lim_{k=k'\to\infty}\int_R G_k(s,x,dy)g(y)=\int_R G(s,x,dy)g(y)\text{对一切 }g\in C_0^0(R)\text{都成立.}\tag{13}$$

我们有

$$\begin{aligned}&k\left[\int_R P(s,x,s+k^{-1},dy)f(y)-f(x)\right]\\&=\int_R\left\{\left[f(y)-f(x)-\frac{\rho(y,x)}{1+d(y,x)^2}(y_j-x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]\frac{1+d(y,x)^2}{d(y,x)^2}\right\}G_k(s,x,dy)\\&\quad+\int_R\frac{\rho(y,x)}{d(y,x)^2}(y_j-x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}G_k(s,x,dy).\end{aligned}\tag{14}$$

对于充分小的 $d(y,x)$，上式右端第一个积分中的项{ }

$$=(y_j-x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}+(y_i-x_i)(y_j-x_j)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\partial X_j}\right)\frac{1+d(y,x)^2}{d(y,x)^2},$$

这里，$X_j=x_j+\theta(y_j-x_j)$，$0<\theta<1$.

因此，{ }对 y 是有界且连续的. 于是，由(12)和(13)可知，(14)右端的第一项随 $k=k'\to\infty$ 而趋于 $\int_R\{\ \}\cdot G(s,x,dy)$. 所以由(5)可知存在有限的

$$\lim_{k=k'\to\infty}\int_R\frac{\rho(y,x)}{d(y,x)^2}(y_j-x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}G_k(s,x,dy)=a_j(s,x)\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

于是利用(3)以及

$$b_{ij}(s,x)=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{k=k'\to\infty}k\int_{d(y,x)\le\varepsilon}(y_i-x_i)(y_j-x_j)P(s,x,s+k^{-1},dy),$$

我们就得到了(6).

§8. Markov 过程和位势

设 $\{T_t\}$ 是函数空间 X 上的 (C_0) 类的一个等度连续的半群，其定义为 $(T_tf)(x)=\int_S P(t,x,dy)\cdot f(y)$，这里，$P(t,x,E)$ 是测度空间 $(S,\mathfrak{B})$ 上的一个 Markov 过程. 设 A 是 T_t 的无穷小生成元. 由于当 A 是拉普拉斯算子时的这种特殊情形的启发，我们把元素 $f\in X$ 叫做**调和的**，如果 $A\cdot f=0$. 于是，f 是调和的，当且仅当对每个 $\lambda>0$ 都有 $\lambda(\lambda I-A)^{-1}f=f$. 元素 $f\in X$ 称为一个**位势**，如果对某个 g 有 $f=\lim_{\lambda\downarrow0}(\lambda I-A)^{-1}g$. 这是因为，对于这种元素 f，由 A 的闭性可知，它满足 **Poisson**

方程

$$A\cdot f=\lim_{\lambda\downarrow 0}A(\lambda I-A)^{-1}g=\lim_{\lambda\downarrow 0}\{-g+\lambda(\lambda I-A)^{-1}g\}=-g.$$

假定X是一个向量格，并且它还是这样一个局部凸的线性拓扑空间，使得由X的元素所组成的每一个单调增加的有界序列均弱收敛于X中的一个元素，而此元素要大于该序列中的诸元素．我们还假设预解式$J_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$在下述意义下是正的，即由$f\geqq 0$可导致$J_\lambda f\geqq 0$．这种说法是由于当$A$是在某个适当的函数空间中的拉普拉斯算子时的这种特殊情形的启发．

因此，我们可以把满足不等式$A\cdot f\geqq 0$的那些元素$f\in X$叫做次调和的．由J_λ的正性可知，次调和元素f对所有的$\lambda>0$都满足$\lambda J_\lambda f\geqq f$．我们要来证明一个类似于关于普通的次调和函数的、著名的 F. Riesz 定理的定理（见 T. Rado[1]），即

定理 任何一个次调和元素x都可以分解为一个调和元素x_h和一个位势x_p之和，这里，x的调和部分x_h是由$x_h=\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda J_\lambda x$给出的，并且$x_h$是$x$在下述意义下的最小的调和优元素，即任何一个调和元素$x_H\geqq x$均满足$x_H\geqq x_h$．

证明(K. Yosida[4]) 根据预解式方程

$$J_\lambda-J_\mu=(\mu-\lambda)J_\lambda J_\mu, \tag{1}$$

我们得到

$$(I-\lambda J_\lambda)=(I+(\mu-\lambda)J_\lambda)(I-\mu J_\mu). \tag{2}$$

因为x是次调和的，所以由J_λ的正性可知

$$\lambda>\mu \text{ 意味着 } \lambda J_\lambda x\geqq \mu J_\mu x\geqq x.$$

于是，利用关于X中的有界单调序列的假设，我们知道，弱-$\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda J_\lambda x=x_h$是存在的．所以，根据第八章§4的遍历定理，我们看见$x_h=\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda J_\lambda x$是存在的且$x_h$是调和的，亦即对所有的$\lambda>0$都有$\lambda J_\lambda x_h=x_h$．我们还有$x_p=(x-x_h)=\lim_{\lambda\downarrow 0}(I-\lambda J_\lambda)x=\lim_{\lambda\downarrow 0}(-A)(\lambda I-A)^{-1}x=\lim_{\lambda\downarrow 0}(\lambda I-A)^{-1}(-Ax)$，它表明$x_p$是一个位势．

设调和元素x_H满足$x_H\geqq x$．则由λJ_λ的正性以及x_H的调和性可知

$$x_H=\lambda J_\lambda x_H\geqq \lambda J_\lambda x \text{ 从而 } x_H\geqq \lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda J_\lambda x=x_h$$

§9. 抽象位势算子和半群

设$\{T_t;\,t\geqq 0\}$是将 Banach 空间X映入X内的有界线性算子的一个(C_0)类的等度连续半群，又设A是它的无穷小生成元．因此，$D(A)^a=X$并且A的预解式$(\lambda I-A)^{-1}$对$\lambda>0$是存在的，同时，它还是一个满足下述条件的、由X入X内的有界线性算子，即

$$\sup_{\lambda>0}\|\lambda(\lambda I-A)^{-1}\|<\infty. \tag{1}$$

从而，利用第八章§4中的阿贝耳遍历定理，我们就得到

$$R(A)^a=R(A(\mu I-A)^{-1})^a=\{x\in X;\ s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda(\lambda I-A)^{-1}x=0\} \quad \text{对所有的 } \mu>0 \text{ 都成立} \tag{2}$$

以及

$$D(A)^a=R((\mu I-A)^{-1})^a=\{x\in X;\ s\text{-}\lim_{\lambda\uparrow\infty}\lambda(\lambda I-A)^{-1}x=x\}=X \quad \text{对所有的 } \mu>0 \text{ 都成立.} \tag{3}$$

我们来讨论这种情形，即

逆算子 A^{-1} 是存在的，且它的定义域

$$D(A^{-1})=R(A) \text{在} X \text{中是强稠密的,} \tag{4}$$

而对于(4)这种情形，我们就把 $V=-A^{-1}$ 叫做关于半群 T_t 的"抽象位势算子"，从而"抽象位势 Vx"满足关于"抽象拉普拉斯算子"A 的"抽象 Poisson 方程"

$$AVx=-x. \tag{5}$$

命题 1(K. Yosida[34]) (4)等价于条件

$$s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda(\lambda I-A)^{-1}x=0 \quad \text{对每个 } x\in X \text{ 都成立.} \tag{6}$$

证明 条件 $Ax=0$ 等价于 $\lambda(\lambda I-A)^{-1}x=x$，从而(6)意味着 A^{-1} 是存在的. 此外，由(2)可知 $R(A)$ 的稠密性等价于(6)，所以(4)必定等价于(6).

系 在(6)的情形，抽象位势算子 $V=-A^{-1}$ 也可以定义为

$$Vx=s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}(\lambda I-A)^{-1}x. \tag{7}$$

证明 对于 $x\in D(A^{-1})$，我们有

$$-A^{-1}x-(\lambda I-A)^{-1}x=-A^{-1}x-A(\lambda I-A)^{-1}A^{-1}x=\lambda(\lambda I-A)^{-1}A^{-1}x.$$

从而由(6)可得 $s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}(\lambda I-A)^{-1}x=-A^{-1}x$. 另一方面，设 $s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}(\lambda I-A)^{-1}x=y$ 存在. 则利用无穷小生成元 A 的闭性，由 $A(\lambda I-A)^{-1}x=-x+\lambda(\lambda I-A)^{-1}x$ 可得到等式 $Ay=-x$，即是说，$y=-A^{-1}x$，从而我们就证明了(7).

从现在起，我们来讨论这种情形，即

$$D(A)^a=X \text{ 并且 } \sup_{\lambda>0}\|\lambda(\lambda I-A)^{-1}\|\leqq 1, \tag{8}$$

它刻划出了(C_0)类的收缩半群$\{T_t;\ t\geqq 0\}$的无穷小生成元 A 的特点. 我们可以证明

定理 1 抽象位势算子 V 和它的对偶算子 V^* 必定分别满足以下不等式:

$$\|\lambda Vx+x\|\geqq\|\lambda Vx\| \text{对所有的 } x\in D(V) \text{ 和 } \lambda>0 \text{ 成立,} \tag{9}$$

$$\|\lambda V^*f^*+f^*\|\geqq\|\lambda V^*f^*\| \text{对所有的 } f^*\in D(V^*) \text{ 和 } \lambda>0 \text{ 成立.} \tag{10}$$

证明 令 $J_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$. 于是 J_λ 满足预解式方程

$$J_\lambda-J_\mu=(\mu-\lambda)J_\lambda J_\mu. \tag{11}$$

在(11)中令 $\mu\downarrow 0$，我们就得到

$$J_\lambda x-Vx=-\lambda J_\lambda Vx \text{ 对所有的 } x\in D(V) \text{ 和 } \lambda>0 \text{ 都成立.} \tag{12}$$

于是 $J_\lambda(\lambda Vx+x)=Vx$，从而利用$\|\lambda J_\lambda\|\leqq 1$，我们就得到(9).

因为 $D(A)$ 和 $R(A)$ 都在 X 内强稠密，于是由第八章 § 6 的 R. S. Philips 定理可知

$$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*, \text{或者等价地,} V^*=(-A^{-1})^*=(-A^*)^{-1}. \tag{13}$$

所以，当 $f^*\in D(V^*)$ 时我们有

$$V^*f^*-(\lambda I^*-A^*)^{-1}f^*=(-A^*)^{-1}f^*-(\lambda I^*-A^*)^{-1}f^*$$
$$=(-A^*)^{-1}f^*-A^*(\lambda I^*-A^*)^{-1}(A^*)^{-1}f^*=\lambda(\lambda I^*-A^*)^{-1}(A^*)^{-1}f^*.$$

于是得到

$$V^*f^*=w^*\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}J_\lambda^*f^*, \tag{14}$$

这是因为由(6)可知, 对所有的$g^*\in X^*$都有 $w^*\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda J_\lambda^*g^*=0$. 因此, 和对于$V$的情形一样, 我们利用

$$J_\lambda^*-J_\mu^*=(\mu-\lambda)J_\lambda^*J_\mu^* \text{ 和 } \sup_{\lambda>0}\|\lambda J_\lambda^*\|\leqq 1 \tag{11'}$$

就可以证明(10)成立.

系 逆算子$(\lambda V+I)^{-1}$和逆算子$(\lambda V^*+I^*)^{-1}$都存在且都是有界线性算子.

证明 $(\lambda V+I)^{-1}$和$(\lambda V^*+I^*)^{-1}$的存在性可以分别从(9) 和(10) 明显地看出来. 我们来证明

$$R(\lambda V+I)=X \quad \text{对所有的 } \lambda>0 \text{ 都成立.} \tag{15}$$

由 Hahn-Banach 定理可知, 逆算子$(\lambda V^*+I^*)^{-1}$的存在意味着

$$R(\lambda V+I) \tag{15'}$$

在X内是强稠密的.

于是, 对任一 $y\in X$, 总存在一个序列$\{x_n\}\subseteq D(V)$使得 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}(\lambda Vx_n+x_n)=y$. 因此, 由(9)可知$\|\lambda V(x_n-x_m)+(x_n-x_m)\|\geqq\|\lambda V(x_n-x_m)\|$, 从而 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}Vx_n=z$ 存在, 也就证明了 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x$ 是存在的. 因为根据定义, 抽象位势算子是闭的, 所以算子V必是闭的. 于是必定有 $Vx=z$, 即是说, $y=\lambda Vx+x$. 这就证明了(15), 从而由闭图象定理可知, $(\lambda V+I)^{-1}$是一个有界线性算子. 于是, 由第八章 § 5 中的闭值域定理可知

$$R(\lambda V^*+I^*)=X^* \quad \text{对所有的 } \lambda>0 \text{ 都成立,} \tag{16}$$

于是再利用闭值域定理和(15), 可知 $(\lambda V^*+I^*)^{-1}$是将对偶空间X^*映入X^*内的一个有界线性算子.

现在, 我们就可以来刻划抽象位势算子的特性:

定理 2(K. Yosida[35]) 设闭线性算子V的定义域$D(V)$和值域$R(V)$都在X内强稠密, 并且V和它的对偶算子V^*分别满足(9)和(10). 则V是一个抽象位势算子, 亦即, $-V$是算子A的逆算子, 这里, A是X中的一个(C_0)类的收缩半群的无穷小生成元.

证明 首先, 我们注意到上面的系对于V和V^*是成立的, 从而$(\lambda V+I)^{-1}$是一个由X入X内的有界线性算子. 此外, 由

$$\hat{J}_\lambda(\lambda Vx+x)=Vx \quad [\text{对所有的 } x\in D(V) \text{ 和 } \lambda>0 \text{ 都成立}] \tag{17}$$

所定义的线性算子$\hat{J}_\lambda$是一个由X入X内的有界线性算子并且有

$$\hat{J}_\lambda=V(\lambda V+I)^{-1} \quad \text{和} \quad \sup_{\lambda>0}\|\lambda\hat{J}_\lambda\|\leqq 1. \tag{18}$$

利用(17), 我们可以证明J_λ是一个伪预解式. 事实上, 我们有

$$\hat{J}_\lambda(\lambda Vx+x)-\hat{J}_\mu(\lambda Vx+x)=Vx-\hat{J}_\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}(\mu Vx+x)+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)x\right)$$

$$=Vx-\frac{\lambda}{\mu}Vx-\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\hat{J}_\mu x=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(Vx-\hat{J}_\mu x)$$

和

$$(\mu-\lambda)\hat{J}_\mu\hat{J}_\lambda(\lambda Vx+x)=(\mu-\lambda)\hat{J}_\mu Vx=(\mu-\lambda)\hat{J}_\mu\left(Vx+\frac{1}{\mu}x-\frac{1}{\mu}x\right)$$

$$=(\mu-\lambda)\frac{1}{\mu}Vx-(\mu-\lambda)\frac{1}{\mu}\hat{J}_\mu x=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(Vx-\hat{J}_\mu x).$$

因为(18)成立,所以我们可以运用阿贝耳遍历定理:

$$R(\hat{J}_\mu)^a=\{x\in X;\ s\text{-}\lim_{\lambda\uparrow\infty}\lambda\hat{J}_\lambda x=x\}\quad 对一切\ \mu>0\ 成立, \tag{19'}$$

$$R(I-\mu\hat{J}_\mu)^a=\{x\in X;\ s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda\hat{J}_\lambda x=0\}\quad 对一切\ \mu>0\ 成立. \tag{20'}$$

因为$R(V)^a=X$,所以由(17)可知$R(\hat{J}_\mu)^a=X$. 另一方面,$\hat{J}_\lambda$的零空间与λ无关(见第八章§4的命题). 于是,由(19)和$R(\hat{J}_\mu)^a=X$可知,$\hat{J}_\lambda$的零空间只含有零向量. 所以$\hat{J}_\lambda$是线性算子A的预解式:

$$\hat{J}_\lambda=(\lambda I-A)^{-1},\ 这里,A=\lambda I-\hat{J}_\lambda^{-1}. \tag{21}$$

于是我们就得到

$$D(A)^a=R(\hat{J}_\mu)^a=\{x\in X;\ s\text{-}\lim_{\lambda\uparrow\infty}\lambda\hat{J}_\lambda x=x\}\quad 对一切\ \mu>0\ 成立, \tag{19'}$$

$$R(A)^a=R(I-\mu\hat{J}_\mu)^a=\{x\in X;\ s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda\hat{J}_\lambda x=0\}\quad 对一切\ \mu>0\ 成立. \tag{20'}$$

由(19)′和$R(\hat{J}_\mu)^a=X$可知$D(A)^a=X$. 我们还可以证明$R(A)^a=X$. 事实上,由(17)和(21)可知

$$(\lambda I-A)\hat{J}_\lambda(\lambda Vx+x)=\lambda Vx+x=(\lambda I-A)Vx=\lambda Vx-AVx,$$

即是说,

$$-AVx=x\quad 对一切\ x\in D(V)\ 成立. \tag{22}$$

于是$R(A)\supseteq D(V)$在X中是强稠密的,即是说,$R(A)^a=X$,从而由(20′)可知,对一切$x\in X$都有$s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda\hat{J}_\lambda x=0$. 所以,由命题1可知$-A^{-1}$是一个抽象位势算子.

至于$V=-A^{-1}$,可以证明如下. 首先,逆算子V^{-1}存在,因为由(22)可知,由$Vx=0$可得出$x=0$. 因此,由(18)和(21)可得

$$\lambda I-A=\hat{J}_\lambda^{-1}=(\lambda V+I)V^{-1}=\lambda I+V^{-1},$$

这就证明了$-A^{-1}=V$.

注 由前面的证明可以看出,(10)只用于证明(15′),从而只用于证明(15).

同第九章§8一样,我们在X中引入一个满足以下条件的半数量积$[x,y]$:

$$\begin{cases}[x+y,z]=[x,z]+[y,z],\ [\lambda x,y]=\lambda[x,y],\\ [x,x]=\|x\|^2\ 以及\ |[x,y]|\leq\|x\|\cdot\|y\|.\end{cases} \tag{23}$$

设线性算子 V 的定义域 $D(V)$ 和值域 $R(V)$ 都在 X 中. 这时, 如果

$$Re[x, Vx] \geqq 0 \text{ 对一切 } x \in D(V) \text{ 成立}, \tag{24}$$

则 V 叫做(关于 $[x, y]$)是**增生的**.

我们来给出三个命题.

命题 2 抽象位势算子 V 必定是增生的.

证明 设 $\{T_t;\ t \geqq 0\}$ 是 (C_0) 类的收缩半群, 而它的无穷小生成元 A 为 $A = -V^{-1}$. 因为 $\|T_t\| \leqq 1$, 所以

$$Re[T_t x - x, x] = Re[T_t x, x] - \|x\|^2 \leqq \|T_t x\| \cdot \|x\| - \|x\|^2 \leqq 1.$$

于是, 对于 $x \in D(A)$ 我们得到

$$Re[Ax, x] = \lim_{t \downarrow 0} [t^{-1}(T_t x - x), x] \leqq 0.$$

因此, 对于 $x_0 \in D(V) = D(A^{-1})$, 有

$$Re[AVx_0, Vx_0] = Re[-x_0, Vx_0] \leqq 0, \text{ 即是说}, Re[x_0, Vx_0] \geqq 0.$$

命题 3 如果 V 是增生的, 则 V 满足(9).

证明 由(23)和(24)可知

$$\begin{aligned}\|\lambda Vx\|^2 = [\lambda Vx, \lambda Vx] &\leqq Re\{[\lambda Vx, \lambda Vx]\} \\ &= Re[\lambda Vx + x, \lambda Vx] \leqq \|\lambda Vx + x\| \cdot \|\lambda Vx\|,\end{aligned}$$

即是说, 我们证明了(9).

命题 4 设 $\{T_t;\ t \geqq 0\}$ 是一个具有无穷小生成元 A 的 (C_0) 类的收缩半群. 如果 V 是关于此半群的一个抽象位势算子且 $V = -A^{-1}$. 则对于 X 的对偶空间 X^* 中的任何一种半数量积 $[f^*, g^*]$, V 的对偶算子 V^* 必定满足不等式

$$[f^*, V^+ f^*] \geqq 0. \tag{25}$$

这里,

$$V^+ \text{ 是 } V^* \text{ 在把自己的定义域和值域都限于 } R(V^*)^a \text{ 内时的最大限制}. \tag{26}$$

证明 设 $\{T_t^+;\ t \geqq 0\}$ 是 $\{T_t;\ t \geqq 0\}$ 的对偶半群(见第九章 § 13), 从而 $\{T_t^+;\ t \geqq 0\}$ 是 $X^+ = D(A^*)^a = R(V^*)^a$ 内的一个 (C_0) 类的收缩半群. 因此, 半群 T_t^+ 的无穷小生成元 A^+ 是 A^* 把自己的定义域和值域都限于 $X^+ = D(A^*)^a$ 内的最大限制. 于是 $V^+ = (-A^+)^{-1}$, 从而(25)式可以象命题 2 那样予以证明.

现在我们就能够来证明

定理 3 设 V 是一个闭的线性算子, 其定义域和值域都在 X 内强稠密. 这时, V 是一个抽象位势算子, 当且仅当 V 是增生的且 V^+ 也是增生的.

证明 "仅当部分"可用命题 2 和命题 4 来证明. 我们来证明"当的部分". 首先, 根据命题 3, V 满足(9). 其次, 令 $\lambda V^* f^* + f^* = 0$. 于是 $f^* \in R(V^*)$ 从而 $V^* f^* = -\lambda^{-1} f^* \in R(V^*)$. 因此, $f^* \in D(V^+)$ 且 $\lambda V + f^* = -f^*$. 所以, 由 V^+ 的增生性可得

$$[\lambda f^*, \lambda V^+ f^*] = \lambda[f^*, -f^*] = -\lambda \|f^*\|^2 \geqq 0, \text{ 亦即 } f^* = 0.$$

于是，逆算子$(\lambda V^*+I^*)^{-1}$存在，从而由 Hahn-Banach 定理可知，(15′)因而还有(15)都成立. 这就证明了V是一个抽象位势算子.

同 G. A. Hunt 的位势理论的比较. 考察一个特殊的空间X；设S是一个局部紧，但不紧的 Hausdorff 可分空间，$C_0(S)$是由那些具有含于S内的紧支集的实值或复值连续函数$x(s)$所组成的空间，而X就是$C_0(S)$关于极大值范数的完备化空间$C_\infty(S)$. 这时，我们用下式来定义X的元素之间的半数量积，即

$[x, y]=x(s_0)\overline{y(s_0)}$，这里$s_0$是$S$的任何一个这样的固定点，它使得

$$|y(s_0)|=\sup_{s\in S}|y(s)|. \tag{27}$$

所以，下述条件给出了线性算子V的增生性质，即

$$\text{当}\ |(Vx)(s_0)|=\sup_{s\in S}|(V(x)(s))|\ \text{时就有}\ Re(x(s_0)\cdot\overline{(Vx)(s_0)})\geqq 0. \tag{28}$$

这可以同 Hunt 的位势理论(G. A. Hunt[1]，也可参看 P. A. Meyer[1]和 K. Yosida[32]以及这些文章中列出的参考文献）中关于V的正极大值原理进行比较. 对于$C_\infty(S)$中只含有实值函数的情形，Hunt 引进了由下列条件给出的位势算子U的概念，它是一个由定义域$D(U)\subseteqq C_\infty(S)$入$C_\infty(S)$内的正线性算子且满足三个条件：i)$D(U)\supseteqq C_0(S)$，ii)$U\cdot C_0(S)$在$C_\infty(S)$内强稠密以及 iii) 正极大值原理，它可表述为

$$\begin{aligned}&\text{对于每个}\ x(s)\in C_0(S)\text{，只要}\ (Ux)(s)\ \text{在}\ s=s_0\\&\text{达到它的正的上确界，就有}\ x(s_0)\geqq 0.\end{aligned} \tag{29}$$

(上面提到的U的正性，指的是U把非负函数映射为非负函数.)然后，Hunt证明了存在唯一确定的、由$C_\infty(S)$入$C_\infty(S)$内的正收缩算子T_t的(C_0)类半群$\{T_t;\ t\geqq 0\}$，且它满足以下两个条件：

$$\text{对于每个}\ x(s)\in C_0(S)\ \text{都有}\ AUx=-x\text{，其中，}A\ \text{是}\ T_t\ \text{的无穷小生成元，} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}&\text{对于每个}\ x(s)\in C_0(S)\ \text{都有}\ (Ux)(s)=\int_0^\infty (T_tx)(s)\,dt\text{，这里，}\\&\text{积分是在}\ B\text{-空间}\ C_\infty(S)\ \text{的强拓扑下取的.}\end{aligned} \tag{31}$$

需要指出，我们在定义抽象位势算子V时，并未假设算子V是正的. 此外，在我们的叙述中，(30)可以换成真正的 Poisson 方程

$$V=-A^{-1}. \tag{30′}$$

关于这一点需指出，算子U限制在$C_0(S)$上的最小闭扩张V满足(30′). 见K. Yosida、T. Watanabe、H. Tanaka[36]和 K. Yosida(37). 此外，在我们关于抽象位势算子V的叙述中，(31)可以换成更一般的$(Vx)(s)=s\text{-}\lim_{n\to\infty}((\lambda I-A)^{-1}x)(s)$，它是以(7)为根据的. 这种表述方式有这样的优点，即它可以应用到比(31)更一般得多的半群类上. 例如，见 K. Yosida[37]，[38]、A. Yamada[1]和 K. Sato[1]，[2]. 这里须指出，F. Hirsch[1]，[2]采用实质上同本书著者一样的想法也导出了一种抽象位势理论.

第十四章　发展方程的积分[①]

初值问题

$$dy/dx = \alpha y, \quad y(0) = 1$$

的解是普通的指数函数. 我们考虑扩散方程

$$\partial u/\partial t = \Delta u, \text{其中 } \Delta = \sum_{j=1}^{m} \partial^2/\partial^2 x_j \text{ 是} R^m \text{ 中的拉普拉斯算子.}$$

我们希望求出此方程满足初始条件 $u(x, 0) = f(x)$ 的解 $u(x, t)$, $t > 0$. 这里, $f(x) = f(x_1, \cdots, x_m)$ 是 x 的已知函数. 我们还考虑波动方程

$$\partial^2 u/\partial t^2 = \Delta u, \quad -\infty < t < \infty$$

及初始条件

$$u(x, 0) = f(x) \text{ 和 } (\partial u/\partial t)_{t=0} = g(x),$$

f 和 g 是已知函数. 此方程及初始条件也可以写为下述向量形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}$$

及

$$\begin{pmatrix} u(x, 0) \\ v(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

因此, 在适当的函数空间中, 波动方程可以看作某种形式的扩散(或热传导)方程——左端是对时间参数的微分运算而右端是别的算子—— 换句话说也可以认为波动方程是类似于方程 $dy/dt = \alpha y$ 的. 由于后一种情形的解是指数函数, 这就使我们想到用下述办法来求解热传导方程和波动方程, 即在适当的函数空间中, 恰当地定义算子

$$\Delta \text{ 和} \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

的指数函数. 这就促使我们把半群理论应用于 Cauchy 问题. 我们指出, Schrödinger 方程

$$i^{-1}\partial u/\partial t = Hu = (\Delta + U(x))u, \text{其中}, U(x) \text{是已知函数},$$

给出了形如

$$\partial u/\partial t = Au, \quad t > 0 \tag{1}$$

的**发展方程**的另一个例子, 这里, (1)中的 A 是某函数空间中的一个不一定连续的线性算子.

象(1)这种形式的方程可以叫做**时齐的发展方程**. 我们可以用半群理论来积分这种方程. 在以下三节中, 我们将给出这种积分法的一些典型例子. 然后, 我们将叙述**非时齐的发展方程**

$$\partial u/\partial t = A(t)u, \quad a < t < b \tag{2}$$

的积分理论.

---

① 并请参看《补充说明》最后三段。

§ 1. $L^2(R^m)$中的扩散方程的积分

考虑扩散方程

$$\partial u/\partial t = Au, \quad t>0, \tag{1}$$

其中，微分算子

$$A = a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \quad (a^{ij}(x) = a^{ji}(x)) \tag{2}$$

在 m 维欧几里得空间 R^m 中是严格椭圆的．我们假设实系数 a、b 和 c 是 $C^\infty(R^m)$ 函数，又假设

$$\max(\sup_x |a^{ij}(x)|, \ \sup_x |b^i(x)|, \sup_x |c(x)|, \sup_x |a^{ij}_{x_k}(x)|,$$
$$\sup_x |b^i_{x_k}(x)|, \ \sup_x |a^{ij}_{x_k x_s}(x)|) = \eta < \infty. \tag{3}$$

关于 A 是严格椭圆的假设，指的是存在正的常数 λ_0 和 μ_0，使得

$$\mu_0 \sum_{j=1}^m \xi_j^2 \geqq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \lambda_0 \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \text{ 在 } R^m \text{ 上对任何一个实向量 } \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \tag{4}$$

都成立．

令 $\hat{H}^1_0$ 是所有实值的 $C_0^\infty(R^m)$ 函数 $f(x)$ 组成的空间，其范数为

$$\|f\|_1 = \left(\int_{R^m} f^2 dx + \sum_{j=1}^m \int_{R^m} f^2_{x_j} dx\right)^{1/2}, \tag{5}$$

又令 H^1_0 是 $\hat{H}^1_0$ 关于范数 $\|f\|_1$ 的完备化空间．类似地令 H^0_0 是 $\hat{H}^1_0$ 关于范数

$$\|f\|_0 = \left(\int_{R^m} f^2 dx\right)^{1/2} \tag{6}$$

的完备化空间．于是，我们就引进了两个实的 Hilbert 空间 H^1_0 和 H^0_0，并且 H^1_0 和 $\hat{H}^1_0$ 在 H^0_0 中是$\| \ \|_0$稠密的．根据第一章 § 10 中的命题，我们知道 H^1_0 同实的 Sobolev 空间 $W^1(R^m)$ 是重合的；我们还知道 H^0_0 同实的 Hilbert 空间 $L^2(R^m)$ 是重合的．我们把 Hilbert 空间 H^1_0 中(或 Hilbert 空间 H^0_0 中)的内积记为$(f, g)_1$ (或$(f, g)_0$)．

为了在复的 Hilbert 空间 $L^2(R^m)$ 中在条件(3)和(4)之下对方程(1)积分，我们给出某些引理．这些引理在以下各节中也将起到重要的作用．

引理 1 (关于分部积分)．令 $f, g \in \hat{H}^1_0$．则有

$$(Af, g)_0 = -\int_{R^m} a^{ij} f_{x_i} g_{x_j} dx - \int_{R^m} a^{ij}_{x_j} f_{x_i} g \, dx + \int_{R^m} b^i f_{x_i} g \, dx + \int_{R^m} cfg \, dx, \tag{7}$$

亦即，在对$(Af, g)_0$中那些含有二阶导数的项进行分部积分时，被积出的项仿佛是零．

证明 根据(3)以及 f 和 g 都属于$\hat{H}^1_0$这个事实，我们知道 $a^{ij} f_{x_i x_j} g$ 在 R^m 上是可积的．于是，由 f 和 g 都具有紧支集这个事实可知

$$\int_{R^m} a^{ij} f_{x_i x_j} g \, dx = -\int_{R^m} a^{ij} f_{x_i} g_{x_j} \, dx - \int_{R^m} a^{ij}_{x_j} f_{x_i} g \, dx.$$

注 把 A 的形式伴随算子 A^* 定义为

$$(A^*f)(x)=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(a^{ij}(x)f(x))-\frac{\partial}{\partial x_i}(b^i(x)f(x))+c(x)f(x). \tag{8}$$

于是,如上所述,我们有结论:如果 $f, g\in\hat{H}_0^1$,则我们可以对 $(A^*f, g)_0$ 中那些含有一阶和二阶导数的项进行分部积分,使得相应的那些积分项不再出现了,亦即,我们有

$$(A^*f, g)_0=-\int_{R^m}a^{ij}f_{x_i}g_{x_j}\,dx-\int_{R^m}a^{ij}_{x_i}fg_{x_j}dx-\int_{R^m}b^ifg_{x_i}\,dx+\int_{R^m}cfg\,dx. \tag{7'}$$

系. 存在正的常数 $\varkappa$、γ 和 δ,使得对一切充分小的正的常数 α 都有,

$$\begin{cases}\alpha\delta\|f\|_1^2\leqq(f-\alpha Af, f)_0\leqq(1+\alpha\gamma)\|f\|_1^2 \text{ 当 } f\in\hat{H}_0^1 \text{时成立},\\ \alpha\delta\|f\|_1^2\leqq(f-\alpha A^*f, f)_0\leqq(1+\alpha\gamma)\|f\|_1^2 \text{ 当 } f\in\hat{H}_0^1 \text{时成立},\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases}|(f-\alpha Af, g)_0|\leqq(1+\alpha\gamma)\|f\|_1\|g\|_1 \text{ 当 } f, g\in\hat{H}_0^1 \text{时成立},\\ |(f-\alpha A^*f, g)_0|\leqq(1+\alpha\gamma)\|f\|_1\|g\|_1 \text{ 当 } f, g\in\hat{H}_0^1 \text{时成立},\end{cases} \tag{10}$$

$$|(Af, g)_0-(f, Ag)_0|\leqq\varkappa\|f\|_1\|g\|_0 \text{ 当 } f, g\in\hat{H}_0^1 \text{时成立}. \tag{11}$$

证明 (9)和(10)可以这样证明,即利用(3)、(4)、(7)和(7')并注意到不等式

$$2\alpha|ab|\leqq\alpha(\nu|a|^2+\nu^{-1}|b|^2) \tag{12}$$

对于大于 0 的 α 和 ν 成立. 事实上,我们可以使用下述估计式

$$\left|\int_{R^m}a^{ij}_{x_j}f_{x_i}gdx\right|\leqq\sum_{i=1}^m m\eta(\nu\|f_{x_i}\|_0^2+\nu^{-1}\|g\|_0^2).$$

再由

$$(Af, g)_0-(f, Ag)_0=-\int_{R^m}(2a^{ij}_{x_i}f_{x_j}g+a^{ij}_{x_ix_j}fg-2b^if_{x_i}g-b^i_{x_i}fg)dx$$

我们还可以得到(11)式.

引理 2 (关于 $u-\alpha Au=f$ 的解的存在性) 设正数 α_0 是如此选取的,使得上述的系对于 $0<\alpha\leqq\alpha_0$ 成立. 这时,对于任一函数 $f(x)\in\hat{H}_0^1$,方程

$$u-\alpha Au=f \quad (0<\alpha\leqq\alpha_0) \tag{13}$$

有唯一确定的解 $u\in\hat{H}_0^1\cap C^\infty(R^m)$.

证明 我们定义一个对于函数 $u, v\in\hat{H}_0^1$ 有意义的双线性泛函 $\hat{B}(u, v)=(u-\alpha A^*u, v)_0$. 由上面的系可知

$$|\hat{B}(u, v)|\leqq(1+\alpha\gamma)\|u\|_1\|v\|_1,\quad \alpha\delta\|u\|_1^2\leqq\hat{B}(u, u). \tag{14}$$

因此,我们可以利用连续性把 $\hat{B}(u, v)$ 延拓为对于 $u, v\in H_0^1$ 有意义的双线性泛函 $B(u, v)$,且它满足

$$|B(u, v)|\leqq(1+\alpha\gamma)\|u\|_1\|v\|_1,\quad \alpha\delta\|u\|_1^2\leqq B(u, u). \tag{14'}$$

定义在 H_0^1 上的线性泛函 $F(u)=(u, f)_0$ 是一个有界线性泛函,这是因为 $|(u, f)_0|\leqq\|u\|_0\|f\|_0\leqq\|u\|_1\|f\|_0$. 于是,由 Hilbert 空间 H_0^1 中的 F. Riesz 表示定理可知,存在唯一确定的 $v=v(f)\in H_0^1$ 使得 $(u, f)_0=(u, v(f))_1$. 因此,把 Milgram-Lax 定理应用到 Hilbert 空间 H_0^1 就有

$$(u, f)_0=(u, v(f))_1=B(u, Sv(f)) \quad \text{对一切 } u\in H_0^1 \text{ 成立, 其中 } S \text{ 是一个由 } H_0^1 \text{ 到 } H_0^1 \text{ 上的有界线性算子}. \tag{15}$$

设 u 遍取 $C_0^\infty(R^m)$，又设 $v_n\in\hat{H}_0^1$ 且使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n-Sv(f)\|_1=0$. 则

$$B(u, Sv(f))=\lim_{n\to\infty}B(u, v_n)=\lim_{n\to\infty}\hat{B}(u, v_n)=\lim_{n\to\infty}(u-\alpha A^*u, v_n)_0=(u-\alpha A^*u, Sv(f))_0,$$

这是因为范数 $\|\ \|_1$ 大于范数 $\|\ \|_0$. 于是

$$(u, f)_0=(u-\alpha A^*u, Sv(f))_0, \tag{15'}$$

即是说，$Sv(f)\in H_0^1$ 是方程(13)的一个分布解. 因此，根据 $(I-\alpha A)$ 的严格椭圆性以及 $f\in C_0^\infty(R^m)$ 这个事实，从第六章 §9 中的 Friedrichs 定理的系可知，我们可以认为 $u=Sv(f)\in H_0^1$ 是(13)的一个 $C^\infty(R^m)$ 解. 于是 $u=Sv(f)\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)$.

(13)的这种解 u 的唯一性可以证明如下. 设某个函数 $u\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)$ 满足 $u-\alpha Au=0$. 因此 $Au\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)\subseteqq H_0^0$，从而表示式 $(u-\alpha Au, u)_0$ 是确定的并且 $=0$. 设 $u_n\in\hat{H}_0^1$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u-u_n\|_1=0$. 和(9)式一样进行分部积分，我们就得到

$$0=(u-\alpha Au, u)_0=\lim_{n\to\infty}(u-\alpha Au, u_n)_0\geqq\alpha\delta\|u\|_1^2,\ \text{即是说}\ u=0.$$

系 1 存在正的常数 $\hat{\alpha}_0$ 和 η_0 使得，对任一 $f\in\hat{H}_0^1$，方程

$$\alpha u-Au=f\quad(0<\hat{\alpha}_0+\lambda_0+\eta_0\leqq\alpha) \tag{16}$$

有唯一确定的解 $u=u_f\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)$，且有估计式

$$\|u_f\|_0\leqq(\alpha-\lambda_0-\eta_0)^{-1}\|f\|_0. \tag{17}$$

证明 由 Schwarz 不等式可知

$$\|(\alpha I-A)u\|_0\cdot\|u\|_0\geqq|((\alpha I-A)u, u)_0|\ \text{对}\ u\in\hat{H}_0^1\ \text{成立}. \tag{18}$$

利用分部积分可得

$$((\alpha I-A)u, u)_0=\alpha\|u\|_0^2+\int_{R^m}a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx+\int_{R^m}a_{x_j}^{ij}u_{x_i}u\,dx-\int_{R^m}b^iu_{x_i}u\,dx-\int_{R^m}cuu\,dx.$$

于是，由(3)、(4)和(12)可得

$$\begin{aligned}((\alpha I-A)u, u)_0&\geqq\alpha\|u\|_0^2+\lambda_0(\|u\|_1^2-\|u\|_0^2)-m^2\eta[\nu(\|u\|_1^2-\|u\|_0^2)+\nu^{-1}\|u\|_0^2+m^{-2}\|u\|_0^2]\\&=(\alpha-\lambda_0-m^2\eta(\nu^{-1}-\nu+m^{-2}))\|u\|_0^2+(\lambda_0-m^2\eta\nu)\|u\|_1^2.\end{aligned}$$

因此，由(18)可知对于 $\eta_0=m^2\eta(\nu^{-1}-\nu+m^{-2})$，

$$\|(\alpha I-A)u\|_0\geqq(\alpha-\lambda_0-\eta_0)\|u\|_0\ \text{当}\ u\in\hat{H}_0^1\ \text{时成立}, \tag{17'}$$

选取 $\nu>0$ 如此之小，以致 $(\lambda_0-m^2\eta\nu)$ 和 η_0 都 >0. 然后我们把 $\hat{\alpha}_0$ 取得这样大，使得对于 $\alpha\geqq\hat{\alpha}_0+\lambda_0+\eta_0$，我们可以应用引理 2 来求解(16).

因为(16)的解 $u=u_f\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)$ 可以用属于 $\hat{H}_0^1$ 的一个函数序列在 $\|\ \|_1$ 范数下来逼近，所以，由(18)和(17')就可以得到估计式(17).

系 2 把 A 看成是一个由 $D(A)=(\alpha I-A)^{-1}\hat{H}_0^1\subseteqq H_0^0$ 入 H_0^0 内的算子. 则对于 $\alpha>\hat{\alpha}_0+\lambda_0+\eta_0$，$A$ 在 H_0^0 中的最小闭扩张 $\hat{A}$ 有由 H_0^0 到 H_0^0 内的预解式 $(\alpha I-\hat{A})^{-1}$ 且

$$\|(\alpha I-\hat{A})^{-1}\|_0\leqq(\alpha-\lambda_0-\eta_0)^{-1}. \tag{19}$$

证明 注意到 $D(A)$ 和 $\hat{H}_0^1$ 都是在 H_0^0 内 $\|\ \|_0$ 稠密的这个事实，再由系 1 可以明显地看出系 2 是正确的.

因此，由第九章§7的系2可知，$\hat{A}$是B-空间H_0^0中的某个(C_0)类半群T_t的无穷小生成元，并且对于$t\geqq 0$有$\|T_t\|_0\leqq e^{(\lambda_0+\eta_0)t}$.

现在，我们就可以证明

定理1 设复的$\hat{H}_0^1$是一切复值函数$f\in C_0^\infty(R^m)$在$\|f\|_1=\left(\int_{R^m}|f|^2dx+\sum_{j=1}^m\int_{R^m}|f_{x_j}|^2dx\right)^{1/2}<\infty$之下所成的空间. 设$\widetilde{H}_0^1$和$\widetilde{H}_0^0$分别是复的$\hat{H}_0^1$关于范数$\|f\|_1$和$\|f\|_0$的完备化空间. 我们知道$\widetilde{H}_0^1=$(复的)Sobolev 空间$W^1(R^m)$(见第一章§10). 显然，$\widetilde{H}_0^0=$(复的)Hilbert 空间$L^2(R^m)$. 我们把$A$看成一个由$D(A)=(\alpha I-A)^{-1}\widetilde{H}_0^1\subseteq L^2(R^m)$入$L^2(R^m)$内的算子. 于是$A$在$L^2(R^m)$内的最小闭扩张$\widetilde{A}$是$L^2(R^m)$中的某个$(C_0)$类解析半群$T_t$的无穷小生成元，并且对于$t\geqq 0$有$\|T_t\|_0\leqq e^{(\lambda_0+\eta_0)t}$.

证明 由于上述的系2以及微分算子A的诸系数是实函数，所以我们知道，对于$\alpha>\hat{\alpha}_0+\lambda_0+\eta_0$，值域$R(\alpha I-A)=(\alpha I-A)\cdot D(A)$在$L^2(R^m)$中是$\|\ \|_0$稠密的. 此外，当$(u+iv)\in L^2(R^m)$且$(u+iv)\in D(A)$时，我们有

$$\|(\alpha I-A)(u+iv)\|_0^2=\|(\alpha I-A)u\|_0^2+\|(\alpha I-A)v\|_0^2\geqq(\alpha-\lambda_0-\eta_0)^2(\|u\|_0^2+\|v\|_0^2).$$

于是，逆算子$(\alpha I-\widetilde{A})^{-1}$是一个由$L^2(R^m)$入$L^2(R^m)$内的有界线性算子，并且对于$\alpha>\hat{\alpha}_0+\lambda_0+\eta_0$有$\|(\alpha I-\widetilde{A})^{-1}\|_0\leqq(\alpha-\lambda_0-\eta_0)^{-1}$.

所以，由第九章§10中的定理可知，我们只需证明

$$\overline{\lim_{|\tau|\uparrow\infty}}|\tau|\,\|((\alpha+i\tau)I-\widetilde{A})^{-1}\|_0<\infty. \tag{20}$$

对于$w\in D(A)$，我们有

$$\|((\alpha+i\tau)I-A)w\|_0\|w\|_0\geqq|(((\alpha+i\tau)I-A)w,w)_0|. \tag{21}$$

同证明(17)一样，利用分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}&|Re(((\alpha+i\tau)I-A)w,w)_0|\\&=\left||\alpha|\|w\|_0^2+Re\left(\int_{R^m}a^{ij}w_{x_i}\overline{w}_{x_j}\,dx+a^{ij}_{x_i}w_{x_j}\overline{w}\,dx-\int_{R^m}b^iw_{x_i}\overline{w}\,dx-\int_{R^m}cw\overline{w}\,dx\right)\right|\\&\geqq(\alpha-\lambda_0-\eta_0)\|w\|_0^2+(\lambda_0-m^2\eta\nu)\|w\|_1^2.\end{aligned}$$

类似地我们有

$$\begin{aligned}&|Im(((\alpha+i\tau)I-A)w,w)_0|\\&\geqq|\tau|\|w\|_0^2-m^2\eta(\|w\|_1^2+m^{-2}\|w\|_0^2)\geqq(|\tau|-\eta)\|w\|_0^2-m^2\eta\|w\|_1^2.\end{aligned}$$

假定存在一个$w_0\in D(A)$，$\|w_0\|_0\neq 0$，使得对于充分大的τ(或对于充分大的$-\tau$)，有

$$|Im(((\alpha+i\tau)I-A)w_0,w_0)_0|<2^{-1}(|\tau|-\eta\|w_0\|_0^2.$$

则对于如此大的τ(或$-\tau$)，必定有

$$m^2\eta\|w_0\|_1^2>2^{-1}(|\tau|-\eta)\|w_0\|_0^2,$$

从而

$$|Re(((\alpha+i\tau)I-A)w_0,w_0)_0|\geqq(\lambda_0-m^2\eta\nu)\frac{(|\tau|-\eta)}{2m^2\eta}\|w_0\|_0^2.$$

于是，利用(21)，我们就证明了定理 1.

定理 2 对于任一 $f\in L^2(R^m)$，$u(t,x)=(T_tf)(x)$ 关于 $t>0$ 和 $x\in R^m$ 是无穷可微的，并且 $u(t,x)$ 满足扩散方程(1)以及初始条件 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\|u(t,x)-f(x)\|_0=0$.

证明 我们用 $T_t^{(k)}$ 表示 T_t 关于 t 在 $L^2(R^m)$ 中的第 k 阶强导数. 由于 T_t 是 $L^2(R^m)$ 中的一个 (C_0) 类解析半群，所以当 $t>0$ 时，有 $T_t^{(k)}f=\tilde{A}^kT_tf\in L^2(R^m)$ $(k=0,1,\cdots)$. 由于 $\tilde{A}$ 是 A 在 $L^2(R^m)$ 中的最小闭扩张，所以我们知道，如果我们在分布意义下使用微分算子 A^k，那么，对于固定的 $t>0$ 就有 $A^kT_tf\in L^2(R^m)$ $(k=0,1,2,\cdots)$. 因此，由第六章 § 9 中的 Friedrichs 定理的系可知，对于固定的 $t>0$，$u(t,x)$ 在调整了它在某个测度为零的集合上的值之后就等于一个 $C^\infty(R^m)$ 的函数.

因为有估计式 $\|T_t\|_0\leq e^{(\lambda_0+\gamma_0)t}$，所以容易看出，如果我们在分布意义下把椭圆微分算子

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+A\right)$$

作用于 $u(t,x)$ 任意次之后，则所得到的结果在乘积空间 $\{t;\ 0<t<\infty\}\times R^m$ 中是局部平方可积的. 因此，仍由第六章 § 9 中的 Friedrichs 定理的系可知，$u(t,x)$ 在调整了它在此乘积空间中的某个测度为零的集合上之值以后就等于一个这样的函数，它关于 (t,x) 是 C^∞ 的函数，这里，$t>0$ 而 $x\in R^m$. 因此，我们可以把 $u(x,t)$ 看成方程(1)满足初始条件 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\|u(t,x)-f(x)\|_0=0$ 的一个真解.

注 上面得到的解 $u(t,x)$ 满足"正向的和反向的唯一延拓性"：

如果对某个固定的 $t_0>0$，在某个开集 $G\subseteq R^m$ 上有 $u(t_0,x)\equiv 0$，则对于每个 $t>0$ 和每个 $x\in G$，都有 $u(t,x)=0$. (22)

证明 因为 T_t 是一个 (C_0) 类的解析半群，所以，对某个充分小的 h，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_{t_0+h}f-\sum_{k=0}^{n}(k!)^{-1}h^kA^kT_{t_0}f\right\|_0=0.$$

于是，象在关于 $L^2(R^m)$ 空间的完备性的证明中那样，存在一个自然数的序列 $\{n'\}$，使得

$$u(t_0+h,x)=\lim_{n'\to\infty}\sum_{k=0}^{n'}(k!)^{-1}h^kA^ku(t_0,x) \text{ 对 a.e. } x\in R^m \text{ 成立.}$$

根据在 (22) 中所给出的假设可知，在 G 中有 $A^ku(t_0,x)=0$，从而在 G 中对充分小的 h 必定有 $u(t_0+h,x)=0$. 重复这种讨论，我们看见(22)的结论是正确的.

参 考 文 献

本节的结果取自 K. Yosida[21]. 关于"正向的和反向的唯一延拓性" (22)，我们还有更精确的结果，即对于每个 $t>0$ 和每个 $x\in R^m$，都有 $u(t,x)=0$. S. Mizohata[3] 证明了扩散方程的解 $u(t,x)$ 的一个"空间唯一延拓性"，即如果对一切 $t>0$ 和一切 $x\in G$ 有 $u(t,x)=0$，则对一切 $t>0$ 和一切 $x\in R^m$ 有 $u(t,x)=0$. 关于上面得到的半群 T_t 的解析性，也可见 R. S. Phillips[6]. 这里要指出，热传导方程 $\partial u/\partial t=\Delta u$ 的解的唯一延拓性首先是由 H. Yamabe-S. Itô[1] 提出并解

决了的.

对抛物方程,从耗散算子论的观点出发,已讨论得相当完全. 见 R. S. Phillips[7].

§2. 紧黎曼空间中的扩散方程的积分

设 R 是一个连通的、可定向的 m 维 C^∞ 的黎曼空间,其度量为

$$ds^2=g_{ij}(x)dx^i dx^j. \tag{1}$$

设 A 是 R 中的一个具有实值的 C^∞ 系数的二阶线性偏微分算子:

$$A=a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2}$$

我们假设 a^{ij} 是一个对称的反变张量,并设 $b^i(x)$ 在坐标变换 $(x^1, x^2, \cdots, x^m)\to(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^m)$ 之下满足这种变换法则

$$\bar{b}^i=b^k\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}+a^{kj}\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^k\partial x^j}, \tag{3}$$

所以值 $(Af)(x)$ 与局部坐标的选择无关地被确定. 我们进一步假设 A 在这种意义下是严格椭圆的,即存在正的常数 λ_0 和 μ_0,使得

$$\mu_0\sum_{j=1}^m\xi_j^2\geqq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqq\lambda_0\sum_{j=1}^m\xi_j^2 \text{ 对每个实向量 } (\xi_1, \cdots, \xi_m) \text{ 和每个 } x\in R \text{ 成立}. \tag{4}$$

关于扩散方程,我们考虑在 R 上的大范围的 Cauchy 问题: 寻求解 $u(t,x)$,使得

$$\partial u/\partial t=Au,\quad t>0,\quad u(0,x)=f(x), \text{ 这里 } f(x) \text{ 是 } R \text{ 上的一个已知函数}. \tag{5}$$

我们要证明

定理 如果 R 没有边界且是紧的, 则方程(5)对任一初始函数 $f\in C^\infty(R)$ 均有唯一确定的解 $u(t,x)$,它对于 (t,x) 是 C^∞ 的函数,这里 $t>0$ 而 $x\in R$. 此解可以表示为

$$u(t,x)=\int_R P(t,x,dy)f(y), \tag{6}$$

其中,$P(t,x,E)$ 是 R 上的 Markov 过程的转移概率.

证明 我们用 $C(R)$ 表示 R 上的实值连续函数 $f(x)$ 所成的 B-空间, 其范数为 $\|f\|=\sup_x|f(x)|$. 我们首先证明

$$\text{对任一 } f\in C^\infty(R) \text{ 和任一 } n>0, \text{ 均有}$$
$$\max_x h(x)\geqq f(x)\geqq\min_x h(x),\quad \text{这里 } h(x)=f(x)-n^{-1}(Af)(x). \tag{7}$$

假定 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得它的极大值. 在 x_0 处,我们选取一个局部坐标系统, 使得 $a^{ij}(x_0)=\delta_{ij}$ ($=1$ 或 0,当 $i=j$ 或 $i\neq j$ 时). 因为有条件(4),所以能够选出这种局部坐标系. 由于在极大点 x_0 处,有

$$\frac{\partial f}{\partial x_0^i}=0 \quad\text{和}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial(x_0^i)^2}\leqq 0,$$

所以

$$h(x_0)=f(x_0)-n^{-1}(Af)(x_0)$$
$$=f(x_0)-n^{-1}b^i(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0^i}-n^{-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial (x_0^i)^2}\geqq f(x_0).$$

因此，$\max_x h(x)\geqq f(x)$. 类似地，我们有 $f(x)\geqq \min_x h(x)$.

我们把 A 看成一个由 $D(A)=C^\infty(R)\subseteqq C(R)$ 入 $C(R)$ 内的算子. 于是，由 (7) 可知，对于 $n>0$，存在逆算子 $(I-n^{-1}A)^{-1}$，并且在值域 $R(I-n^{-1}A)=(I-n^{-1}A)\cdot D(A)$ 中对于 g 有 $\|(I-n^{-1}A)^{-1}g\|\leqq\|g\|$. 对于充分大的 n，此值域在 $C(R)$ 中是强稠密的. 这是因为，和在前一节中一样，我们有结果：对于任一 $g\in C^\infty(R)$ 和对于充分大的 $n>0$，方程 $u-n^{-1}Au=g$ 有一个唯一确定的解 $u\in C^\infty(R)$. 因为，根据黎曼空间 R 的紧性，上一节中有关分部积分的引理 1 能适用于我们的无边界的黎曼空间 R. 此外，$C^\infty(R)$ 在 $C(R)$ 中是强稠密的，这可以由 $C(R)$ 中的函数的正则化看出来(见第一章 §1 中的命题 8).

于是，算子 A 在 $C(R)$ 中的最小闭扩张 $\bar{A}$ 满足条件：

$$\begin{cases}\text{对于充分大的 } n>0\text{，预解式 }(I-n^{-1}\bar{A})^{-1}\\ \text{存在，并且作为一个由 } C(R) \text{ 入 } C(R) \text{ 内}\\ \text{的有界线性算子，有 }\|(I-n^{-1}\bar{A})^{-1}\|\leqq 1,\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}\text{如果在 } R \text{ 上有 } h(x)\geqq 0\text{，则在 } R \text{ 上就有}\\ ((I-n^{-1}\bar{A})^{-1}h)(x)\geqq 0,\end{cases}\tag{9}$$

$$(I-n^{-1}\bar{A})^{-1}\cdot 1=1.\tag{10}$$

由(9)给出的算子 $(I-n^{-1}\bar{A})^{-1}$ 的正性，从(7)式可以清楚地看出来. 方程(10)可由 $A\cdot 1=0$ 得到.

所以 $\bar{A}$ 是 $C(R)$ 中 (C_0) 类的收缩半群 T_t 的无穷小生成元. 同上一节一样，由 A 的严格椭圆性可以看出，对于任一 $f\in C^\infty(R)$，函数 $u(t,x)=(T_tf)(x)$ 关于 (t,x) 是一个 C^∞ 的函数，这里 $t>0$ 而 $x\in R$，从而 $u(t,x)$ 是(5)的一个真解.

由于 $C(R)$ 空间的对偶空间是 R 中的 Baire 测度空间，所以，注意到(9)和(10)，我们就容易证明定理的后一部分了.

§3. 欧几里得空间 R^m 中的波动方程的积分

考虑波动方程

$$\partial^2u/\partial t^2=Au,\quad -\infty<t<\infty,\tag{1}$$

其中，微分算子

$$A=a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+c(x)\quad (a^{ij}(x)=a^{ji}(x))\tag{2}$$

在 m 维欧几里得空间 R^m 中是严格椭圆的. 我们假设实值的 C^∞ 系数 a、b 和 c 满足第十四章 §1 中的条件(3)和(4). 同那里的作法一样，我们用 $\hat{H}_0^1$ 表示一切实值的 $C_0^\infty(R^m)$ 函数 $f(x)$ 所成的空间其范数为

$$\|f\|_1=\left(\int_{R^m}f^2\,dx+\sum_{j=1}^{m}\int_{R^m}f^2_{x_j}\,dx\right)^{1/2},$$

又令 H_0^1(和 H_0^0)是 $\hat{H}_0^1$ 关于范数 $\|f\|_1$ $\left(和关于范数 \|f\|_0=\left(\int_{R^m}f^2\,dx\right)^{1/2}\right)$的完备化空间.

引理 对属于 $\hat{H}_0^1$ 的任何元素对 $\{f, g\}$, 如果整数 n 使得 $|n^{-1}|$ 充分小, 则方程

$$\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}-n^{-1}\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{3}$$

有一个唯一确定的解 $\{u, v\}$, u 和 $v\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)$, 且此解满足估计式

$$((u-\alpha_0Au, u)_0+\alpha_0(v, v)_0)^{1/2}\leqq(1-\beta|n|^{-1})^{-1}((f-\alpha_0Af, f)_0+\alpha_0(g, g)_0)^{1/2} \tag{4}$$

其中, 正的常数 α_0 和 β 是与 n 和 $\{f, g\}$ 无关的.

证明 设 $u_1\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)$ 和 $v_1\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)$ 分别是

$$u_1-n^{-2}Au_1=f \quad 和 \quad v_1-n^{-2}Av_1=g \tag{5}$$

的解. 对于充分小的 $|n^{-1}|$, 这样的解 u_1, v_1 的存在性已经在第十四章 § 1的引理 2 中证明过了. 这时,

$$u=u_1+n^{-1}v_1, \quad v=n^{-1}Au_1+v_1 \tag{6}$$

就满足(3), 亦即有 $u-n^{-1}v=f$, $v-n^{-1}Au=g$.

下面, 我们来证明(4). 我们注意到

$Au=n(v-g)\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)\subseteqq H_0^0$, 从而根据 $f, g\in C_0^\infty(R^m)$, 有

$$Av=n(Au-Af)\in H_0^1\cap C^\infty(R^m)\subseteqq H_0^0.$$

因此, 由(3)可知

$$\begin{aligned}(f-\alpha_0Af, f)_0&=(u-n^{-1}v-\alpha_0A(u-n^{-1}v), u-n^{-1}v)_0\\ &=(u-\alpha_0Au, u)_0-2n^{-1}(u, v)_0+\alpha_0n^{-1}(Au, v)_0+\alpha_0n^{-1}(Av, u)_0\\ &\quad+n^{-2}(v-\alpha_0Av, v)_0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\alpha_0(g, g)_0&=\alpha_0(v-n^{-1}Au, v-n^{-1}Au)_0\\ &=\alpha_0(v, v)_0-\alpha_0n^{-1}(v, Au)_0-\alpha_0n^{-1}(Au, v)_0+\alpha_0n^{-2}(Au, Au)_0.\end{aligned}$$

利用取极限的办法, 我们可以证明第十四章 § 1 中的(9)、(10)和(11)对于 $f=u$ 和 $g=v$ 是成立的. 因此, 由第十四章 § 1 中的(12)可知, 存在一个正的常数 β, 对于充分大的 $|n|$, 满足

$$\begin{aligned}&((f-\alpha_0Af, f)_0+\alpha_0(g, g)_0)^{1/2}\\ &\geqq((u-\alpha_0Au, u)_0+\alpha_0(v, v)_0-\alpha_0|n^{-1}||(Au, v)_0-(Av, u)_0|-2|n^{-1}||(u, v)_0|)^{1/2}\\ &\geqq(1-\beta|n^{-1}|)((u-\alpha_0Au, u)_0+\alpha_0(v, v)_0)^{1/2}.\end{aligned}$$

上述关于属于 $H_0^1\cap C^\infty(R^m)$ 的解 $\{u, v\}$ 的估计式表明, 这样的解由 $\{f, g\}$ 唯一确定.

系 考虑向量

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\{u, v\}', 其中\ u\in H_0^1\ 而\ v\in H_0^0. \tag{7}$$

这种向量形成的乘积空间 $H_0^1\times H_0^0$ 是一个 B-空间，其范数定义为

$$\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|=\|\{u,v\}'\|=(B(u,u)+\alpha_0(v,v)_0)^{1/2},\tag{8}$$

其中 $B(f,g)$ 是关于 $f,g\in\hat{H}_0^1$ 的双线性泛函

$$\hat{B}(f,g)=(f-\alpha_0Af,g)_0$$

在范数$\|\ \|_1$之下的连续延拓．我们知道，$B(u,u)^{1/2}$ 等价于范数$\|u\|_1$（见第十四章§1）：

$$\alpha_0\delta\|u\|_1^2\leq B(u,u)\leq(1+\alpha_0\gamma)\|u\|_1^2.\tag{9}$$

设算子

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}0&I\\A&0\end{pmatrix}\tag{10}$$

的定义域 $D(\mathfrak{A})$ 是由向量 $\{u,v\}'\in H_0^1\times H_0^0$ 组成的，其中 $u,v\in H_0^0$ 是由(6)给出的．这时，引理表明算子

$$\mathfrak{J}-n^{-1}\mathfrak{A},\ 这里\ \mathfrak{J}=\begin{pmatrix}I&0\\0&I\end{pmatrix},$$

的值域包含了所有向量 $\{f,g\}'$，其中 $f,\ g\in\hat{H}_0^1$．因此，算子 $\mathfrak{A}$ 在 $H_0^1\times H_0^0$ 中的最小闭扩张 $\overline{\mathfrak{A}}$ 是这样的算子，即对于充分大的 $|n|$，具有整数参数 n 的算子 $(\mathfrak{J}-n^{-1}\overline{\mathfrak{A}})$ 有一个在 $H_0^1\times H_0^0$ 中处处有定义的逆算子 $(\mathfrak{J}-n^{-1}\overline{\mathfrak{A}})^{-1}$ 且它满足

$$\|(\mathfrak{J}-n^{-1}\overline{\mathfrak{A}})^{-1}\|\leq(1-\beta|n^{-1}|)^{-1}.\tag{11}$$

现在我们就可以来证明

定理　对于任何两个 $C_0^\infty(R^m)$ 函数所成的函数对 $\{f(x),g(x)\}$，方程(1)有一个 C^∞ 的解 $u(t,x)$，它满足初始条件

$$u(0,x)=f(x),\ \ u_t(0,x)=g(x)\tag{12}$$

和估计式

$$(B(u,u)+\alpha_0(u_t,u_t)_0)^{1/2}\leq\exp(\beta|t|)(B(f,f)+\alpha_0(g,g)_0)^{1/2}.\tag{13}$$

注　公式(9)表明，$B(u,u)$ 可以同波（=(1)的解）$u(t,x)$ 的位能相对应，而 $(u_t,u_t)_0$ 可以同波 $u(t,x)$ 的动能相对应．因此，(13)表示，当 t 趋于 $\pm\infty$ 时，波 $u(t,x)$ 的总能量不会比 $\exp(\beta|t|)$ 增长得更快．这是对一般波动方程都成立的一类能量不等式．

定理的证明　估计式(11)表明，$\overline{\mathfrak{A}}$ 是 $H_0^1\times H_0^1$ 中 (C_0) 类的群 T_t 的无穷小生成元，而 T_t 满足

$$\|T_t\|\leq\exp(\beta|t|),\ \ -\infty<t<\infty.\tag{14}$$

根据假设，对于 $k=0,1,2,\cdots$，我们有

$$\overline{\mathfrak{A}}^k\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}=\mathfrak{A}^k\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}\in C_0^\infty(R^m)\times C_0^\infty(R^m)\subseteq H_0^1\times H_0^1.$$

于是，如果我们令

$$\begin{pmatrix}u(t,x)\\v(t,x)\end{pmatrix}=T_t\begin{pmatrix}f(x)\\g(x)\end{pmatrix},$$

则由$\overline{\mathfrak{A}}$同T_t的可交换性可知，对于$k=0, 1, 2, \cdots$，有

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \frac{\partial^k T_t}{\partial t^k}\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{A}}^k \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} \in H_0^1 \times H_0^0.$$

这里，我们用$\partial^k T_t/\partial t^k$表示在$H_0^1 \times H_0^0$中的第$k$阶强导数．所以，同第十四章§1中的定理2的证明一样，根据$H_0^1 \subseteq H_0^0 = L^2(R^m)$和算子$A$的严格椭圆性，我们看出$u(t, x)$关于$(t, x)$是$C^\infty$的函数，这里$-\infty < t < \infty$，$x \in R^m$，并且$u(t, x)$还满足方程(1)和(12)以及估计式(13)．

注 本节的结果出自 K. Yosida[22]．参看 J. L. Lions[1]． P. D. Lax 友善地通知本书著者，本节给出的积分方法同他在《文摘》180（美国数学会会刊 **58**, 192(1952)）所发表的方法是十分类似的．这里，还得指出，我们的方法经过修改后可以用来对在黎曼空间的一个开域中的波动方程进行积分．另外有人以耗散半群理论为基础来研究波动方程的积分．见 R. S. Phillips[8] 和[9]．此方法同 K. Friedrichs [2] 的正对称组的理论有密切的关系．也可以参看 P. Lax-R. S. Phillips[3]．

§4. B-空间中的非时齐发展方程的积分

我们将要讨论方程

$$dx(t)/dt = A(t)x(t), \quad a \leq t \leq b \tag{1}$$

的积分．这里，未知函数$x(t)$是B-空间X的一个元素，它依赖于一个实参数t，而$A(t)$是一个已知的、一般是无界的线性算子，其定义域$D(A(t))$和值域$R(A(t))$都在X内且还依赖于t．

T. Kato[3]、[4]曾经成功地解决了(1)的积分问题．他假设有以下四个条件：

(i) 定义域$D(A(t))$与t无关，并且在X内是强稠密的，同时，对$\alpha > 0$，预解式$(I - \alpha A(t))^{-1}$存在且是一个属于$L(X, X)$的有界线性算子，其范数≤ 1．

(ii) 算子$B(t, s) = (I - A(t))(I - A(s))^{-1}$的范数对$t \geqq s$而言，是一致有界的．

(iii) $B(t, s)$的范数，至少对于某个s来说，关于t是有界变差的，即是说，对$[a, b]$的每一种分割$s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$都有

$$\sum_{j=0}^{n-1} \| B(t_{j+1}, s) - B(t_j, s) \| \leq N(a, b) < \infty.$$

(iv) $B(t, s)$，至少对于某个s来说，关于t是弱可微的，而$\partial B(t, s)/\partial t$关于$t$是强连续的．

在这些条件下，Kato 证明了极限

$$U(t, s)x_0 = \underset{\max|t_{j+1} - t_j| \to 0}{s\text{-}\lim} \prod_{j=n-1}^{0} \exp((t_{j+1} - t_j)A(t_j))x_0$$

对每一个$x_0 \in X$都存在并且至少对于$x_0 \in D(A(s))$来说，给出了(1)的满足初始条件$x(s) = x_0$的唯一解．

因此，Kato 的方法是 Cauchy 关于常微分方程$dx(t)/dt = a(t)x(t)$的古典折线法的一个延伸．虽然他的方法在想法上是非常简单和自然的，但其证明却是比较冗长的，这是因为它涉及区间$[s, t]$的一般的分割．Kato[3]指出，当空间X是自反空间时，此证明可以简化一些．对于

自反的 B-空间的情形,也可见 K. Yosida[28].

在这一节中,我们将对于一个固定的区间,譬如说$[0,1]$,进行与 s 和 t 无关的一种等长度的分割,其目的是把 Kato 原先的方法加以改进,以便得出一种十分简单的表现形式.

我们假设有下面四个条件(它们实质上同上述 Kato 的条件(i)至(iv)是一样的):

$$D(A(t))\text{与 } t \text{ 无关且在 } X \text{ 中是稠密的.} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\text{对每个 } \lambda\geqq 0 \text{ 和 } t,\ 0\leqq t\leqq 1, \text{ 预解式}(\lambda I-A(t))^{-1}\\ \text{作为属于 } L(X,X) \text{ 的一个算子是存在的,}\\ \text{并且对于 } \lambda>0, \text{ 有} \|(\lambda I-A(t))^{-1}\|\leqq\lambda^{-1}.\end{cases} \tag{3}$$

$$A(t)A(s)^{-1}\in L(X,X), \text{ 当 } 0\leqq s,\ t\leqq 1 \text{ 时成立。} \tag{4}$$

对于每个 $x\in X$,

$$\begin{cases}(t-s)^{-1}C(t,\ s)x=(t-s)^{-1}(A(t)A(s)^{-1}-I)x, \text{ 关于 } t \text{ 和 } s,\\ t\neq s, \text{ 是有界的和一致强连续的, 并且 } s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} k\cdot C\left(t,\ t-\dfrac{1}{k}\right)x\\ =C(t)x \text{ 关于 } t \text{ 是一致地存在的, 因而 } C(t)\in L(X,X) \text{ 关于 } t \text{ 是}\\ \text{强连续的.}\end{cases} \tag{5}$$

注 列入条件(4)是为了方便起见. 它可以由(2)和闭图象定理推导出来, 这是因为,由(3)可知 $A(s)$ 是一个闭线性算子. 此外, 条件 (2) 和 (3) 意味着 $A(s)$ 是一个 (C_0) 类的收缩半群 $\{\exp(tA(s));\ t\geqq 0\}$的无穷小生成元. 于是我们有(见第九章):

$$\exp(tA(s))x=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\exp(tA(s)(I-n^{-1}A(s))^{-1})x \quad \text{对 } t,\ 0\leqq t\leqq 1, \text{一致成立;} \tag{6}$$

$$\exp(t_1A(s))\cdot\exp(t_2A(s))=\exp((t_1+t_2)A(s)); \tag{7}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\exp(tA(s))y}{dt}=A(s)\exp(tA(s))y=\exp(tA(s))\cdot A(s)y,\ y\in D(A(s)),\\ \text{这里, } d/dt \text{ 表示在 } X \text{ 的强拓扑下的微分;}\end{cases} \tag{8}$$

$$s\text{-}\lim_{t\to t_0}\exp(tA(s))x=\exp(t_0A(s))x. \tag{9}$$

现在,我们就可以来叙述我们的结果了.

定理 1 对任一正整数 k 和 $0\leqq s\leqq t\leqq 1$, 定义算子 $U_k(t,s)\in L(X,X)$ 如下:

$$\begin{cases}U_k(t,s)=\exp\left((t-s)A\left(\dfrac{i-1}{k}\right)\right), \text{ 当 } \dfrac{i-1}{k}\leqq s\leqq t\leqq\dfrac{i}{k} \text{时}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1\leqq i\leqq k),\\ U_k(t,r)=U_k(t,s)U_k(s,r), \text{ 当 } 0\leqq r\leqq s\leqq t\leqq 1 \text{ 时.}\end{cases} \tag{10}$$

于是,对于每个 $x\in X$ 和 $0\leqq s\leqq t\leqq 1$,

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty}U_k(t,s)x=U(t,s)x \quad \text{对 } t \text{ 和 } s \text{ 一致地存在.} \tag{11}$$

此外,如果 $y\in D(A(0))$, 则 Cauchy 问题

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t),\quad x(0)=y \quad \text{和} \quad x(t)\in D(A(t)),\quad 0\leqq t\leqq 1 \tag{1'}$$

的解是 $x(t)=U(t,0)y$, 且它还满足估计式$\|x(t)\|\leqq\|y\|$.

证明 根据(3)、(6)和(10)，我们得到

$$\|U_k(t,s)x\| \leqq \|x\| \quad (k=1,2,\cdots;0\leqq s\leqq t\leqq 1;x\in X). \tag{12}$$

我们还需要关于算子

$$W_k(t,s)=A(t)U_k(t,s)A(s)^{-1} \tag{13}$$

的下述估计式：

$$\begin{cases}\|W_k(t,s)x\|\leq(1+k^{-1}N)^2\cdot\exp(N(t-s))\cdot\|x\|,\\ N=\sup\limits_{0\leq s,t\leq 1,s\neq t}\|(t-s)^{-1}C(t,s)\|,\end{cases} \tag{14}$$

它是整个证明的关键. 为了证明 (14)，注意到 (10) 和可交换性 $A(s)^{-1}\exp((t-s)A(s))=\exp((t-s)A(s))A(s)^{-1}$，我们可以把 $W_k(t,s)$ 改写为：

$$\begin{aligned}W_k(t,s)=&A(t)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)^{-1}U_k\left(t,\frac{[kt]}{k}\right)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)A\left(\frac{[kt]-1}{k}\right)^{-1}U_k\left(\frac{[kt]}{k},\frac{[kt]-1}{k}\right)\cdots\\ &\cdots A\left(\frac{[ks]+2}{k}\right)A\left(\frac{[ks]+1}{k}\right)^{-1}U_k\left(\frac{[ks]+2}{k},\frac{[ks]+1}{k}\right)A\left(\frac{[ks]+1}{k}\right)\\ &\times A\left(\frac{[ks]}{k}\right)^{-1}U_k\left(\frac{[ks]+1}{k},s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)A(s)^{-1}.\end{aligned}$$

把右端展开，再注意到(10)，得

$$\begin{aligned}W_k(t,s)=&\left(I+C\left(t,\frac{[kt]}{k}\right)\right)\Bigg\{U_k(t,s)+\sum_{ku=[ks]+1}^{[kt]}U_k(t,u)C\left(u,u-\frac{1}{k}\right)U_k(u,s)\\ &+\sum_{kv=[ks]+1}^{[kt]}U_k(t,v)C\left(v,v-\frac{1}{k}\right)\sum_{ku=[ks]+1}^{[kv]}U_k(v,u)C\left(u,u-\frac{1}{k}\right)U_k(u,s)+\cdots\Bigg\}\\ &\times\left(I+C\left(\frac{[ks]}{k},s\right)\right),\end{aligned}$$

即是说，

$$\begin{cases}W_k(t,s)=\left(I+C\left(t,\frac{[kt]}{k}\right)\right)\{U_k(t,s)+W_k^{(1)}(t,s)+W_k^{(2)}(t,s)+\cdots\}\\ \qquad\qquad\times\left(I+C\left(\frac{[ks]}{k},s\right)\right),\\ W_k^{(1)}(t,s)=\sum\limits_{ku=[ks]+1}^{[kt]}U_k(t,u)C\left(u,u-\frac{1}{k}\right)U_k(u,s),\\ W_k^{(m+1)}(t,s)=\sum\limits_{ku=[ks]+1}^{[kt]}U_k(t,u)C\left(u,u-\frac{1}{k}\right)W_k^{(m)}(u,s),\quad(m=1,2,\cdots,[kt]-1).\end{cases} \tag{15}$$

由(14)可知$\left\|C\left(u,u-\frac{1}{k}\right)x\right\|\leqq\frac{1}{k}N\|x\|$. 于是，根据(12)，我们可以断定

$$\begin{cases}\|W_k^{(1)}(t,s)x\|\leqq(t-s)N\|x\|,\\ \|W_k^{(m)}(t,s)x\|\leqq\dfrac{(t-s)^m}{m!}N^m\|x\|.\end{cases} \tag{16}$$

再结合N的定义，我们就可以由(12)证得(14)，

我们还附带地证明了

$$当\ y\in D(A(s))时, U_k(t,s)y\in D(A(t)). \tag{17}$$

于是

$$U_k(t,s)y=\exp\left(\left(t-\frac{[kt]}{k}\right)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)\right)U_k\left(\frac{[kt]}{k},s\right)y$$

在 $t\neq\frac{i}{k}(i=0,1,\cdots,k)$ 可微，并且

$$\frac{dU_k(t,s)y}{dt}=A\left(\frac{[kt]}{k}\right)U_k(t,s)y,\ y\in D(A(0)). \tag{18}$$

类似地，$U_k(t,s)y$ 在 $s\neq\frac{i}{k}(i=0,1,\cdots,k)$ 可微，并且

$$\frac{dU_k(t,s)y}{ds}=-U_k(t,s)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)y,\quad y\in D(A(0)). \tag{19}$$

这些导数，对于 t 和 s 而言，除去在 $t=\frac{i}{k}$ 和 $s=\frac{i}{k}$ 等处之外，都是有界的和强连续的. 为了证明此结论，我们把(18)的右端改写为 $=C\left(\frac{[kt]}{k},t\right)W_k(t,s)A(s)A(0)^{-1}x, y=A(0)^{-1}x$，然后利用(5)、(9)、(12)、(14)和(15)就成了；对于(19)可类似地证明.

因为由(9)可知；$U_n(t,s)U_k(s,0)A(0)^{-1}x$ 对 s 是强连续的，所以，注意到 $U_k(s,0)A(0)^{-1}x\in D(A(s))$ 以及(18)和(19)，就有

$$\begin{aligned}(U_k(t,0)-U_n(t,0))A(0)^{-1}x&=[U_n(t,s)U_k(s,0)A(0)^{-1}x]_{s=0}^{s=t}\\&=\int_0^t\frac{d}{ds}\{U_n(t,s)U_k(s,0)A(0)^{-1}x\}ds\\&=\int_0^t U_n(t,s)\left\{A\left(\frac{[ks]}{k}\right)-A\left(\frac{[ns]}{n}\right)\right\}A\left(\frac{[ks]}{k}\right)^{-1}A\left(\frac{[ks]}{k}\right)U_k(s,0)A(0)^{-1}xds\\&=\int_0^t -U_n(t,s)C\left(\frac{[ns]}{n},\frac{[ks]}{k}\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)A(s)^{-1}W_k(s,0)xds.\end{aligned}$$

于是，由(12)和(14)可得

$$\begin{aligned}&\|U_k(t,0)A(0)^{-1}x-U_n(t,0)A(0)^{-1}x\|\\&\leq\int_0^t\left\|C\left(\frac{[ns]}{n},\frac{[ks]}{k}\right)\left(I+C\left(\frac{[ks]}{k},s\right)\right)W_k(s,0)x\right\|ds\\&\leq N\int_0^t\left|\frac{[ks]}{k}-\frac{[ns]}{n}\right|\cdot\left\|\left(I+C\left(\frac{[ks]}{k},s\right)\right)W_k(s,0)x\right\|ds\\&\leq N\int_0^t\left|\frac{[ks]}{k}-\frac{[ns]}{n}\right|\cdot\left(1+N\left|s-\frac{[ks]}{k}\right|\right)\left(1+\frac{1}{k}N\right)\exp(Ns)\cdot\|x\|ds.\end{aligned}$$

这就证明了

$s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}U_k(t,0)A(0)^{-1}x$ 对 $t, 0\leq t\leq 1$，是一致存在的，从而，利用(2)和(12)就可以证明，对每个 $x\in X$，

$s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} U_k(t, 0)x = U(t, 0)x$ 对 t，$0\leqq t\leqq 1$，是一致存在的．用类似的推理可以证明，对每个 $x\in X$，

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k(t, s)x = U(t, s)x \text{ 对 } t \text{ 和 } s,\ 0\leqq s\leqq t\leqq 1, \text{一致存在.} \tag{20}$$

所以，由(9)可知，$U(t, s)x$ 关于 t 和 s 是一致强连续的．

注意到(15)、(16)和(20)，我们还容易证明当 $k\to\infty$ 时，$W_k(t, 0)x$ 关于 t 是有界强收敛的，并且有

$$\begin{cases} s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} W_k(t, 0)x = W(t, 0)x = U(t, 0)x + W^{(1)}(t, 0)x + W^{(2)}(t,0)x\cdots, \\ \text{其中,}\ W^{(1)}(t, 0)x = \int_0^t U(t, s)C(s)U(s, 0)x\,ds, \\ \qquad \cdots \\ W^{(m+1)}(t, 0)x = \int_0^t U(t, s)C(s)W^{(m)}(s, 0)x\,ds\ (m=1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{21}$$

所以，如果 $y\in D(A(0))$，则极限

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k(t, 0)y = U(t, 0)y \text{ 和 } s\text{-}\lim_{k\to\infty} A(t)U_k(t, 0)y = W(t, 0)A(0)y$$

对于 t 都有界且一致地存在，并且 $W(t, 0)A(0)y$ 关于 t 是一致强连续的．由(3)可知 $A(t)$是一个闭线性算子，于是我们就证明了，对每个 $y\in D(A(0))$，

$$\begin{cases} U(t, 0)y\in D(A(t)) \text{且} \\ A(t)U(t, 0)y = s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} A(t)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)^{-1} A\left(\frac{[kt]}{k}\right)U_k(t, 0)y = W(t, 0)A(0)y, \\ \text{这里 } s\text{-}\lim \text{ 对 } t,\ 0\leqq t\leqq 1, \text{有界且一致地存在.} \end{cases} \tag{22}$$

于是，在

$$U_k(t, 0)y - y = \int_0^t \left(\frac{d}{ds}U_k(s, 0)y\right)ds = \int_0^t A\left(\frac{[ks]}{k}\right)U_k(s, 0)y\,ds$$

之中令 $k\to\infty$，我们就得到

$$U(t, 0)y - y = \int_0^t A(s)U(s, 0)y\,ds.$$

曾经在(22)中证明过，此积分中的被积函数关于 s 是强连续的，从而我们就证明了 Cauchy 问题(1′)的解为 $x(t) = U(t, 0)y$．

注　定理 1 及其证明出自 K. Yosida[30]．这里要指出，在 T. Kato[3]中，利用求解一个 Volterra 型的积分方程，曾经得到过一个类似于我们的(14)的不等式．在(10)中出现的把区间[0, 1]等长分割的恰当性是在 J. Kisyński[1]的论文中提出的．

(1′) 的精确解 $x(t) = U(t, 0)y$ 的近似函数 $x_k(t) = U_k(t, 0)y$ 是在(1′)中给出的微分方程的一种差分近似．然而，常见的差分近似是采用后向差分格式

$$\frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = A(t_j)x(t_j). \tag{23}$$

此格式给出

$$x(t_j)=(I-(t_j-t_{j-1})A(t_j))^{-1}x(t_{j-1}).$$

所以，在(10)的启发下，我们作出近似函数

$$\begin{cases} V_k(t,s)=\left(I-\left(t-\frac{[kt]}{k}\right)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)\right)^{-1}\left(I-\frac{1}{k}A\left(\frac{[kt]-1}{k}\right)\right)^{-1}\cdots \\ \qquad\cdots\left(I-\frac{1}{k}A\left(\frac{[ks]+1}{k}\right)\right)^{-1}\left(I-\left(\frac{[ks]-1}{k}-s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right)^{-1}, \\ \qquad\qquad (0\leqq s\leqq t\leqq 1). \end{cases} \tag{10'}$$

从数值分析的观点来看，此近似函数 $V_k(t,s)$ 要比近似函数 $U_k(t,s)$ 实用得多，这是因为在构造近似函数 $U_k(t,s)$ 时，我们要依赖于 $\exp(tA(s))$ 的构造.

我们来证明(参看 T. Kato[10]的最后一节)

定理 2 在同样的条件 (2) 至 (5) 之下，由 (1′) 给出的 Cauchy 问题对每一个初始值 $y\in D(A(0))$ 都有解

$$x(t)=s\text{-}\lim_{k\to\infty}V_k(t,0)y.$$

证明 由(3)可得

$$\|V_k(t,s)x\|\leqq\|x\| \qquad (k=1,2,\cdots;0\leqq s\leqq t\leqq 1;x\in X). \tag{12'}$$

其次，从

$$V_k(t,s)=V_k\left(t,\frac{[ks]+1}{k}\right)\left(I-\left(\frac{[ks]+1}{k}-s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right)^{-1}$$

我们可以看出，$V_k(t,s)y$ 在 $s\neq\frac{i}{k}(i=0,1,\cdots,k)$ 处是可微的. 并且

$$\frac{dV_k(t,s)y}{ds}=-V_k(t,s)\left(I-\left(\frac{[ks]+1}{k}-s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right)^{-1}A\left(\frac{[ks]}{k}\right)y. \tag{19'}$$

由 $y\in D(A(0))=D(A(s))$、(3)以及(12′)，我们可以看出，此导数对于 s，除去 $s=\frac{i}{k}$ 之外，是有界的和强连续的. 因为 $V_k(t,s)U_k(s,0)A(0)^{-1}x$ 对 s 是强连续的，所以在注意到 $U_k(s,0)A(0)^{-1}x\in D(A(0))$ 这一事实之后，我们就得到

$$\begin{aligned}
(U_k(t,0)-V_k(t,0))A(0)^{-1}x&=[V_k(t,s)U_k(s,0)A(0)^{-1}x]_{s=0}^{s=t}\\
&=\int_0^t\frac{d}{ds}(V_k(t,s)U_k(s,0)A(0)^{-1}x)ds\\
&=\int_0^t V_k(t,s)\left(A\left(\frac{[ks]}{k}\right)-A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\left(I-\left(\frac{[ks]+1}{k}-s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right)^{-1}\right)U_k(s,0)A(0)^{-1}x\,ds\\
&=\int_0^t V_k(t,s)\left(I-\left(I-\left(\frac{[ks]+1}{k}-s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right)^{-1}\right)\left(I+C\left(\frac{[ks]}{k},s\right)\right)W_k(s,0)x\,ds.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\|(U_k(t,0)-V_k(t,0))A(0)^{-1}x\|\\
&\leqq\int_0^t\left\|\left(I-\left(I-\left(\frac{[ks]+1}{k}-s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right)^{-1}\right)\left(I+C\left(\frac{[ks]}{k},s\right)\right)W_k(s,0)x\right\|ds.
\end{aligned} \tag{24}$$

由(5)和(21)可知

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(I+C\left(\frac{[ks]}{k}, s\right)\right)W_k(s, 0)x=W(s, 0)x \text{ 对 } s, 0\leqq s\leqq 1, \text{一致成立.} \tag{25}$$

另一方面，对于 $z\in D(A(s))$，有

$$-\left(I-\left(I-\left(\frac{[ks]}{k}-s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right)^{-1}\right)z$$

$$=\left(\frac{[ks]}{k}-s\right)\left(I-\left(\frac{[ks]}{k}-s\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)\right)^{-1} A\left(\frac{[ks]}{k}\right)A(s)^{-1}A(s)z.$$

从(3)和(5)，我们可以看出，当 $k\to\infty$ 时，上式强趋近于 0. (24)中的被积函数对 k 和 s 是有界的. 因此，由于 $D(A(s))=D(A(0))$ 在 X 内是稠密的，所以由(25)可知

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty}(U_k(t, 0)-V_k(t, 0))A(0)^{-1}x=0.$$

从而，藉助于定理 1，我们就证明了定理 2.

注 上述证明是由 H. Fujita 告知的，他是受了 T. Kato[10]的最后一节的启发.

其它研究方法 K. Yosida[23]和[28]提出了一种想法，即利用

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=A(t)\left(I-\frac{1}{k}A(t)\right)^{-1}x_k(t),\quad x_k(0)=y\in D(A(0)),\quad 0\leqq t\leqq 1 \tag{1''}$$

来逼近 Cauchy 问题(1'). J. Kysiński[1]把 Cauchy 的折线法应用到方程(1'')上证明了$\{x_k(t)\}$强收敛于(1')的解. J. L. Lions[2] 提出了积分(1)的另一方法. 他假设 $A(t)$是一个具有依赖于 t 的光滑系数的椭圆微分算子. 他在具体的函数空间中，例如在 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 或由它变形而来的空间中，把方程 (1) 变换为积分形式. 而寻求其分布解. 我们还建议读者去看 O. A. Ladyzhenskaya-I. M. Visik[1]那篇论文，它受到了类似于 Lions 的想法的启示.

§ 5. Tanabe 和 Sobolevski 的方法

设X是一个复 B-空间，并考虑X中具有已知的非齐次项 $f(t)$的发展方程：

$$dx(t)/dt=Ax(t)+f(t),\qquad a\leqq t\leqq b. \tag{1}$$

这时，满足初始条件 $x(a)=x_0\in X$ 的解 $x(t)\in X$可以从齐次方程 $dx/dt=Ax$ 的解 $\exp((t-a)A)x$ 通过所谓的 Duhamel 原理形式地得到，即

$$x(t)=\exp((t-a)A)x_0+\int_a^t \exp((t-s)A)\cdot f(s)ds. \tag{2}$$

这就启发我们，在X中的非时齐方程：

$$dx(t)/dt=A(t)x(t),\qquad a\leqq t\leqq b \tag{3}$$

可以按下述方法去求它的形式解. 我们把方程(3)改写为

$$dx(t)/dt=A(a)x(t)+(A(t)-A(a))x(t). \tag{4}$$

利用公式(2)，可以使满足(4)和初始条件 $x(a)=x_0$ 的解 $x(t)$作为抽象积分方程

$$x(t)=\exp((t-a)A(a))x_0+\int_a^t \exp((t-s)A(s))(A(s)-A(a))x(s)ds \tag{5}$$

的解给出. 利用逐次逼近法形式地求解(5)就可以得到近似解:

$$x_1(t)=\exp((t-a)A(a))x_0.$$
$$\cdots$$
$$x_{n+1}(t)=\exp((t-a)A(a))x_0+\int_a^t \exp((t-s)A(s))(A(s)-A(a))x_n(s)ds.$$

于是，(5)的解 $x(t)$ 可以形式地表示为

$$x(t)=\exp((t-a)A(a))x_0+\int_a^t \exp((t-s)A(s))R(s,a)x_0 ds, \tag{6}$$

其中

$$\begin{cases} R(t,s)=\sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s), \\ R_1(t,s)=(A(t)-A(s))\exp((t-s)A(s)),\ s<t,\ =0,\ s\geqq t, \\ R_m(t,s)=\int_s^t R_1(t,\sigma)R_{m-1}(\sigma,s)d\sigma \qquad (m=2,3,\cdots). \end{cases} \tag{7}$$

H. Tanabe[2]利用第九章§10中给出的解析半群理论证明了上述的形式积分法是合理的。我们遵循 Tanabe 的研究方法，并假设有下述条件：

(8) 对于每个 $t\in[a,b]$，$A(t)$ 是一个闭线性算子，其定义域在 X 中稠密而其值域为 X，并且 $A(t)$ 的预解式集合 $\rho(A(t))$ 包含复 λ-平面上的一个固定的角域 Θ，此角域是由原点 0 加上集合 $\{\lambda;\ -\theta<\arg\lambda<\theta \text{ 而 } \theta>\pi/2\}$ 所组成的。预解式 $(\lambda I-A(t))^{-1}$ 关于 t 是强连续的，而在任一紧集 $\subseteqq\Theta$ 之上关于 λ 是一致强连续的。

(9) 存在正的常数 M 和 N 使得，对于 $\lambda\in\Theta$ 和 $t\in[a,b]$，只要 $|\lambda|>M$ 就有 $\|(\lambda I-A(t))^{-1}\|\leqq N(|\lambda|-M)^{-1}$，并且，如果 λ 为实数，则 $N=1$。

(10) $A(t)$ 的定义域 $D(A(t))$ 与 t 无关，从而由第二章§6中的闭图象定理可知，算子 $A(t)A(s)^{-1}$ 是属于 $L(X,X)$ 的。还假设存在一个正的常数 K 使得，对于 s,t 和 $r\in[a,b]$，有 $\|A(t)A(s)^{-1}-A(r)A(s)^{-1}\|\leqq K|t-r|$。

在这些条件下，我们就可以证明

定理 对任何 $x_0\in X$ 和满足 $a\leqq s\leqq b$ 的 s，方程

$$dx(t)/dt=A(t)x(t),\quad x(s)=x_0,\quad s<t\leqq b \tag{3'}$$

有一个唯一确定的解 $x(t)\in X$。此解可表为

$$x(t)=U(t,s)x(s)=U(t,s)x_0, \quad \text{其中} \tag{11}$$

$$\begin{cases} U(t,s)=\exp((t-s)A(s))+W(t,s), \\ W(t,s)=\int_s^t \exp((t-\sigma)A(\sigma))R(\sigma,s)d\sigma, \text{而 } R(t,s) \text{ 是由(7)给出的}. \end{cases} \tag{12}$$

为了证明上述定理，需要三个引理。

引理 1 $R(t,s)$ 满足

$$\|R(t,s)\|\leqq KC\cdot\exp(KC(t-s)), \tag{13}$$

其中 C 是某个常数，并且 $R(t,s)$ 在 $a\leqq s<t\leqq b$ 中是强连续的。

证明 由(8)和(9)可知，每一个 $A(s)$ 都可以生成一个解析的半群，它可以表示为(见第九

章§10)

$$\exp(tA(s))=(2\pi i)^{-1}\int_{C'}e^{\lambda t}(\lambda I-A(s))^{-1}d\lambda,$$

其中 C' 是 Θ 中的一条光滑围道，它从 $\infty e^{-i\theta}$ 走到 $\infty e^{i\theta}$. (14)

于是，由 $A(s)(\lambda I-A(s))=\lambda(\lambda I-A(s))^{-1}-I$ 可知，对于 $(b-a)>t>0$，有

$$\|\exp(tA(s))\|\leqq C \text{ 和 } \|A(s)\exp(tA(s))\|\leqq Ct^{-1},$$

其中，正的常数 C 同 $t>0$ 和 $s\in[a,b]$ 无关. (15)

由(7)可知

$$R_1(t,s)=(A(t)-A(s))A(s)^{-1}A(s)\exp((t-s)A(s)),\quad t>s,$$

从而，由(10)和(15)可知

$$\|R_1(t,s)\|\leqq KC. \tag{16}$$

由(8)和(14)还容易看出，$R_1(t,s)$ 在 $a\leqq s<t\leqq b$ 中是强连续的. 其次，用归纳法可以得到

$$\begin{aligned}\|R_m(t,s)\|&\leqq\int_s^t\|R_1(t,\sigma)\|\cdot\|R_{m-1}(\sigma,s)\|d\sigma\\&\leqq\int_s^t(KC)^m(\sigma-s)^{m-2}(\underline{|m-2})^{-1}d\sigma\leqq(KC)^m(t-s)^{m-1}(\underline{|m-1})^{-1},\end{aligned}$$

从而可得出(13). 用同样的方法可知，$R(t,s)$ 在 $a\leqq s<t\leqq b$ 中是强连续的.

引理 2 对于 $s<\tau<t$，我们有

$$\|R(t,s)-R(\tau,s)\|\leqq C_1\left(\frac{t-\tau}{t-s}+(t-\tau)\log\frac{t-s}{t-\tau}\right), \tag{17}$$

其中，C_1 是一个同 s、τ 和 t 无关的正的常数.

证明 由(7)可知

$$\begin{aligned}R_1(t,s)-R_1(\tau,s)&=(A(t)-A(\tau))\exp((t-s)A(s))\\&\quad+(A(\tau)-A(s))[\exp((t-s)A(s))-\exp((\tau-s)A(s))].\end{aligned}$$

由(10)和(15)可知，右端第一项的范数不大于 $KC(t-\tau)(t-s)^{-1}$. 右端第二项

$$=(A(\tau)-A(s))\int_{\tau-s}^{t-s}\frac{d}{d\sigma}\exp(\sigma A(s))=(A(\tau)-A(s))A(s)^{-1}\int_{\tau-s}^{t-s}A(s)^2\exp(\sigma A(s))d\sigma,$$

并且由(15)可知

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{\tau-s}^{t-s}A(s)^2\exp(\sigma A(s))d\sigma\right\|\leqq\int_{\tau-s}^{t-s}\|(A(s)\exp(2^{-1}\sigma A(s)))^2\|d\sigma\\&\leqq\int_{\tau-s}^{t-s}(2C/\sigma)^2d\sigma=4C^2\left[\frac{-1}{\sigma}\right]_{\tau-s}^{t-s}=4C^2(t-\tau)(t-s)^{-1}(\tau-s)^{-1}.\end{aligned}$$

所以

$$\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\|\leqq KC(1+4C)\frac{t-\tau}{t-s}. \tag{18}$$

另一方面，由(7)可知

$$\sum_{m=2}^{\infty}R_m(t,s)-\sum_{m=2}^{\infty}R_m(\tau,s)=\int_s^tR_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma$$

$$-\int_s^\tau R_1(\tau,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma=\int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma$$

$$+\int_s^\tau (R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma))R(\sigma,s)d\sigma.$$

右端第一项的范数不大于

$$\int_\tau^t \|R_1(t,\sigma)\|\|R(\sigma,s)\|d\sigma\leq K^2C^2\exp(KC(b-a))(t-\tau).$$

由(13)和(18)可知,右端第二项的范数不大于

$$\int_s^\tau \|R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma)\|\|R(\sigma,s)\|d\sigma$$

$$\leq K^2C^2(1+4C)\exp(KC(b-a))\int_s^\tau (t-\tau)(t-\sigma)^{-1}d\sigma=K_1(t-\tau)\log\frac{t-s}{t-\tau}.$$

所以我们就得到了(17).

引理 3 对于 $s<t$, 我们有

$$\|A(t)\{\exp((t-s)A(t))-\exp((t-s)A(s))\}\|\leq C_2,$$

其中 C_2 是一个同 s 和 t 无关的正的常数. (19)

证明 由(14)可得

$$A(t)\{\exp((t-s)A(t))-\exp((t-s)A(s))\}$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int_C e^{\lambda(t-s)}A(t)(\lambda I-A(t))^{-1}(A(t)-A(s))(\lambda I-A(s))^{-1}d\lambda.$$

另一方面,我们有 $A(t)(\lambda I-A(t))^{-1}=\lambda(\lambda I-A(t))^{-1}-I$, 而由(9)可知

$$\|A(t)(\lambda I-A(t))^{-1}\|\leq\frac{|\lambda|}{|\lambda|-M}+1 \text{ 对 } \lambda\in\Theta \text{ 和 } t\in[a,b]\text{成立}. \quad (20)$$

于是,由(10)和

$$\|(A(t)-A(s))(\lambda I-A(s))^{-1}\|\leq\|(A(t)-A(s))A(s)^{-1}\|\|A(s)(\lambda I-A(s))^{-1}\|$$

就可以得到(19).

定理的证明 我们把(12)中给出的 $W(t,s)$ 改写为:

$$W(t,s)=\int_s^t \exp((t-\tau)A(t)R(t,s)d\tau$$

$$+\int_s^t \{\exp((t-\tau)A(\tau))-\exp((t-\tau)A(t))\}R(\tau,s)d\tau$$

$$+\int_s^t \exp((t-\tau)A(t))(R(\tau,s)-R(t,s))d\tau.$$

利用 Riemann 和来逼近上述积分, 再利用算子 $A(t)$的闭性, 于是我们看出, 可以把 $A(t)$作用到上面等式的右端的每一项. 这是因为, 根据(9), 我们就可以把 $A(t)$ 作用到右端的第二项; 而根据 (15) 和 (17) 就可以把 $A(t)$作用到右端第三项; 利用 $A(t)\exp((t-\tau)A(t))=-d\exp((t-\tau)A(t))/d\tau$ 还可以得到

$$A(t)\int_s^t \exp((t-\tau)A(t))R(t,s)d\tau=\{\exp((t-s)A(t))-I\}R(t,s).$$

于是我们得到

$$A(t)U(t,s)=A(t)\exp((t-s)A(s))+\{\exp((t-s)A(t))-I\}R(t,s)$$
$$+\int_s^t A(t)\{\exp((t-\tau)A(\tau))-\exp((t-\tau)A(t))\}R(\tau,s)d\tau$$
$$+\int_s^t A(t)\exp((t-\tau)A(t))(R(\tau,s)-R(t,s))d\tau. \tag{21}$$

以上证明表明，$A(t)U(t,s)$ 在 $a\leqq s<t\leqq b$ 内是强连续的，并且有

$$\|A(t)W(t,s)\|\leqq C_3 \quad 和 \quad \|A(t)U(t,s)\|\leqq C_3(t-s)^{-1},$$

其中 C_3 是一个同 s 和 t 无关的正的常数. (22)

其次，对于 $s<(t-h)<t$，我们定义

$$U_h(t,s)=\exp((t-s)A(s))+\int_s^{t-h}\exp((t-\tau)A(\tau))R(\tau,s)d\tau. \tag{23}$$

由于解析半群 $\exp(tA(s))$ 对 $t>0$ 是可微的，所以有

$$\frac{\partial}{\partial t}U_h(t,s)=A(s)\exp((t-s)A(s))+\exp(hA(t-h))R(t-h,s)$$
$$+\int_s^{t-h}A(\tau)\exp((t-\tau)A(\tau))R(\tau,s)d\tau.$$

于是，由(7)可知

$$\frac{\partial}{\partial t}U_h(t,s)-A(t)U_h(t,s)=\exp(hA(t-h))R(t-h,s)-R_1(t,s)$$
$$-\int_s^{t-h}R_1(t,\tau)R(\tau,s)d\tau. \tag{24}$$

由(8)、(13)和(14)可知，当 $h\downarrow 0$ 时，$\exp(hA(t-h))R(t-h,s)$ 强趋近于 $R(t,s)$. 因此我们有

$$s\text{-}\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{\partial}{\partial t}U_h(t,s)-A(t)U_h(t,s)\right)x_0$$
$$=(R(t,s)-R_1(t,s)-\int_s^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma)x_0,\quad x_0\in X. \tag{25}$$

由(7)容易证明上式右端必为 0. 因为利用在证明(21)时所用的推理可以得到

$$s\text{-}\lim_{h\downarrow 0}A(t)U_h(t,s)x_0=A(t)U(t,s)x_0,$$

所以由(25)可得

$$s\text{-}\lim_{h\downarrow 0}\frac{\partial}{\partial t}U_h(t,s)x_0=A(t)U(t,s)x_0 \quad 对\ t>s\ 和\ x_0\in X\ 成立. \tag{26}$$

因为 (26) 的右端对 $t>s$ 是强连续的，所以，对 (26) 式进行积分并注意到 $s\text{-}\lim\limits_{h\downarrow 0}U_h(t,s)x_0=U(t,s)x_0$，我们就可以看出

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)x_0=A(t)U(t,s)x_0 \quad 对\ t>s\ 和\ x_0\in X\ 成立. \tag{27}$$

所以，$x(t)=U(t,s)x_0$ 就是所要求的(3′)的解，此解的唯一性可以象上一节那样予以证明，

评注及参考文献

上述定理和证明出自 H. Tanabe[2]. 为了了解他的想法, 我们把 Tanabe 所假设的那些条件稍加改进, 例如, 条件(9)可以换为一个更弱的条件:

$$\|A(t)A(s)^{-1}-A(r)A(s)^{-1}\|\leqq K_1|t-r|^\rho,\ \text{而 } 0<\rho<1.$$

至于详细情形, 见论文 H. Tanabe[2], 它是 H. Tanabe[3]和[4]的一种改进形式. 这里指出, 俄国学派独立地提出了一种类似的方法. 例如, 见 P. E. Sobolevski[1]以及该论文所列的参考文献. 还可参看 E. T. Poulsen[1].

Komatsu 的工作 H. Komatsu[1]对于上述 Tanabe 的结果作了一个重要的注释. 把实区间$[a, b]$看作嵌入在复平面上的. 令$\varDelta$是$[a, b]$的一个凸的复邻域. 假定对于$t\in\varDelta$定义了$A(t)$且它满足(8)和(9), 不过, 在(8)和(9)中说到的"$t\in[a, b]$"应换为"$t\in\varDelta$". 此外还假设存在某个有界线性算子A_0, 它把X一一对应地映射到$A(t)$的定义域D上, D与$t\in\varDelta$无关, 并且此A_0使得$B(t)=A(t)A_0$关于$t\in\varDelta$是强全纯的. 在这些条件之下, Komatsu 证明了, 如果

$$|\arg(t-s)|<\theta_0 \text{ 对某个满足 } 0<\theta_0<\pi/2 \text{ 的 } \theta_0 \text{ 成立},$$

则前面所构造的算子$U(t, s)$对$t\in\varDelta$就是强全纯的. 此结果可以应用到第十四章 § 1 中的非时齐扩散方程的解的"前向和后向唯一延拓性"上面. 关于这一点, 我们建议去看 H. Komatsu[2]、[3]和 T. Kotaké-M. Narasimhan[1].

Kato 的工作 为了去掉关于定义域$D(A(t))$与t无关这一假设, T. Kato[6]证明了可以把上述定理中的条件(10)换为下述条件:

$$\begin{cases}\text{对于某个正整数 } k, \text{定义域 } D((-A(t))^{1/k}) \text{ 与 } t \text{ 无关. (这里, } (-A(t))^{1/k} \text{ 就}\\ \text{是第九章 § 11 中所定义的分式幂). 并且存在常数 } K_2>0 \text{ 和 } \gamma \text{ 而 } 1-k^{-1}<\\ \gamma\leqq 1, \text{使得对于 } s, t\in[a, b], \text{有} \|(-A(t))^{1/k}(-A(s))^{1/k}-I\|\leqq K_2|t-s|^\gamma.\end{cases} \tag{10'}$$

Tanabe 以及 Kato-Tanabe 最近的工作 出于与 Kato 一样的想法, H. Tanabe[1]提出了一种方法, 那里, 他把条件(10)换为

$$\begin{cases}A(t)^{-1} \text{ 在 } a\leqq t\leqq b \text{ 内是一次强可微的, 并且, 对于正的常数 } K_3 \text{ 和 } \alpha, \text{有}\\ \left\|\dfrac{dA(t)^{-1}}{dt}-\dfrac{dA(s)^{-1}}{ds}\right\|\leqq K_3|t-s|^\alpha.\\ \text{此外还存在正的常数 } N \text{ 和 } \rho \text{ 而 } 0<\rho\leqq 1, \text{使得}\\ \left\|\dfrac{\partial}{\partial t}(\lambda I-A(t))^{-1}\right\|\leqq N|\lambda|^{\rho-1},\ \ \rho<1.\end{cases} \tag{10''}$$

至于详细情形, 见 Kato-Tanabe[8]. 其主要之点是, 一次近似函数不采用$\exp((t-a)A(a))x_0$而采用$\exp((t-a)A(t))x_0$.

Nelson 在 Feynman 积分方面的工作 关于 Schrödinger 方程的半群积分法给出了对于 Feynman 积分的一种解释. 见 E. Nelson[2].

Agmon-Nirenberg 的工作 Agmon-Nirenberg[1]讨论了方程$\dfrac{1}{i}\dfrac{du}{dt}-Au=0$在某个$B$-

空间中的解在 $t\uparrow\infty$ 时的状态.

§6. 非线性发展方程 1 (Kōmura-Kato 方法)

设 X 是一个实的或复的 Banach 空间, 它具有一个半数量积 $[x, y]$ 使得(见第九章 §8)

$$[\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y]=\alpha_1[x_1, y]+\alpha_2[x_2, y],\ |[x, y]|\leq\|x\|\cdot\|y\| \text{ 以及 } [x, x]=\|x\|^2. \tag{1}$$

考虑一个由 X 入 X 内且满足下列条件的非线性映射所成的族 $\{T_t; t>0\}$:

$$\begin{cases}T_tT_s=T_{t+s}, T_0=\text{恒等映射 } I\text{(半群性)},\\ \|T_tx-T_ty\|\leq\|x-y\|\text{(收缩性)},\end{cases}$$

并且 T_t 对 t 是强连续的. 同线性映射情形一样, 我们把 $\{T_t; t\geq0\}$ 的无穷小生成元 A 定义为

$$A\cdot x=s\text{-}\lim_{h\downarrow0}h^{-1}(T_tx-x).$$

这时, A 必定是下述意义下的耗散算子:

$$Re[Ax-Ay, x-y]\leq0. \tag{2}$$

其证明是容易的, 这是因为我们有

$$\begin{aligned}&Re[h^{-1}(T_hx-x)-h^{-1}(T_hy-y), x-y]=h^{-1}Re[T_hx-T_hy, x-y]\\ &-h^{-1}[x-y, x-y]\leq h^{-1}\|T_hx-T_hy\|\cdot\|x-y\|-h^{-1}\|x-y\|^2\\ &\leq h^{-1}\|x-y\|^2-h^{-1}\|x-y\|^2=0.\end{aligned}$$

Y. Kōmura[1]给出的一个著名的例子是: 令 $X=R^1$、$[x, y]=x\cdot y$、$\|x\|=|x|$ 以及

$$T_tx=\begin{cases}\max(x-t, 0), & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\leq0 \text{ 时},\end{cases}\qquad Ax=\begin{cases}-1, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\leq0 \text{ 时}\end{cases}$$

利用(2), 我们可以证明, 对一切 $\lambda>0$, 由 $D(A)$ 入 X 内的映射 $(I-\lambda A)$ 有逆映射 $J_\lambda=(I-\lambda A)^{-1}$, 这是因为

$$x_1-\lambda Ax_1=z=x_2-\lambda Ax_2$$

意味着

$$0=[(x_1-\lambda Ax_1)-(x_2-\lambda Ax_2), x_1-x_2]=[x_1-x_2, x_1-x_2]-\lambda[Ax_1-Ax_2, x_1-x_2], \text{从而}$$
$$0=\|x_1-x_2\|^2-\lambda Re[Ax_1-Ax_2, x_1-x_2]\geq\|x_1-x_2\|^2, \text{亦即 } x_1=x_2.$$

所以, 线性收缩半群的理论(第九章 §8)启示我们, 对于非线性发展方程

$$\frac{du(t)}{dt}=Au(t),\ t\geq0, \text{ 且 } u(0)=x_0\in D(A),$$

在 $D(J_\lambda)=R(I-\lambda A)=X$ 的假设下, 可以用方程

$$\frac{du^{(\lambda)}(t)}{dt}=A_\lambda u^{(\lambda)}(t),\ t\geq0, \text{ 且 } u^{(\lambda)}(0)=x_0 \text{ 而 } A_\lambda=\lambda^{-1}(J_\lambda-I)$$

来逼近它, 并且希望有 $u(t)=s\text{-}\lim\limits_{\lambda\downarrow0}u^{(\lambda)}(t)$.

在上述的 Kōmura 的例子中, $D(J_\lambda)=(-\infty, 0)\cup(\lambda, -\infty)$, 它同 $X=R^1$ 并不一致. 为了得到 $D(J_\lambda)=X=R^1$, 必须把 A 扩张为一个多值映射 $\hat{A}$, 即

$$\hat{A}x=\begin{cases}-1, & 当 x>0 时,\\ -[0,1], & 当 x=0 时,\\ 0, & 当 x<0 时,\end{cases}$$

它在下述意义下仍是耗散算子:

$$Re\langle y_1-y_2, x_1-x_2\rangle\leqq 0 \text{ 对任何一组}\{x_i, y_i\}, y_i\in\hat{A}x_i (i=1,2)\text{成立}. \tag{2'}$$

这样一来我们就可以为了进一步的讨论而作如下的安排. 令 X 是一个 Banach 空间, 它的对偶空间记为 X'. $X\times X$ 的元素写为 $\{x, y\}$ 这种形式, 这里, x 和 y 都 $\in X$. 对于 $X\times X$ 的子集 A, 使用下列记号是方便的:

1) $D(A)=\{x; \{x, y\}\in A$ 对某个 y 成立$\}$,

2) $R(A)=\{y; \{x, y\}\in A$ 对某个 x 成立$\}$,

3) $A^{-1}=\{\{y, x\}; \{x, y\}\in A\}$,

4) $\lambda A=\{\{x, \lambda y\}; \{x, y\}\in A$ 而 λ 为实数$\}$,

5) $A+B=\{\{x, y+z\}; \{x, y\}\in A$ 而 $\{x, z\}\in B\}$,

6) $Ax=\{y; \{x, y\}\in A$ 对某个固定的 $x\in D(A)$ 成立$\}$,

7) $\|Ax\|=\inf\{\|y\|; y\in Ax\}$,

8) $J_\lambda=(I-\lambda A)^{-1}=\{\{x-\lambda y, x\}; \{x, y\}\in A\}$ 且 λ 为实数而 $I=\{\{x, x\}; x\in X\}$,

9) $A_\lambda=\{\{x-\lambda y, y\}; \{x, y\}\in A\}$;

显然有

$$\lambda A_\lambda=J_\lambda-I. \tag{3}$$

如果对每一个 $x\in D(A)$, Ax 都由单独一个元素组成, 则 A 是一个唯一确定的函数(=**单值映射**)的图象, 该函数定义在 $D(A)$ 上而取值于 X 内; 在这种情形下, 我们就认为集合 A 同上述函数是相同的.

为了说明 $X\times X$ 内的耗散集的概念, 我们给出

定义 1 所谓由 X 入 X' 内的**对偶映射**, 指的是由 X 入 X' 内的**多值映射** F, 其定义为

$$F(x)=\{f\in X'; \langle x, f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2\}. \tag{4}$$

由 Hahn-Banach 定理易知, $F(x)$ 是非空的, 如果 X 是一个 Hilbert 空间, 则由 F. Riesz 表示定理可知, $F(x)$ 由单独一个 x 所组成, 并且 $\langle y, F(x)\rangle=(y, x)$, 后者是 y 同 x 的数量积.

定义 2 $X\times X$ 内的某集合 A 叫做**耗散集**, 如果对于 A 的任何两点 $\{x_1, y_1\}$ 和 $\{x_2, y_2\}$, 总存在一个 $f\in F(x_1-x_2)$ 使得 $Re\langle y_1-y_2, f\rangle\leqq 0$.

注 A 是一个耗散集, 当且仅当 $-A$ 在 G. Minty[1] 的意义下是一个**单调集合**.

我们还给出

定义 3 设 D 是 X 的一个子集, 而 T 是由 D 入 X 内的一个函数. T 叫做一个**具有利普希茨常数** $k>0$ 的**利普希茨映射**(函数), 如果对于一切 x_1, $x_2\in D$ 都有 $\|Tx_1-Tx_2\|\leqq k\|x_1-x_2\|$. 如果

我们可以取 $k=1$，则 T 就叫做收缩映射(函数)．我们有

引理 1 (T. Kato[11]) 设 $x, y\in X$．则当且仅当存在 $f\in F(x)$ 使得 $Re\langle y, f\rangle\leqq 0$ 时，$\|x-\lambda y\|\geqq\|x\|$ 对一切 $\lambda>0$ 成立．

证明 当 $x=0$ 时，此结论是显然的．下面，我们假设 $x\neq 0$．如果对某个 $f\in F(x)$ 有 $Re\langle y, f\rangle\leqq 0$，则 $\|x\|^2=\langle x, f\rangle=Re\langle x, f\rangle\leqq Re\langle x-\lambda y, f\rangle\leqq\|x-\lambda y\|\cdot\|f\|$．由于 $\|x\|=\|f\|$，所以我们就得到 $\|x\|\leqq\|x-\lambda y\|$．

反之，假定对一切 $\lambda>0$ 都有 $\|x\|\leqq\|x-\lambda y\|$．对于每一个 $\lambda>0$，设 $f_\lambda\in F(x-\lambda y)$ 且令 $g_\lambda=f_\lambda/\|f_\lambda\|$，从而 $\|g_\lambda\|=1$．这时，由 $\|g_\lambda\|=1$ 可知，$\|x\|\leqq\|x-\lambda y\|=\langle x-\lambda y, g_\lambda\rangle=Re\langle x, g_\lambda\rangle-\lambda Re\langle y, g_\lambda\rangle\leqq\|x\|-\lambda Re\langle y, g_\lambda\rangle$．于是有

$$\liminf_{\lambda\downarrow 0} Re\langle x, g_\lambda\rangle=\|x\| \quad \text{和} \quad -\lambda Re\langle y, g_\lambda\rangle\geqq 0.$$

因为对偶空间 X' 的闭单位球是弱*紧的(见第五章 §1 附录中的定理 1)，所以序列 $\{g_{1/n}\}$ 有一个弱*聚点 $g\in X'$ 且 $\|g\|\leqq 1$．因此我们看出，g 必定满足 $Re\langle x, g\rangle\geqq\|x\|$ 和 $Re\langle y, g\rangle\leqq 0$，即是说，必定有 $\|g\|=1$ 和 $\langle x, g\rangle=\|x\|$．所以 $f=\|x\|\cdot g$ 满足 $f\in F(x)$ 和 $Re\langle y, f\rangle\leqq 0$．

系 A 是一个耗散集，当且仅当

$$\|(x_1-\lambda y_1)-(x_2-\lambda y_2)\|\geqq\|x_1-x_2\|. \text{其中 } \lambda>0 \text{ 而 } \{x_i, y_i\}\in A \quad (i=1,2). \tag{5}$$

我们有以下的

命题 1 如果 A 是一个耗散集且 $\lambda>0$，则 J_λ 和 A_λ 都是单值映射，并且

$$\|J_\lambda x_1-J_\lambda x_2\|\leqq\|x_1-x_2\| \quad \text{对 } x_1, x_2\in D(J_\lambda) \text{成立}, \tag{6}$$

$$\|A_\lambda x_1-A_\lambda x_2\|\leqq\frac{2}{\lambda}\|x_1-x_2\| \quad \text{对 } x_1, x_2\in D(A_\lambda)=D(J_\lambda) \text{成立}. \tag{7}$$

此外还有，A_λ 是耗散的，并且

$$AJ_\lambda x=A(J_\lambda x)\ni A_\lambda x \quad \text{对 } x\in D(J_\lambda) \text{成立}, \tag{8}$$

$$\|A_\lambda x\|\leqq\|Ax\| \quad \text{对一切 } x\in D(A)\cap D(J_\lambda) \text{成立}. \tag{9}$$

证明 由(5)易知，J_λ 和 A_λ 都是单值的．由(5)还可得出(6)，因此，利用(3)和(6)可证得(7)．其次令 $f\in F(x_1-x_2)$．则由(3)、(4)和(6)可得

$$\begin{aligned}&Re\langle A_\lambda x_1-A_\lambda x_2, f\rangle=\lambda^{-1}Re\langle(J_\lambda x_1-x_1)-(J_\lambda x_2-x_2), f\rangle\\&\quad=\lambda^{-1}Re\langle J_\lambda x_1-J_\lambda x_2, f\rangle-\lambda^{-1}\langle x_1-x_2, f\rangle\leqq\lambda^{-1}\|J_\lambda x_1-J_\lambda x_2\|\cdot\|f\|-\lambda^{-1}\langle x_1-x_2, f\rangle\\&\quad\leqq\lambda^{-1}\|x_1-x_2\|^2-\lambda^{-1}\|x_1-x_2\|^2=0.\end{aligned}$$

这就证明了 A_λ 是耗散的．(8)显然成立．(9)的证明如下．由(3)和(6)可知，对任一 $y\in Ax$，有

$$\lambda\|A_\lambda x\|=\|J_\lambda x-x\|=\|J_\lambda x-J_\lambda(x-\lambda y)\|\leqq\|x-(x-\lambda y)\|=\lambda\|y\|.$$

引理 2 (Y. Kōmura[1]) 令 A 是一个耗散集 $\subseteqq X\times X$，又设对于某个 $\lambda>0$，有 $D(J_\lambda)=X$．则对于满足 $0\leqq|(\mu-\lambda)/\mu|<1$ 的每一个 $\mu>0$ 都有 $D(J_\mu)=X$．

证明 任取一点 $x\in X$，并考虑一个如下的单值映射 T:

$$X\ni z\to Tz=J_\lambda\left(\frac{\lambda}{\mu}x+\frac{\mu-\lambda}{\mu}z\right).$$

因为由(6)可知 J_λ 是一个收缩映射，于是得到

$$\|Tz-Tw\|\leq\left\|\left(\frac{\lambda}{\mu}x+\frac{\mu-\lambda}{\mu}z\right)-\left(\frac{\lambda}{\mu}x+\frac{\mu-\lambda}{\mu}w\right)\right\|=\left|\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right|\cdot\|z-w\|,$$

即是说，T 是一个利普希茨映射，其利普希茨常数为

$$\alpha=|(\mu-\lambda)/\mu|<1.$$

因此，对于 $n>m$ 和对于任一点 $z\in X$，我们有

$$\begin{aligned}\|T^nz-T^mz\|&\leq\alpha^m\|T^{n-m}z-z\|\leqq\alpha^m(\|Tz-z\|+\|T^2z-Tz\|+\cdots)\\&\leqq\alpha^m(1+\alpha+\alpha^2+\cdots)\cdot\|Tz-z\|\leqq\alpha^m(1-\alpha)^{-1}\|Tz-z\|.\end{aligned}$$

于是，由空间 X 的完备性可知，$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T^nz=y$ 存在且含于 X 内．因为 T 作为一个利普希茨映射是连续的，所以由 $y=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T^{n+1}z=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}T(T^nz)$ 可得 $T\cdot y=y$．于是

$$y=J_\lambda\left(\frac{\lambda}{\mu}x+\frac{\mu-\lambda}{\mu}y\right)=J_\lambda\left(y-\lambda\left(\frac{1}{\mu}y-\frac{1}{\mu}x\right)\right),\text{ 即是说，}\left(\frac{1}{\mu}y-\frac{1}{\mu}x\right)\in Ay,$$

从而 $y-\mu z=x$ 且 $z\in Ay$．这就证明了 $J_\mu x=y$．因为 x 是任意的，所以必定有 $D(J_\mu)=X$．

系 重复上面的推理，我们就可以证明，对所有的 $\mu>0$ 都有 $D(J_\mu)=X$．

现在我们就能够给出

定义 4 耗散集 $A\subseteqq X\times X$ 叫做超耗散集，如果 $D(J_\lambda)=X$ 对某个 $\lambda>0$ 成立就必定对所有的 $\lambda>0$ 都成立．

命题 2 一个超耗散集 $A\subseteqq X\times X$ 必定是一个在下述意义下的极大耗散集，即不存在以 A 为其真子集的耗散集 $B\subseteqq X\times X$．

证明 假定有一个耗散集 $B\subseteqq X\times X$ 是以 A 为其真子集的．令 $y\in Bx$．这时，因为 A 是一个超耗散集，所以存在一个点 $\{x_1,y_1\}\in A$ 使得 $x-y=x_1-y_1$．因为 $A\subseteqq B$，所以必有 $\{x_1,y_1\}\in B$，从而把(5)应用于耗散集 B，我们就得到 $x=x_1$ 和 $y=y_1$．

至此，我们就准备好了为说明 Kōmura 的方法所需要的工具，而该方法是关于非线性发展方程在 Hilbert 空间中的积分法．设 H 是一个实的或复的 Hilbert 空间，其数量积为 (x,z)，又设 $A\subseteqq H\times H$ 是一个超耗散集．我们将讨论下述初值问题的强解：

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}\in Au(t)\text{ 对区间}[0,\infty)\text{上的几乎每一个 } t \text{ 成立},\\u(0)=x_0\in D(A),\end{cases}\tag{10}$$

这里，定义在$[0,\infty)$上而取值于 H 内的 $u(t)$ 叫做(10)的一个强解，如果 $u(t)$ 关于 t 是强绝对连续的，在$[0,\infty)$上是几乎处处强可微的，并且强微商 $du(t)/dt$ 在 t 的任何一个紧区间上是 Bochner 可积的，同时 u 还满足(10)．我们将用下述问题来逼近(10)，即

$$\begin{cases}\dfrac{du^{(\lambda)}(t)}{dt}-A_\lambda u^{(\lambda)}(t)=0,\text{ 对}[0,\infty)\text{上的一切 } t \text{ 成立}(\lambda>0),\\u^{(\lambda)}(0)=x_\lambda=x_0-\lambda y_0,\text{ 其中 } y_0 \text{ 是 } Ax_0 \text{ 内的一个固定的点}.\end{cases}\tag{10'}$$

因为 A_λ, $\lambda>0$, 是一个利普希茨映射, 所以我们知道方程(10′)有一个唯一确定的解 $u^{(\lambda)}(t)$, 它可以由 E. Picard 的逐次逼近法得到, 即由

$$u_{n+1}^{(\lambda)}(t)=x_\lambda+\int_0^t A_\lambda u_n^{(\lambda)}(s)ds \qquad (n=0, 1, \cdots; u_0^{(\lambda)}(t)=x_\lambda) \tag{10''}$$

得到.

引理 3 (Y. Kōmura[1]) 对于(10′) 的解 $u^{(\lambda)}(t)$, 我们有下列估计式:

$$\left\|\frac{d}{dt}u^{(\lambda)}(t)\right\|\leqq\left\|\frac{d}{ds}u^{(\lambda)}(s)\right\| \qquad \text{对于 } 0\leqq s<t \text{ 成立}, \tag{11}$$

以及

$$\|u^{(\lambda)}(t)-u^{(\mu)}(t)\|^2\leqq((\lambda-\mu)^2+4t(\lambda+\mu))\|y_0\|^2. \tag{12}$$

证明 令 $u^{(\lambda)}(t+h)=v^{(\lambda)}(t)$, 而 $h>0$, 于是, 利用 A_λ 的耗散性质, 我们就得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|v^{(\lambda)}(t)-u^{(\lambda)}(t)\|^2&=2Re\left(\frac{d}{dt}v^{(\lambda)}(t)-\frac{d}{dt}u^{(\lambda)}(t), v^{(\lambda)}(t)-u^{(\lambda)}(t)\right)\\&=2Re(A_\lambda v^{(\lambda)}(t)-A_\lambda u^{(\lambda)}(t), v^{(\lambda)}(t)-u^{(\lambda)}(t))\leqq 0.\end{aligned}$$

因此, $\|u^{(\lambda)}(t+h)-u^{(\lambda)}(t)\|$ 对 t 是单调递减的, 从而我们就得到(11). 所以我们有

$$\left\|\frac{d}{dt}u^{(\lambda)}(t)\right\|=\|A_\lambda u^{(\lambda)}(t)\|\leqq\|A_\lambda u^{(\lambda)}(0)\|=\|A_\lambda(x_0-\lambda y_0)\|=\|y_0\|. \tag{13}$$

作类似于上述的讨论, 根据 $\lambda A_\lambda=J_\lambda-I$, 我们就得到

$$\begin{aligned}\|u^{(\lambda)}(t)-u^{(\mu)}(t)\|^2-\|u^{(\lambda)}(0)-u^{(\mu)}(0)\|^2&=\|u^{(\lambda)}(t)-u^{(\mu)}(t)\|^2-\|(\lambda-\mu)y_0\|^2\\&=\int_0^t\frac{d}{ds}\|u^{(\lambda)}(s)-u^{(\mu)}(s)\|^2ds\\&=2\int_0^t Re(A_\lambda u^{(\lambda)}(s)-A_\mu u^{(\mu)}(s), u^{(\lambda)}(s)-u^{(\mu)}(s))ds\\&=2\int_0^t Re(A_\lambda u^{(\lambda)}(s)-A_\mu u^{(\mu)}(s), J_\lambda u^{(\lambda)}(s)-J_\mu u^{(\mu)}(s))ds\\&\quad-2\int_0^t Re(A_\lambda u^{(\lambda)}(s)-A_\mu u^{(\mu)}(s), \lambda A_\lambda u^{(\lambda)}(s)-\mu A_\mu u^{(\mu)}(s))ds.\end{aligned}$$

最后一个等式的右端第一项是非负的, 这是因为 A 是 $H\times H$ 中的一个耗散集, 且由(8)可知 $A_\lambda u^{(\lambda)}(s)\in AJ_\lambda u^{(\lambda)}(s)$. 由(13)可知, 最右端的第二项小于 $4t(\lambda+\mu)\|y_0\|^2$, 从而有

$$\|u^{(\lambda)}(t)-u^{(\mu)}(t)\|^2-(\mu-\lambda)^2\|y_0\|^2\leqq 4t(\lambda+\mu)\|y_0\|^2.$$

这就证明了(12).

系

$$s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0} u^{(\lambda)}(t)=u(t) \text{在 } t \text{ 的每一个紧集上一致存在}. \tag{14}$$

$$s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0} J_\lambda u^{(\lambda)}(t)=u(t) \text{在 } t \text{ 的每一个紧集上一致成立}. \tag{15}$$

证明 由(12), (14)是显然成立的. 由(14)就可得(15), 这是因为, 由(13)可得

$$\|J_\lambda u^{(\lambda)}(t)-u^{(\lambda)}(t)\|=\lambda\|A_\lambda u^{(\lambda)}(t)\|\leqq\lambda\|y_0\|.$$

引理 4(Y. Kōmura[1]) 对所有的 $t\geqq 0$ 都有 $u(t)\in D(A)$.

证明 由(8)可知，对固定的 $t>0$

$$\{J_\lambda u^{(\lambda)}(t), A_\lambda u^{(\lambda)}(t)\}\in A \text{ 对每一个 } \lambda>0 \text{ 都成立.} \tag{16}$$

因此，记 $A_\lambda u^{(\lambda)}(t)=w^{(\lambda)}(t)$，由(13)可得 $\|w^{(\lambda)}(t)\|\leq\|y_0\|$. 于是，由 Hilbert 空间 H 的局部弱紧性可知，对固定的 $t>0$，存在一个满足 $\lambda_n\downarrow 0$ 的正数序列 $\{\lambda_n\}$，使得

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty} w^{(\lambda_n)}(t)=w(t)\in H \text{ 且 } \|w(t)\|\leq\|y_0\|. \tag{17}$$

因为 A 是一个耗散集，所以对每个点 $\{x, y\}\in A$ 都有不等式 $Re(y-w^{(\lambda_n)}(t), x-J_{\lambda_n}u^{(\lambda_n)}(t))\leq 0$. 于是，令 $n\uparrow\infty$，我们就可以由(15)得到 $Re(y-w(t), x-u(t))\leq 0$. 这就证明了

$$\{u(t), w(t)\}\in A, \tag{18}$$

这是因为，已经在命题 2 中证明过 A 是一个极大耗散集 $\subseteq H\times H$.

引理 5 (Y. Kōmura[1]) $u(t)$ 对 t 是强绝对连续的，并且它在几乎每个 $t\geq 0$ 处都是强可微的.

证明 由(13)可知，对于 $0\leq t_1<t_2<\cdots$ 且 $\sum_i (t_{i+1}-t_i)<\infty$，有

$$\|u^{(\lambda)}(t_{i+1})-u^{(\lambda)}(t_i)\|\leq\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\frac{d}{ds}u^{(\lambda)}(s)\right\|ds\leq(t_{i+1}-t_i)\cdot\|y_0\|.$$

所以，令 $\lambda\downarrow 0$，我们就得到

$$\sum_i\|u(t_{i+1})-u(t_i)\|\leq\sum_i(t_{i+1}-t_i)\cdot\|y_0\|. \tag{19}$$

这就证明了 $u(t)$ 对 t 的强绝对连续性.

下面，令 $0<t_0<\infty$. 这时，由(19)可知，集合 $\{u(t); 0\leq t\leq t_0\}$ 在 H 中是紧的，于是它是可分的. 所以，不失一般性，我们可以假设 H 是可分的. 于是就令 $\{x_k\}$ 是 H 的一个强稠密的可数序列. 由(19)可知，每个数值函数 $v_k(t)=(u(t), x_k)$ 都是绝对连续的，从而存在一个测度为零的集合 N_k 使得 $v_k(t)$ 在 $[0, t_0]-N_k$ 上是可微的. 由(19)可知，$u(t)$ 在 $[0, t_0]-\bigcup_{k=1}^{\infty}N_k$ 上是弱可微的，并且弱导数 $u'(t)$ 满足 $\|u'(t)\|\leq\|y_0\|$. 因为假设了 H 是可分的，所以由 Pettis 定理(第五章 § 4)可知，弱可测函数 $u'(t)$ 是强可测的，从而由有界性条件 $\|u'(t)\|\leq\|y_0\|$ 可知，$u'(t)$ 是 Bochner 可积的. 所以，由 Bochner 定理(第五章 § 5)可知

$$u(t)-u(0)=\int_0^t u'(s)\,ds \tag{20}$$

对于几乎每一个 $t\in[0, t_0]$ 都是强可微的，且以 $u'(t)$ 作为其强导数.

现在我们就能够来证明 Y. Kōmura 的

定理 $u(t)$ 就是初值问题(10)的一个强解.

证明 对于一个固定的正数 t_0，我们定义在 H 内取值的强可测函数 $\tilde{x}=x(t)$ 组成的空间 $L^2([0, t_0], H)$，这里，$\int_0^{t_0}\|x(s)\|^2ds<\infty$，而范数为 $\|\tilde{x}\|^2=\int_0^{t_0}\|x(s)\|^2ds$. 容易证明 $L^2([0, t_0], H)$，在赋予数量积

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_0^{t_0} (x(s), y(s))\, ds \tag{21}$$

之后,是一个 Hilbert 空间,而(21)中的$(x(s), y(s))$是$x(s)$同$y(s)$在H中的数量积.

因此,我们可以把$\tilde{u}-u(t)$看作$L^2([0, t_0], H)$的一个元素,这是因为$u(t)$是一个取值于H内的强连续函数. 此外,此超耗散集A可以按下述方式自然地扩张成一个超耗散集$\tilde{A} \subseteq L^2([0, t_0], H) \times L^2([0, t_0], H)$,即定义

$$\tilde{A}\tilde{x} = \{\tilde{y} \in L^2([0, t_0], H);\ y(t) \in Ax(t) \text{ 对几乎每一个 } t \in [0, t_0] \text{ 都成立}\}. \tag{22}$$

由(16)和(13)可知

$$\{\tilde{J}_\lambda \tilde{u}^{(\lambda)}, \tilde{A}_\lambda \tilde{u}^{(\lambda)}\} \in \tilde{A} \text{ 对每一个 } \lambda > 0 \text{ 都成立}. \tag{16'}$$

再由(13)可知,$\{\tilde{A}_\lambda \tilde{u}^{(\lambda)}; \lambda > 0\}$是 Hilbert 空间$L^2([0, t_0], H)$的一个范数有界的子集. 于是,存在一个满足$\lambda_n \downarrow 0$的正数序列$\{\lambda_n\}$,使得

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_{\lambda_n} \tilde{u}^{(\lambda_n)} = \tilde{w} \in L^2([0, t_0], H). \tag{17'}$$

此外,由(15)可知

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} \tilde{J}_{\lambda_n} \tilde{u}^{(\lambda_n)} = \tilde{u} \in L^2([0, t_0], H). \tag{15'}$$

由于A是一个超耗散集,所以$\tilde{A}$也是一个超耗散集. 因此,由命题 2 可知,$\tilde{A}$是一个极大耗散集. 所以,象在引理 4 的证明中一样,我们有

$$w(t) \in Au(t) \text{ 对几乎每个 } t \in [0, t_0] \text{ 都成立}. \tag{18'}$$

另一方面,我们有

$$u^{(\lambda_n)}(t) - u^{(\lambda_n)}(0) = \int_0^t \frac{d}{ds} u^{(\lambda_n)}(s)\, ds \quad (\text{对 } 0 \leq t \leq t_0 \text{ 成立}),$$

从而由第五章 § 5 中的系 2 可知,对每一个$x \in H$都有

$$(u^{(\lambda_n)}(t), x) - (x_{\lambda_n}, x) = \int_0^t \left(\frac{d}{ds} u^{(\lambda_n)}(s),\ x\right) ds \quad (\text{对 } 0 \leq t \leq t_0 \text{ 成立}).$$

于是,由(14)和(17')可得

$$(u(t), x) - (x_0, x) = \int_0^t (w(s), x)\, ds = \left(\int_0^t w(s)\, ds,\ x\right). \tag{23}$$

因为$x \in H$和$t_0 > 0$都是任意的,所以由(23)、(18')和(20)可知$\dfrac{du(t)}{dt} = u'(t) = w(t) \in Au(t)$对几乎每个$t \geq 0$都成立.

注 T. Kato[11]把上述定理推广到X是一个 Banach 空间而其对偶空间是一致凸空间的情形. 关于非线性收缩半群的 Hille-Yosida 定理, Y. Kōmura[2]在 Hilbert 空间中提出并证明了一种几乎完满的说法. 参看 M. G. Crandall-A. Pazy[1], T. Kato[12]和在 Y. Kōmura[2]的 § 5 中所引用的 J. R. Dorroh[1]. 在 Kōmura 的这篇论文中最重要的地方是证明无穷小生成元的定义域是稠密的. 而这个证明在稍后一些时候又被 T. Kato [12]大大简化了. 最近, H. Brezis 发表了一篇关于在 Hilbert 空间中的非线性半群的综合性论文. 这本书 (H. Brezis [1])附有一个涉及面很广的文献目录,它并不局限于 Hilbert 空间.

§ 7. 非线性发展方程 2(立足于Crandall-Liggett 的收敛定理的方法)

设X是一个实的或复的 Banach 空间,而A是(C_0)类的线性算子$\in L(X,X)$的一个等度连续半群$\{T_t;t\geqq 0\}$的无穷小生成元. 这时,在第九章 § 12 中的引理就证明了T_t的 Hille 逼近式:

$$\begin{cases}\text{对每一个 } x_0\in X \text{ 都有 } T_t x_0 = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(I-n^{-1}tA)^{-n}\cdot x_0,\\ \text{并且此收敛在 } t \text{ 的每一个紧区间上都是一致的.}\end{cases}\tag{1}$$

本节标题中的收敛定理就是受到(1)的启发而得到的. 它的叙述如下.

定理 1(M. Crandall-T. Liggett[2]) 设A是一个超耗散集$\subseteqq X\times X$. 则对所有的$x_0\in D(A)$都有

$$\begin{cases}s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(J_{t/n})^n\cdot x_0 \text{ 在 } t \text{ 的每一个紧区间上都一致存}\\ \text{在, 其中, } J_\lambda=(I-\lambda A)^{-1} \text{ 是前面 § 6 中所说的.}\end{cases}\tag{1'}$$

下面的证明出自 S. Rasmussen[1], 它似乎比 Crandall-Liggett 原来的证明有所改进:

证明 第一步 我们需要下列的(2)—(4):

$$\|A_\lambda x\|\leqq\|Ax\| \text{对所有的 } x\in D(A) \text{ 和所有的} \lambda>0 \text{ 成立,}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\left\|\prod\limits_{i=1}^n J_{\lambda_i}x-x\right\|=\|J_{\lambda_n}J_{\lambda_{n-1}}\cdots J_{\lambda_1}x-x\|\leqq\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i\right)\|Ax\|\\ \text{对所有的 } x\in D(A) \text{ 和所有的 } \lambda_i>0\,(i=1,2,\cdots,n) \text{ 成立,}\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}J_\mu\left(\dfrac{\mu}{\lambda}x+\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x\right)=J_\lambda x \text{ 对所有的 } x\in X \text{ 和所有的 } \lambda,\ \mu>0\\ \text{成立.}\end{cases}\tag{4}$$

(2)已经在前面 § 6 中证明过了. (3)的证明可以利用J_λ的收缩性质、(2)以及$\lambda A_\lambda=J_\lambda-I$得出来,其证明如下:

$$\left\|\prod_{i=1}^n J_{\lambda_i}x-x\right\|=\left\|\sum_{i=1}^n\left(\prod_{j=i}^n J_{\lambda_j}x-\prod_{j=i+1}^n J_{\lambda_j}x\right)\right\|\leqq\sum_{i=1}^n\left\|\prod_{j=i}^n J_{\lambda_j}x-\prod_{j=i+1}^n J_{\lambda_j}x\right\|$$

$$\leqq\sum_{i=1}^n\|J_{\lambda_i}x-x\|\leqq\sum_{i=1}^n\|\lambda_i A_{\lambda_i}x\|\leqq\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)\|Ax\|.$$

下面,我们来证明(4). 因为A是一个超耗散集,所以对任何$x\in X$和$\lambda>0$都存在一点$\{x_1,y_1\}\in A$使得$x=x_1-\lambda y_1$. 因此$J_\lambda x=x_1$, 从而

$$\frac{\mu}{\lambda}x+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J_\lambda x=\frac{\mu}{\lambda}(x_1-\lambda y_1)+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}x_1=x_1-\mu y_1.$$

利用上式和$J_\mu(x_1-\mu y_1)=x_1=J_\lambda x$就可得出(4).

第二步 设$x\in D(A)$和$\lambda>0$. 又设$\{\mu_n;n\geqq 1\}$是一个对所有的n都满足$0<\mu_n\leqq\lambda$的序列. 这时,我们定义

$$A_{n,m}=\left\|\prod_{i=j}^n J_{\mu_i}x-J_\lambda^m x\right\|,\quad(n,m=0,1,2,\cdots)\tag{5}$$

(为方便起见，我们令$\prod_{i=1}^{0} J_{\mu_i} = I = J_\lambda^0$)。

此外，令

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \,(n=0, 1, 2, \cdots;\ t_0=0) \tag{6}$$

以及

$$\alpha_n = \mu_n/\lambda \text{ 和 } \beta_n = 1-\alpha_n = (\lambda-\mu_n)/\lambda, \text{ 这里 } n=1, 2, \cdots. \tag{7}$$

于是我们有

$$A_{n,m} \leqq \{[(m\lambda-t_n)^2+m\lambda^2]^{1/2}+[(m\lambda-t_n)^2+\lambda t_n]^{1/2}\}\|Ax\|. \tag{8}$$

为了进行证明，我们首先要说明

$$A_{n,m} \leqq \alpha_n A_{n-1,m-1} + \beta_n A_{n-1,m} \quad \text{对 } n, m=1, 2, \cdots \text{成立}. \tag{9}$$

事实上，由(4)和J_{μ_n}的收缩性质可知

$$A_{n,m} = \left\|\prod_{i=1}^{n} J_{\mu_i}x - J_\lambda^m x\right\| = \left\|\prod_{i=1}^{n} J_{\mu_i}x - J_{\mu_n}\left(\frac{\mu_n}{\lambda}J_\lambda^{m-1}x + \frac{\lambda-\mu_n}{\lambda}J_\lambda^m x\right)\right\|$$

$$\leqq \left\|\prod_{i=1}^{n-1} J_{\mu_i}x - \left(\frac{\mu_n}{\lambda}J_\lambda^{m-1}x + \frac{\lambda-\mu_n}{\lambda}J_\lambda^m x\right)\right\|$$

$$\leqq \alpha_n\left\|\prod_{i=1}^{n-1} J_{\mu_i}x - J_\lambda^{m-1}x\right\| + \beta_n\left\|\prod_{i=1}^{n-1} J_{\mu_i}x - J_\lambda^m x\right\| = \alpha_n A_{n-1,m-1} + \beta_n A_{n-1,m}.$$

我们用(9)和归纳法来证明(8)。我们先证明，对于所有的$m=0, 1, \cdots$，$A_{0,m}$满足(8)。事实上，有

$$A_{0,m} = \|x - J_\lambda^m x\| \leqq m\lambda\|Ax\| \quad (\text{根据(3)和(5)})$$

$$\leqq \{[(m\lambda-t_0)^2+m\lambda^2]^{1/2}+[(m\lambda-t_0)^2+\lambda t_0]^{1/2}\}\|Ax\| (\text{因为 } t_0=0).$$

现在设n和m是任意的，又设$A_{n,m}$和$A_{n,m-1}$都满足(8)。于是我们需要证明$A_{n+1,m}$满足(8)。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
A_{n+1,m} &\leqq \alpha_{n+1}A_{n,m-1} + \beta_{n+1}A_{n,m} (\text{根据(9)}) \\
&\leqq \alpha_{n+1}\{[((m-1)\lambda-t_n)^2+(m-1)\lambda^2]^{1/2}+[((m-1)\lambda-t_n)^2+\lambda t_n]^{1/2}\}\|Ax\| \\
&\quad + \beta_{n+1}\{[(m\lambda-t_n)^2+m\lambda^2]^{1/2}+[(m\lambda-t_n)^2+\lambda t_n]^{1/2}\}\|Ax\| \\
&\leqq \{\alpha_{n+1}[((m-1)\lambda-t_n)^2+(m-1)\lambda^2]^{1/2}+\beta_{n+1}[(m\lambda-t_n)^2+m\lambda^2]^{1/2}\}\|Ax\| \\
&\quad + \{\alpha_{n+1}[((m-1)\lambda-t_n)^2+\lambda t_n]^{1/2}+\beta_{n+1}[(m\lambda-t_n)^2+\lambda t_n]^{1/2}\}\|Ax\| \\
&\leqq (\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})^{1/2}\{\alpha_{n+1}[((m-1)\lambda-t_n)^2+(m-1)\lambda^2] \\
&\quad + \beta_{n+1}[(m\lambda-t_n)^2+m\lambda^2]\}^{1/2}\|Ax\| \\
&\quad + (\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})^{1/2}\{\alpha_{n+1}[((m-1)\lambda-t_n)^2+\lambda t_n] \\
&\quad + \beta_{n+1}[(m\lambda-t_n)^2+\lambda t_n]\}^{1/2}\|Ax\| \quad (\text{根据 Schwarz 不等式}) \\
&= \{m^2\lambda^2-\alpha_{n+1}2m\lambda^2+\alpha_{n+1}\lambda^2-2m\lambda t_n+\alpha_{n+1}2\lambda t_n+t_n^2+m\lambda^2-\alpha_{n+1}\lambda^2\}^{1/2}\|Ax\| \\
&\quad + \{m^2\lambda^2-\alpha_{n+1}2m\lambda^2+\alpha_{n+1}\lambda^2-2m\lambda t_n+\alpha_{n+1}2\lambda t_n+t_n^2+\lambda t_n\}^{1/2}\|Ax\|
\end{aligned}$$

(由于$\beta_{n-1}=1-\alpha_{n-1}$)

$$
\begin{aligned}
&=\{m^2\lambda^2-\mu_{n+1}2m\lambda+\mu_{n+1}\lambda-2m\lambda t_n+2\mu_{n+1}t_n+t_n^2+m\lambda^2-\mu_{n+1}\lambda\}^{1/2}\|Ax\|\\
&\quad+\{m^2\lambda^2-\mu_{n+1}2m\lambda+\mu_{n+1}\lambda-2m\lambda t_n+2\mu_{n+1}t_n+t_n^2+\lambda t_n\}^{1/2}\|Ax\|\\
&=\{(m\lambda-(\mu_{n+1}+t_n))^2-\mu_{n+1}^2+m\lambda^2\}^{1/2}\|Ax\|\\
&\quad+\{(m\lambda-(\mu_{n+1}+t_n))^2-\mu_{n+1}^2+\lambda(t_n+\mu_{n+1})\}^{1/2}\|Ax\|\\
&\leq\{[(m\lambda-t_{n+1})^2+m\lambda^2]^{1/2}+[(m\lambda-t_{n+1})^2+\lambda t_{n+1}]^{1/2}\}\|Ax\|,
\end{aligned}
$$

从而我们就证明了 $A_{n+1,m}$ 满足(8). 我们还可以证明, 对所有的 $n=1,2,\cdots$, $A_{n,0}$ 都满足(8). 事实上, 由(3)可知

$$
\begin{aligned}
A_{n,0}=\left\|\prod_{i=1}^{n}J_{\mu_i}x-x\right\|&\leq\sum_{i=1}^{n}\mu_i\cdot\|Ax\|=t_n\|Ax\|\\
&\leq\{[(0\cdot\lambda-t_n)^2+0\cdot\lambda^2]^{1/2}+[(0\cdot\lambda-t_n)^2+\lambda t_n]^{1/2}\}\|Ax\|.
\end{aligned}
$$

所以, 我们就完成了归纳法, 从而(8)得证.

第三步 设 t 是一个正数, 并考虑闭区间 $[0,t]$ 的一种分割 $\varDelta$:

$$\varDelta:\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_n=t.$$

对于这种分割, 我们规定

$$\varDelta_i=(t_i-t_{i-1})\ (i=1,2,\cdots,n)\ \text{以及}\ |\varDelta|=\max_{1\leq i\leq n}(t_i-t_{i-1}).$$

取另一种分割

$$\varDelta':\ 0=t'_0<t'_1<\cdots<t'_{j-1}<t'_j<t'_{j+1}<\cdots<t'_k=t,$$

并规定

$$\varDelta'_j=(t'_j-t'_{j-1})\ (j=1,2,\cdots,k)\ \text{以及}\ |\varDelta'|=\max_{1\leq j\leq k}(t'_j-t'_{j-1}).$$

这时, 对于 $x_0\in D(A)$, 令

$$\lambda=\max(|\varDelta|,|\varDelta'|)\ \text{和}\ m=\text{最大整数}\leq t/\lambda,$$

我们就由(8)推出下述不等式:

$$
\begin{cases}
\left\|\prod_{i=1}^{n}J_{\varDelta_i}x_0-\prod_{j=1}^{k}J_{\varDelta'_j}x_0\right\|\leq\left\|\prod_{i=1}^{n}J_{\varDelta_i}x_0-J_\lambda^m x_0\right\|+\left\|J_\lambda^m x_0-\prod_{j=1}^{k}J_{\varDelta'_j}x_0\right\|\\
\leq 2\{[(m\lambda-t)^2+m\lambda^2]^{1/2}+[(m\lambda-t)^2+\lambda t]^{1/2}\}\|Ax_0\|\\
\leq 2\{[\lambda^2+t\lambda]^{1/2}+[\lambda^2+\lambda t]^{1/2}\}\|Ax_0\|.
\end{cases}
\tag{10}
$$

所以, 在(10)中取 $\varDelta_i=t/n\,(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $\varDelta'_j=t/k\,(j=1,2,\cdots,k)$, 我们就得到(1′).

注 我们还附带地证明了

$$
\begin{cases}
T_t x_0=s\text{-}\lim_{n\to\infty}(I-n^{-1}tA)^{-n}x_0=s\text{-}\lim_{n\to\infty}(I-n^{-1}A)^{-[nt]}x_0\\
\text{在 } t \text{ 的每一个紧区间上一致成立,}\\
\text{其中的 } [nt]=\text{最大整数}\leq nt.
\end{cases}
\tag{1″}
$$

定理 1 的作用可以从下面给出的定理 2、定理 3 和定理 4 看出来.

定理 2 设 A 是 $X\times X$ 的一个超耗散闭集. 则对每一个 $x_0\in D(A)$, 下面两个条件是彼此等价的.

$$\begin{cases} \text{i): } u(t)\text{是初值问题} \\ \dfrac{du(t)}{dt}\in Au(t)(\text{对几乎每个 } t\geqq 0 \text{ 成立})\text{且 } u(0)=x_0 \\ \text{的一个强解,} \end{cases} \tag{11}$$

此强解的定义已在前面§6中叙述过.

$$\begin{cases} \text{ii): } u(t)=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(I-n^{-1}A)^{-[nt]}x_0 \text{ 并且 } u(t)\text{对于几} \\ \text{乎每个 } t\geqq 0 \text{ 都是强可微的.} \end{cases} \tag{12}$$

我们首先给出 Brezis-Pazy[2]关于论断 i)→ii)的证明, 至于 Crandall-Liggett[2]关于论断 ii)→i)的证明, 将在证明了定理3之后给出. 我们从 T. Kato[11]所得出的一个关键性的引理出发.

引理 设 S 是这样一些 $s\geqq 0$ 组成的集合, 在这种 s 处, (11)的强解 $u(s)$ 是强可微的. 于是, 在几乎每一个 $s\in S$ 处

$$2^{-1}\frac{d}{ds}\|u(s)\|^2=\|u(s)\|\frac{d\|u(s)\|}{ds}=Re\left\langle\frac{du(s)}{ds},f\right\rangle \quad \text{对于 } f\in F(u(s))\text{成立} \tag{13}$$

证明 因为 $u(s)$ 是 (11) 的一个强解, 所以强导数 $du(s)/ds$ 在 s 的每一个紧区间上都是 Bochner 可积的, 从而由第五章§5的 Bochner 定理可知

$$u(s)-u(0)=\int_0^s\frac{du(s)}{ds}ds.$$

于是 $\|u(s)\|$ 在 s 的每一个紧区间上都是有界变差的. 所以, $\|u(s)\|$ 在几乎每个 $s\geqq 0$ 处都是可微的.

由于 $f\in F(u(s))$, 所以有 $Re\langle u(t), f\rangle\leqq\|u(t)\|\cdot\|u(s)\|$ 和 $Re\langle u(s),f\rangle=\|u(s)\|^2$, 于是我们得到

$$Re\langle u(t)-u(s),f\rangle\leqq\|u(s)\|(\|u(t)\|-\|u(s)\|)$$

上式两端同除以$(t-s)$, 然后在 s 的两侧, 令 $t\to s$, 于是在几乎每个 $s\in S$ 处, 我们都得到

$$Re\left\langle\frac{du(s)}{ds},f\right\rangle\leqq\|u(s)\|\frac{d\|u(s)\|}{ds} \quad \text{和} \quad Re\left\langle\frac{du(s)}{ds},f\right\rangle\geqq\|u(s)\|\frac{d\|u(s)\|}{ds}.$$

如此, 我们就证明了(13).

系(H. Brezis-A. Pazy[1]) 对于(11)的强解 $u(t)$, 有

$$\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|\leqq\|Ax_0\|=\inf_{z\in Ax_0}\|z\| \quad \text{在几乎每个 } t\geqq 0 \text{ 处成立.} \tag{14}$$

证明 令 $du(t)/dt=y(t)$, 从而由(11)可知在几乎每个 $t\geqq 0$ 处, $y(t)\in Au(t)$. 对于这种 t 以及每个 $z\in Ax_0$, 由 A 的耗散性质可知, 存在一个 $f_0\in F(u(t)-x_0)$ 使得 $Re\langle y(t)-z,f_0\rangle\leqq 0$. 于是, 利用证明(13)时所用的同一推理, 我们就得到

$$2^{-1}\frac{d}{dt}\|u(t)-x_0\|^2=\|u(t)-x_0\|\frac{d}{dt}\|u(t)-x_0\|=Re\left\langle\frac{du(t)}{dt}-0,f_0\right\rangle$$

$$=Re\langle y(t)-z,f_0\rangle+Re\langle z,f_0\rangle\leqq Re\langle z,f_0\rangle\text{在几乎每个 } t\geqq 0 \text{ 处成立.}$$

因此，在几乎每个 $t\geqq 0$ 处，有

$$\|u(t)-x_0\|\frac{d}{dt}\|u(t)-x_0\|\leqq|\langle z, f_0\rangle|\leqq\|z\|\cdot\|u(t)-x_0\|,$$

而由于 $z\in Ax_0$ 是任意的，所以

$$\|u(t)-x_0\|\leqq t\|Ax_0\| \text{ 在每个 } t\geqq 0 \text{ 处成立.} \tag{15}$$

下面，设 $h>0$ 并令 $u(t+h)=v(t)$. 则

$$\begin{cases}\dfrac{dv(t)}{dt}\in Av(t) & \text{对几乎每个 } t\geqq 0 \text{ 成立,}\\ \text{并且 } v(0)=u(h).\end{cases} \tag{11'}$$

因此，类似于上面的讨论，对于某个 $f\in F(v(t)-u(t))$，我们得到

$$2^{-1}\frac{d}{dt}\|v(t)-u(t)\|^2=Re\left\langle\frac{dv(t)}{dt}-\frac{du(t)}{dt}, f\right\rangle\leqq 0 \quad \text{对几乎每个 } t\geqq 0 \text{ 成立.}$$

所以，我们有

$$\|u(t+h)-u(t)\|\leqq\|u(s+h)-u(s)\| \quad \text{对于 } t\geqq s\geqq 0 \text{ 成立,}$$

从而，再注意到(15)，我们就最后得到

$$\|u(t+h)-u(t)\|\leqq\|u(h)-u(0)\|\leqq h\|Ax_0\|. \tag{15'}$$

这就证明了(14).

定理 2 中的论断 i)→ii)的证明 (12)右端的极限的存在性是由定理 1 肯定了的. 令 T 是一个正的任意常数. 除了阶梯函数 $u_n(t)=(I-n^{-1}A)^{-[nt]}x_0$ 之外，我们在$[0,T]$上再定义另外一个函数序列 $v_n(t)$，即

$$\begin{cases}v_n(t)=u_n(j/n)+(t-j/n)\cdot n\cdot[u_n((j-1)/n)-u_n(j/n)]\\ \qquad (\text{当 } j/n\leqq t\leqq(j+1)/n;\ j=0,1,\cdots,[nT]-1 \text{ 时}),\\ \qquad =u_n(t)(\text{当 } n^{-1}[nT]\leqq t\leqq T \text{ 时}).\end{cases} \tag{16}$$

显然，$v_n(t)$ 在 $[0,T]$ 上，除去有限个形如 $t=j/n$ 的点之外，是强可微的并且对于 $j/n<t<(j+1)/n$，有

$$\begin{cases}\dfrac{dv_n(t)}{dt}=n[u_n((j+1)/n)-u_n(j/n)]=n[(I-n^{-1}A)^{-1}u_n(j/n)-u_n(j/n)]\\ \qquad =A_{1/n}u_n(j/n) \quad (\text{根据 } A_\lambda=\lambda^{-1}(J_\lambda-I))\\ \qquad =A_{1/n}u_n(t)=A_{1/n}v_n(j/n).\end{cases} \tag{17}$$

由(7)、(8)、上一节的(9)以及 $Au_n(j/n)=AJ_{1/n}u_n((j-1)/n)\ni A_{1/n}u((j-1)/n)$ 可得

$$\|A_{1/n}u_n(j/n)\|\leqq\|Au_n(j/n)\|\leqq\|A_{1/n}u_n(j-1)/n)\|\leqq\|Au_n((j-1)/n)\|. \tag{18}$$

从而，由(17)可知

$$\left\|\frac{dv_n(t)}{dt}\right\|=\|A_{1/n}u_n(j/n)\|\leqq\|Au_n(0)\|=\|Ax_0\| \quad \text{对 a.e. } t\geqq 0 \text{ 成立.} \tag{19}$$

在证明(17)—(19)时，我们附带证明了当 $j/n\leqq t\leqq(j+1)/n$ 时，

$$\|v_n(t)-u_n(t)\|=(t-j/n)\cdot n\cdot\|u_n((j+1)/n)-u_n(j/n)\|\leqq n^{-1}\|A_{1/n}u_n(j/n)\|\leqq n^{-1}\|Ax_0\|,$$

从而

$$\|v_n(t)-u_n(t)\|\leqq n^{-1}\|Ax_0\| \quad 对所有的\ t\geqq 0\ 成立. \tag{20}$$

我们令 $du(t)/dt=y(t)$ 以及 $n[u_n(t)-u_n(t-1/n)]=y_n(t)$. 于是由(11)可知,对几乎每个 $t\geqq 0$,有 $y(t)\in Au(t)$. 当 $t\neq j/n(j=0,1,\cdots)$ 时,还有 $y_n(t)\in Au_n(t)$,这是因为由前面§6的(8)可知

$$y_n(t)=A_{1/n}u_n(t-1/n)\in A(I-n^{-1}A)^{-1}u_n(t-1/n)=Au_n(t).$$

由于 A 是一个耗散集,所以利用前面§6的(5)可以得到对于几乎每个 $t\geqq 0$ 成立的不等式

$$\|[n\cdot u_n(t)-y_n(t)]-[n\cdot u(t)-y(t)]\|\geqq\|n\cdot u_n(t)-n\cdot u(t)\|.$$

所以,对于几乎每个 $t\geqq 0$,都有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{du(t)}{dt}-n[u(t)-u(t-1/n)]\right\|&=\|n[u_n(t)-u_n(t-1/n)]\\&\quad-n[u(t)-u(t-1/n)]+y(t)-y_n(t)\|\\&\geqq\|[n\cdot u_n(t)-y_n(t)]-[n\cdot u(t)-y(t)]\|-\|n\cdot u_n(t-1/n)\\&\quad-n\cdot u(t-1/n)\|\geqq n\cdot\|(u_n(t)-u(t))\|-n\cdot\|u_n(t-1/n)-u(t-1/n)\|.\end{aligned} \tag{21}$$

我们可以把 $u_n(t)$ 和 $u(t)$ 延拓到 t 为负值的情形,办法是令

$$\begin{cases}u_n(t)=x_0-n^{-1}z_0,\ 其中\ z_0\ 是\ Ax_0\ 的任一固定点,\\u(t)=x_0.\end{cases} \tag{22}$$

然后,把不等式(21)的首尾两端在 $[0,\theta]$ 上进行积分,这里 $n^{-1}\leqq\theta\leqq T$,我们就得到

$$-\int_{-1/n}^{0}n\|u_n(t)-u(t)\|dt+\int_{\theta-1/n}^{\theta}n\|u_n(t)-u(t)\|dt\leqq\int_0^\theta\left\|\frac{du(t)}{dt}-n[u(t)-u(t-1/n)]\right\|dt,$$

即是说

$$\begin{aligned}n\int_{\theta-1/n}^{\theta}\|u_n(t)-u(t)\|dt&\leqq\int_0^\theta\left\|\frac{du(t)}{dt}-n[u(t)-u(t-1/n)]\right\|dt+n\int_{-1/n}^{0}\|u_n(t)-x_0\|dt\\&\leqq\int_0^\theta\left\|\frac{du(t)}{dt}-n[u(t)-u(t-1/n)]\right\|dt+n^{-1}\|z_0\| \quad (根据(22)).\end{aligned}$$

把这些关于 $\theta=1/n,2/n,\cdots,N/n$ 而 $N=[nT]$ 的不等式加起来之后就得到

$$n\int_0^{N/n}\|u_n(t)-u(t)\|dt\leqq N\int_0^T\left\|\frac{du(t)}{dt}-n[u(t)-u(t-1/n)]\right\|dt+n^{-1}N\|z_0\|,$$

所以

$$\int_0^{N/n}\|u_n(t)-u(t)\|dt\leqq T\int_0^T\left\|\frac{du(t)}{dt}-n[u(t)-u(t-1/n)]\right\|dt+n^{-1}T\cdot\|z_0\|. \tag{23}$$

因为,根据假设,$s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}n[u(t)-u(t-1/n)]=du(t)/dt$ 对于 $[0,T]$ 上的几乎每个 t 都成立,所以根据(23)以及由(14)和 $n[u(t)-u(t-1/n)]=\int_{t-1/n}^{t}\frac{du(s)}{ds}ds$ 所导出的不等式

$$\left\|\frac{du(t)}{dt}-n[u(t)-u(t-1/n)]\right\|\leqq 2\cdot\|z_0\|,$$

我们就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^T\|u_n(t)-u(t)\|dt=0$. 所以,再利用(20),我们就得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \|v_n(t)-u(t)\|dt=0. \tag{24}$$

另一方面，利用(14)、(19)以及在证明(13)时所用的推理，就得到

$$2^{-1}\frac{d}{dt}\|v_n(t)-u(t)\|^2\leqq\|v_n(t)-u(t)\|\cdot\left\|\frac{dv_n(t)}{dt}-\frac{du(t)}{dt}\right\|$$

$$\leqq\|v_n(t)-u(t)\|\cdot 2\cdot\|z_0\|$$ 对几乎每个 $t\in[0,T]$ 成立.

所以，由 $v_n(0)=u(0)=x_0$ 可知

$$\|v_n(t)-u(t)\|^2\leqq 4\int_0^t\|v_n(s)-u(s)\|ds\cdot\|z_0\|$$ 对 $0\leqq t\leqq T$ 成立.

于是，由(24)可得 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} v_n(t)=u(t)$ 在 $[0,T]$ 上一致成立.

定理 3 令 A 是一个超耗散集 $\subseteq X\times X$，又设 $x_0\in D(A)$ 和 $\lambda>0$. 同前面 § 6 一样，初值问题

$$\frac{du^{(\lambda)}(t)}{dt}=A_\lambda u^{(\lambda)}(t),\ t\geqq 0,\ 以及\ u^{(\lambda)}(0)=x_0 \tag{25}$$

有一个唯一确定的解 $u^{(\lambda)}(t)$，这是因为 A_λ 是一个利普希茨映射. 于是

$$\begin{cases} s\text{-}\lim\limits_{\lambda\downarrow 0} u^{(\lambda)}(t)\text{在 } t \text{ 的每个紧区间上一致存在，并且}\\ s\text{-}\lim\limits_{\lambda\downarrow 0} u^{(\lambda)}(t)=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(I-n^{-1}tA)^{-n}x_0. \end{cases} \tag{26}$$

注 如果(11)的强解 $u(t)$ 存在，则同线性情形一样，$u(t)$ 既可用 Hille 型的逼近式 $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(I-n^{-1}tA)^{-n}x_0$ 表出又可用 Yosida 型的逼近式 $s\text{-}\lim\limits_{\lambda\downarrow 0} u^{(\lambda)}(t)$ 表出.

定理 3 的证明 因为 $A_1=(J_1-I)$ 是耗散的，所以同(15′)的情形一样，我们得到

$$\|u^{(1)}(t)-u^{(1)}(0)\|\leqq t\cdot\|A_1u^{(1)}(0)\|=t\cdot\|A_1x_0\|=t\cdot\|J_1x_0-x_0\|. \tag{27}$$

另一方面，容易验证(25)在 $\lambda=1$ 时的解 $u^{(1)}(t)$ 为

$$u^{(1)}(t)=e^{-t}x_0+\int_0^t e^{s-t}J_1u^{(1)}(s)\,ds. \tag{28}$$

于是

$$u^{(1)}(t)-J_1^nx_0=e^{-t}(x_0-J_1^nx_0)+\int_0^t e^{s-t}[J_1u^{(1)}(s)-J_1^nx_0]ds,$$

从而，根据 J_1 是一个收缩映射这一事实，我们就得到

$$\|u^{(1)}(t)-J_1^nx_0\|\leqq ne^{-t}\|(J_1-I)x_0\|+\int_0^t e^{s-t}\|u^{(1)}(s)-J_1^{n-1}x_0\|ds. \tag{29}$$

我们从(29)来推导出

$$\|u^{(1)}(n)-J_1^nx_0\|\leqq\sqrt{n}\,\|(J_1-I)x_0\|. \tag{30}$$

我们可以认为 $(J_1-I)x_0=A_1x_0\neq 0$. 这是因为，不然的话，(25)关于 $\lambda=1$ 的解 $u^{(1)}(t)$ 就可表为 $u^{(1)}(t)\equiv x_0$，从而(30)显然成立. 假设 $(J_1-I)x_0\neq 0$，再利用(29)就得到

$$\begin{cases} \varphi_n(t)\leqq ne^{-t}+\int_0^t e^{s-t}\varphi_{n-1}(s)\,ds,\ 其中\\ \varphi_n(t)=\|u^{(1)}(t)-J_1^nx_0\|\cdot\|(J_1-I)x_0\|^{-1}. \end{cases} \tag{31}$$

我们用对 n 的归纳法来证明

$$\varphi_n(t) \leqq \{(n-t)^2+t\}^{1/2}. \tag{32}$$

在此不等式中，令 $t=n$ 就得到(30)．不等式(32)对 $n=0$ 是显然成立的．如果(32)对 $(n-1)$ 成立，则 $\varphi_n(t) \leqq ne^{-t}+\int_0^t e^{s-t}\{(n-1-s)^2+s\}^{1/2}ds$．把此式右端记为 $\psi_n(t)e^{-t}$，我们就需要证明

$$\psi_n(t) \leqq e^t\{(n-t)^2+t\}^{1/2}.$$

由于 $\psi_n(0)=n$，所以只需证明

$$\psi_n'(t)=e^t\{(n-1-t)^2+t\}^{1/2} \leqq \frac{d}{dt}e^t\{(n-t)^2+t\}^{1/2}.$$

最后这个不等式是容易验证的，从而我们就证明了(30)．

现在我们就来证明(26)．令 $v^{(\lambda)}(t)=u^{(\lambda)}(\lambda t)$．则由 $A_\lambda=\lambda^{-1}(J_\lambda-I)$ 可知

$$\frac{dv^{(\lambda)}(t)}{dt}=(J_\lambda-I)v^{(\lambda)} \quad \text{对一切 } t \geqq 0 \text{ 成立且 } v^{(\lambda)}(0)=x_0. \tag{25'}$$

在(30)中，把 J_1 取为 J_λ，$u^{(1)}$ 取为 $v^{(\lambda)}$，再利用前面 § 6 的(9)，于是得到

$$\|v^{(\lambda)}(n)-J_\lambda^n x_0\|=\|u^{(\lambda)}(n\lambda)-J_\lambda^n x_0\| \leqq \sqrt{n}\,\|(J_\lambda-I)x_0\| \leqq \sqrt{n}\,\lambda\|A_\lambda x_0\| \leqq \sqrt{n}\,\lambda\|Ax_0\|. \tag{33}$$

令 $\lambda_k \downarrow 0$ 和 $n_k=[t/\lambda_k]$，从而 $n_k\lambda_k \uparrow t$．于是由(1′)和(10)可得 $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} J_{\lambda_k}^{n_k}x_0=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(I-n^{-1}tA)^{-n}x_0$．

所以，再注意到(33)，我们就得到

$$\|u^{(\lambda_k)}(n_k\lambda_k)-J_{\lambda_k}^{n_k}x_0'\| \leqq \sqrt{n_k}\,\lambda_k\|Ax_0\| \leqq n_k^{-1/2}t\,\|Ax_0\|.$$

因为 $\{\lambda_k\}$ 是任意的，所以我们就证明了(26)．

注 上述证明出自 H. Brezis-A. Pazy[2]．这里还要指出，不等式 (30) 是由 I. Miyadera-S. Oharu[1]得出的．

定理 2 中的论断 ii)→i)的证明 设 $u(t)=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(I-n^{-1}tA)^{-n}x_0$ 在 $t_0>0$ 是强可微的，且其强导数为 $y=du(t)/dt|_{t=t_0}$，从而

$$u(t_0+h)=u(t_0)+hy+0(h), \text{其中 } s\text{-}\lim_{h\downarrow 0}0(h)/h=0. \tag{34}$$

因为(19)和(20)意味着 $t\to u(t)$ 是一个利普希茨映射，其利普希茨常数为 $\|Ax_0\|$，所以，如果我们能够证明

$$\{u(t_0),y\}\in A, \tag{35}$$

则我们就得到了 i)．(35) 的证明如下．令 $0<\lambda<t_0$．则由 $u(t)$ 在 $t=t_0$ 的强可微性以及 A 的超耗散性质可知，存在一个唯一确定的点 $\{x_\lambda, y_\lambda\}\in A$ 使得

$$x_\lambda-\lambda y_\lambda=u(t_0-\lambda)=u(t_0)-\lambda y+0(\lambda). \tag{36}$$

因为根据假设，A 是 $X\times X$ 中的一个闭集，所以，如果我们能证明

$$s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0} x_\lambda=u(t_0) \quad \text{和} \quad s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0} y_\lambda=y, \tag{37}$$

则我们就得到(35)．为了证明(37)，我们令

$$\begin{cases} \hat{x}_\lambda=\hat{x}-\lambda\hat{y}, \text{其中} \{\hat{x},\hat{y}\} \text{是} A \text{的某个点}, \\ \qquad\qquad \text{我们在后面才来确定它}. \end{cases} \tag{38}$$

因为 $A_\lambda\hat{x}_\lambda=\hat{y}$，并且由前面 § 6 中的命题 1 可知，$A_\lambda$ 是耗散的，于是由(13)和(25)可知，存在某个

$f\in F(u^{(\lambda)}(t)-\hat{x}_\lambda)$ 使得

$$2^{-1}\frac{d}{dt}\|u^{(\lambda)}(t)-\hat{x}_\lambda\|^2=Re\langle A_\lambda u^{(\lambda)}(t),f\rangle=Re\langle A_\lambda u^{(\lambda)}(t)-A_\lambda\hat{x}_\lambda,f\rangle+Re\langle A_\lambda\hat{x}_\lambda,f\rangle\leq Re\langle\hat{y},f\rangle.$$

因此

$$\|u^{(\lambda)}(t_0+h)-\hat{x}_\lambda\|^2-\|u^{(\lambda)}(t_0)-\hat{x}_\lambda\|^2\leq 2\int_0^h\langle\hat{y},u^{(\lambda)}(t_0+\tau)-\hat{x}_\lambda\rangle_s\cdot d\tau, \tag{39}$$

其中

$$\langle w,z\rangle_s=\sup_{k\in F(z)}Re\langle w,k\rangle. \tag{40}$$

稍后一些时候我们才去证明

$$\begin{cases}\langle w,z\rangle_s \text{ 是上半连续的, 亦即 } s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}w_n=w_\infty \text{ 和}\\ s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_\infty \text{ 必导致 } \lim\limits_{n\to\infty}\sup\langle w_n,z_n\rangle_s\leq\langle w_\infty,z_\infty\rangle_s.\end{cases} \tag{41}$$

于是, 利用在(26)中证明过的 $s\text{-}\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}u^{(\lambda)}(t)=u(t)=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(I-n^{-1}tA)^{-n}x_0$ 并利用 $s\text{-}\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\hat{x}_\lambda=\hat{x}$, 我们就得到

$$\|u(t_0+h)-\hat{x}\|^2-\|u(t_0)-\hat{x}\|^2\leq 2\int_0^h\langle\hat{y},u(t_0+\tau)-\hat{x}\rangle_s\cdot d\tau. \tag{42}$$

由于对每个 $f\in F(u(t_0)-\hat{x})$ 都有

$$Re\langle u(t_0+h)-u(t_0),f\rangle-Re\langle\hat{x}-u(t_0),f\rangle=Re\langle u(t_0+h)-\hat{x},f\rangle$$
$$\leq\|u(t_0+h)-\hat{x}\|\ \|\hat{x}-u(t_0)\|\leq 2^{-1}\{\|u(t_0+h)-\hat{x}\|^2+\|\hat{x}-u(t_0)\|^2\}.$$

所以, 由 $Re\langle\hat{x}-u(t_0),f\rangle=-\|\hat{x}-u(t_0)\|^2$ 和(42)可得

$$2\cdot Re\left\langle\frac{u(t_0+h)-u(t_0)}{h},f\right\rangle\leq 2\int_0^1\langle\hat{y},u(t_0+h\tau)-\hat{x}\rangle_s\cdot d\tau.$$

于是, 由 $u(t)$ 在 $t=t_0$ 处的强可微性以及(41)可知

$$Re\langle y,f\rangle\leq\langle\hat{y},u(t_0)-\hat{x}\rangle_s \tag{42'}$$

我们可以把(42′)右边的上确界改成极大值, 这是因为包含于 X' 的强闭球内的集合 $F(u(t_0)-\hat{x})$ 在 X' 内是弱*紧的(见第五章附录 § 1 中的定理 1). 因此存在一个 $\hat{f}\in F(u(t_0)-\hat{x})$ 使得

$$Re\langle y,f_1\rangle\leq Re\langle y,\hat{f}\rangle\quad \text{对所有的 } f_1\in F(u(t_0)-\hat{x}) \text{ 都成立.}$$

取 $\hat{x}=x_\lambda$, $\hat{y}=y_\lambda$ 以及 $f_1=\hat{f}$ 之后, 我们就得到

$$Re\langle y,\hat{f}\rangle\leq Re\langle y_\lambda,\hat{f}\rangle, \text{ 即是说, } Re\langle y_\lambda-y,\hat{f}\rangle\geq 0. \tag{43}$$

另一方面, 从(36)可得

$$\frac{u(t_0)-x_\lambda}{\lambda}+\frac{0(\lambda)}{\lambda}=y-y_\lambda, \tag{44}$$

从而, 由(43)可得

$$\|u(t_0)-x_\lambda\|^2=Re\langle u(t_0)-x_\lambda,\hat{f}\rangle\leq Re\langle 0(\lambda),\hat{f}\rangle\leq 0(\lambda)\ \|u(t_0)-x_\lambda\|.$$

于是 $\|u(t_0)-x_\lambda\|\leq 0(\lambda)$, 从而, 由(44)就得到了(37).

最后, 关于(41)的证明如下. 因为集合 $\{f\in X';\|f\|\leq\|z_m\|\}$ 是弱*紧的 (第五章附录 § 1 中的

定理 1)，所以我们可以找到 $f_m \in X'$ 使得

$$\langle w_m, z_m \rangle_s = Re\langle w_m, f_m \rangle \text{且} \|f_m\| \leq \|z_m\|.$$

不失一般性，我们可以假设 $\lim_{m\to\infty}\langle w_m, z_m\rangle_s$ 存在. 设 $f_\infty \in X'$ 是 $\{f_m\}$ 的任何一个弱*聚点. 于是有

$$\lim_{m\to\infty}\langle w_m, z_m\rangle_s = \lim_{m\to\infty} Re\langle w_m, f_m\rangle = Re\langle w_\infty, f_\infty\rangle, \ \|f_\infty\| \leq \|z_\infty\|$$

这是因为 $s\text{-}\lim_{m\to\infty} w_m = w_\infty$，并且对于序列 $\{m\}$ 的某个适当的子序列 $\{m'\}$，有 $w^*\text{-}\lim_{m'\to\infty} f_{m'} = f_\infty$. 所以必定有(41).

注 一个不幸的但因而更有趣的情况是，虽然在很一般的条件下 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}(I-n^{-1}tA)^{-n}x_0$ 和 $s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0} u^{(\lambda)}(t)$ 都存在且彼此相等，然而，此极限对任何 t 都不一定是强可微的. M. Crandall-T. Liggett[2]就给出了这样一个例子. 近来，P. Bénilan[1]对于上述情况给出了下述的补救办法 设 $u(t)$ 是初值问题(11)的一个强解. 再设 $\{z, w\}$ 是 $X\times X$ 的超耗散子集 A 的任何一个固定点. 这时，同(42)一样，我们得到

$$\begin{cases}\|u(t)-z\|^2 \leq \|u(s)-z\|^2 + 2\int_s^t \langle w, u(\tau)-z\rangle_s \cdot d\tau \text{ 对一切 } 0\leq s\leq t \\ \text{成立，且具有一个固定的初始条件 } u(0)=x_0 \in D(A).\end{cases}$$

P. Bénilan[1]把一个取值于 X 内的强连续函数 $u(t)$ 叫做初值问题(11)的一个**积分解**，如果 $u(t)$ 对一切 $\{z, w\}\in A$ 都满足上述条件. 同时，他证明了

定理 4 设 A 是一个超耗散集 $\subseteq X\times X$. 则 $u(t) = s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0} u^{(\lambda)}(t) = s\text{-}\lim_{n\to\infty}(I-n^{-1}tA)^{-n}\cdot x_0$ 是(11)的唯一确定的积分解.

关于这个定理的证明以及进一步的推广和论述，我们建议读者去看 P. Bénilan[2].

注 要想更好地了解在本节和前面几节中的那些定理的应用范围，可以去读，譬如说，S. Aizawa[1]、M. G. Crandall[3]、Y. Konishi[1]和[2]以及 B. K. Quinn[1].

补 充 说 明

第一章和第六章

1. 关于 S. L. Sobolev, L. Schwartz 和 I. M. Gelfand 的分布或广义函数理论，请参看新增订版 L. Schwartz [6] 和英文版 I. M. Gelfand[6]—[10].

2. 关于 M. Sato 的超函数理论的最近发展，请参看 M. Sato [2]—[3] 和 P. Schapira[1].

第 六 章

1. (§7) Sobolev 空间 在 p. 147 给出的定理 (Sobolev 引理) 是 S. L. Sobolev [1]—[2] 中的所谓Sobolev 嵌入定理的一个非常特殊的情况. 这些嵌入定理的发展情况的一个综合叙述是在 R. A. Adams[1]中给出的. 亦请参看 E. M. Stein[2].

第 十 章

1. (§1) 迹算子或广义边界值. 我们可证如下

定理 设Ω是R^n中的有界开域使得它的边界超曲面$\partial\Omega$是C^2的. 则对于任何$f(x)\in W^{1,2}(\Omega)$和几乎所有的$\xi\in\partial\Omega$, 如果我们令x沿在点$\xi\in\partial\Omega$的法线趋近于ξ, 极限值$\varphi(\xi)=\lim\limits_{x\to\xi}f(x)$必存在. 此外, …$f(x)$的这个边界值$\varphi(\xi)$属于$L^2(\partial\Omega)$且满足不等式:

$$\|\varphi(\xi)\|_{L^2(\partial\Omega)}\leqq C\{\|f(x)\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{j=1}^{n}\|\partial f/\partial x_j\|_{L^2(\Omega)}\},$$

这里正常数C与f的选取无关, 记号$\partial f/\partial x_j$表示分布意义下的微分.

线性映射$f\to\varphi$称为迹算子. 对于上面定理的证明和定理的推广请参看, 例如, S. Mizohata [7], R. A. Adams[1] 和 F. Treves[2].

2. (第十章的附录) 对于 R. A. Minlos[1] 结果的推广的统一处理请参看 L. Schwartz [7] 和那里引用的文献.

第 十 一 章

1. 对于 Hilbert 空间中的收缩算子理论的最近发展请参看 B. Sz. Nagy-C. Foias[4].

第 十 二 章

1. (§1) Choquet 对于 Krein-Milman 定理的精细的改进请参看 R. R. Phelps[1].

第 十 三 章

1. (§1) 我们可以证明(K. Yosida[17])

定理 1′ 设 $P(t, x, E)$ 是具不变测度 m 且使得 $m(S)=1$ 的相空间 $(S, \mathfrak{B})$ 上的 Markov 过程. 则对于任何 $f\in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 和 $t>0$, 存在相应的 $f_{-t}\in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ 满足 $\|f_{-t}\|_1\leq\|f\|_1$ 使得

$$\int_S m(dx)f(x)P(t, x, E)=\int_E f_{-t}(x)m(dx) \quad \text{对于一切 } E\in\mathfrak{B} \text{ 成立.} \tag{19}$$

证明 因为 $P(t,x,E)$ 是有界函数, $\int_S m(dx)f(x)P(t,x,E)$ 对于任何 $f\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 存在且有

$$\sup_E\left|\int_S m(dx)f(x)P(t,x,E)\right|\leq\sup_E\int_S m(dx)|f(x)|P(t,x,E)\leq\|f\|_1. \tag{20}$$

若 $f\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 是 $\in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$, 则由(8), $E\in\mathfrak{B}$ 的 σ_可加函数 $\int_S m(dx)f(x)P(t,x,E)$ 是 m- 绝对连续的且有 $\left|\int_S m(dx)f(x)P(t,x,E)\right|\leq\|f\|_{L^\infty}\cdot m(E)$, 这里 $\|f\|_{L^\infty}=\text{essential}\sup_x|f(x)|$. 其次, 设 $f\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 是实值非负的且令 $f^{(n)}(x)=\min(f(x),n)$ 由于根据 p. 60 的 Vitali-Hahn-Saks 定理,

$\int_S m(dx)f(x)P(t,x,E)=\lim_{n\to\infty}\int_S m(dx)f^{(n)}(x)P(t,x,E)$, 对每一 $E\in\mathfrak{B}$ 的左端是 m-绝对连续的. 因此, 对于 f 的这一特殊情况, 我们可以由(19)定义 $f_{-t}\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$ 且由(20)有 $\|f_{-t}\|_1\leq\|f\|_1$. 这就证明了定理 1′.

注 考虑由 $P(t,x,E)=C_E(y_t(x))$ 给出, 且通过 S 到 S 上的使得 $m(E)=m(y_t\cdot E)$ 的一对一变换 $x\to y_t(x)$ 的单参数族 $\{y_t(x); -\infty<t<\infty\}$ 确定的确定性情况. 则我们看出定理 1(p. 319) 中的映射 $f\to f_t$ 和定理 1′ 中的映射 $f\to f_{-t}$ 分别由 $f_t(x)=f(y_t(x))$ 和 $f_{-t}(x)=f(y_{-t}(x))$ 给出. 在这种意义下, 具有不变测度 m 的 Markov 过程是"时间可逆的".

2. (§ 1) 作为前面定理 1′ 的系, 如同定理 2(p. 322)的情况一样, 我们得到如下

定理 2′ (K. Yosida[17]) 在定理 1′ 的假设下, 如下的平均遍历定理成立:

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^{n}f_{-k}=f_{-}^{*} \quad \text{在 } L^1(S,\mathfrak{B},m) \text{ 中存在,} \tag{21}$$

$$\int_S f(s)m(ds)=\int_S f_{-}^{*}(s)m(ds). \tag{22}$$

第 十 四 章

1. (§ 4)我们可以证明

定理 1′ 在 $x(0)=y\in D(A(0))$ 和(3)(p. 363)的假设下, (1)′(p. 363)的解, 如果存在, 是唯一确定的.

证明 我们遵循 T. Kato[3] 中的论证. 于是对于 $\delta>0$, 有

$$x(t+\delta)=x(t)+\delta A(t)x(t)+0(\delta)$$

$$=(I+\delta A(t))(I-\delta A(t))(I-\delta A(t))^{-1}x(t)+0(\delta)$$

$$= (I-\delta A(t))^{-1}x(t)-\delta^2 A(t)(I-\delta A(t))^{-1}A(t)x(t)+0(\delta)$$

$$= (I-\delta A(t))^{-1}x(t)-\delta((I-\delta A(t))^{-1}-I)A(t)x(t)+0(\delta).$$

由于(3)，对于任一 $z\in X$ [请参看第九章§7的(2)式]，我们有 $s\text{-}\lim_{\delta\to 0}(1-\delta A(t))^{-1}z=z$. 因此，再次由(3)，有

$$\|x(t+\delta)\|\leq\|x(t)\|+0(\delta)$$

从而 $d^+\|x(t)\|/dt\leq 0$，由此导致 $\|x(t)\|\leq\|x(0)\|$.

因此，(1)′ 的具有相同初始条件 $\in D(A(0))$ 的两个解之差必为 0.

第九章和第十四章

1. 对于线性发展方程，请参看 S. Krein[2]，P. Lax-R. S. Phillips[4]，J. L. Lions [5] 和 F. Treves[2].

2. 对于线性和非线性发展方程，请参看 V. Barbu [1]，F. Browder[2]，J. L. Lions [5]，R. H. Martin[1]，K. Masuda[1]，I. Miyadera[4] 和 H. Tanabe[6]，最后开列的一本 Tanabe 的书的英文翻译工作正在进行中.

3. 目前，凸分析在非线性发展方程中起着重要的作用. 有关材料请参看，例如，R. S. Rockafeller[1] 和 I. Ekeland-R. Temam[1].

参考书目

Achieser, N. I.

[1] (with I. M. Glazman) Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum, Akademie-Verlag 1954.

Adams, R. A.

[1] Sobolev Spaces, Academic Press 1975.

Agmon, S.

[1] (with L. Nirenberg) Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space. Comm. P. and Appl. Math. **16**, 121—239(1963).

Aizawa, S.

[1] A semigroup treatment of the Hamilton-Jacobi equation in one space variable. Hiroshima Math. J. **3**, No. 2, 367—386(1973).

Akilov, G.

[1] See Kantorovitch-Akilov[1].

Alexandrov, P.

[1] (with H. Hopf) Topologie, Vol. I, Springer 1935.

Aronszajn, N.

[1] Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 337—404(1950).

Balakrishnan, V.

[1] Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them. Pacific J. Math. **10**, 419—437(1960).

Banach, S.

[1] Théorie des Opérations Linéaires, Warszawa 1932.

[2] Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires. Bull. Sci. Math. France **50**, 27—32 and 36—43(1926).

Barbu, V.

[1] Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff International Publishing 1976.

Beboutov, M.

[1] Markoff chains with a compact state space. Rec. Math. **10**, 213—238(1942).

Bénilan, P.

[1] Solutions intégrales d'équations d'évolution dans un espace de Banach. C. R. Acad. Sci. de Paris **274**, 45—50(1972).

[2] Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications. Thèse, Orsay 1972.

Bergman, S.

[1] The Kernel Function and the Conformal Mapping. Mathematical Surveys, No. 5(1950).

Bers, L.

[1] Lectures on Elliptic Equations. Summer Seminar in Appl. Math. Univ. of Colorado, 1957.

Birkhoff, G.

[1] Lattice Theory. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1940.

Birkhoff, G. D.

[1] Proof of the ergodic theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17**, 656—660(1931).

[2] (with P. A. Smith) Structure analysis of surface transformations. J. Math. Pures et Appliq. **7**, 345—379(1928).

Bochner, S.

[1] Integration von Funktionen, deren Wert die Elemente eines Vektorraumes sind. Fund. Math. **20**, 262—276(1933).

[2] Diffusion equations and stochastic processes. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35**, 369—370 (1949).

[3] Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademie-Verlag 1932.

[4] Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. Math. Ann. **96**, 119—147(1927).

Bogolioubov, N.

[1] See Krylov-Bogolioubov[1].

Bohr, H.

[1] Fastperiodische Funktionen. Springer 1932.

Bourbaki, N.

[1] Topologie Générale. Act., Sci. et Ind., nos. 856, 916, 1029, 1045, 1084, Hermann 1940—42.

[2] Espaces Vectoriels Topologiques. Act. Sci. et Ind., nos. 1189, 1229, Hermann 1953—55.

Brezis, H.

[1] Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Amsterdam: North Holland Publ. Co. 1973.

[2] (with A. Pazy) Accretive sets and differential equations in Banach spaces. Israel J. of Math. **8**, 367—383(1970).

Browder, F. E.

[1] Functional analysis and partial differential equations, I—II. Math. Ann. **138**, 55—79 (1959) and **145**, 81—226(1962).

[2] Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolutions in Banach Spaces, Amer. Math. Soc. 1976.

Chacon, R. V.

[1] (with D. S. Ornstein) A general ergodic theorem. Ill. J. Math. **4**, 153—160(1960).

Choquet, G.

[1] La théorie des représentations intégrales dans les ensembles convexes compacts. Ann. Inst. Fourier **10**, 334—344(1960).

[2] (with P.-A. Meyer) Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques. Ann. Inst. Fourier **13**, 139—154(1963).

Clarkson, J. A.

[1] Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math Soc. **40**, 396—414(1936).

Crandall, M. G.

[1] (with A. Pazy) Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets. J. Funct. Analysis **3**, 376—418(1969).

[2] (with T. Liggett) Generation of semi-groups of nonlinear transformations in general Banach spaces. Amer. J. Math. **93**, 265—298(1971).

[3] The semi-group approach to first order quasilinear equations in several space variables. Israel J. of Math. **12**, 108—132(1972).

Dieudonné, J.

[1] Recent advances in the theory of locally convex vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **59**, 495—512(1953).

Doob, J. L.

[1] Stochastic processes with an integral-valued parameter. Trans. Amer. Math. Soc. **44**. 87—150(1938).

[2] Probability theory and the first boundary value problem. Ill. J. Math. **2**, 19—36(1958).

[3] Probability methods applied to the first boundary value problem. Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. **II**, 49—80(1956).

Dorroh, J. R.

[1] A nonlinear Hille-Yosida-Phillips theorem. J. Funct. Analysis **3**, 345—393(1969).

Dunford, N.

[1] (with J. Schwartz) Linear Operators, Vol. I, Interscience 1958.

[2] Uniformity in linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 305—356(1938).

[3] On one-parameter groups of linear transformations. Ann. of Math. **39**, 569—573(1938).

[4] (with J. Schwartz) Convergence almost everywhere of operator averages. J. Rat. Mech. Anal. **5**, 129—178(1956).

[5] (with J. Schwartz) Linear Operators, Vol. II, Interscience 1963.

[6] (with J. Schwartz) Linear Operators, Vol. III, Interscience, to appear.

Dynkin, E. B.

[1] Markoff processes and semi-groups of operators. Teorya Veroyatn. **1**(1956).

[2] Infinitesimal operators of Markoff processes. Teorya Veroyatn. **1**(1956).

Eberlein, W. F.

[1] Weak compactness in Banach spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **38**, 51—53(1947).

Ehrenpreis, L.

[1] Solutions of some problems of division. Amer. J. Math. **76**, 883—903(1954).

Erdélyi, A.

[1] Operational Calculus and Generalized Functions. Reinhart 1961.

Feller, W.

[1] On the génération of unbounded semi-groups of bounded linear operators. Ann of Math. **58**, 166—174(1953).

[2] The parabolic differential equation and the associated semi-group of transformations. Ann. of Math. **55**, 468—519(1952).

[3] On the intrinsic form for second order differential operators. Ill. J. Math. **2**, No. 1, 1—18(1958).

[4] Generalized second order differential operators and their lateral conditions. Ill. J. Math. 1, No. 4, 459—504(1957).

[5] Some new connections between probability and classical analysis. Proc. Internat. Congress of Math. 1958, held at Edinburgh, pp. 69—86.

[6] On differential operators and boundary conditions. Comm. Pure and Appl. Math. 8, 203—216(1955).

[7] Boundaries induced by non negative matrices. Trans. Amer. Math. Soc. 83, 19—54 (1956).

[8] On boundaries and lateral conditions for the Kolmogoroff differential equations. Ann. of Math. 65, 527—570(1957).

Foias, C.

[1] Remarques sur les semi-groupes distributions d'opérateurs normaux. Portugaliae Math. 19, 227—242(1960).

Freudenthal, H.

[1] Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren. Proc. Acad. Amsterdam 39, 832—833(1936).

[2] Teilweise geordnete Modulen. Proc. Acad. Amsterdam 39, 641—651(1936).

Friedman, A.

[1] Generalized Functions and Partial Differential Equations, Prentice-Hall 1963.

Friedrichs, K.

[1] Differentiability of solutions of elliptic partial differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. 5, 299—326(1953).

[2] Symmetric positive systems of differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. 11, 333—418(1958).

[3] Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren, I—III. Math. Ann. 109, 465—487, 685—713(1934) and 110, 777—779(1935).

Fukamiya, M.

[1] Topological methods for Tauberian theorem. Tohoku Math. J. 77—87(1949).

[2] See Yosida-Fukamiya [16].

Gårding, L.

[1] Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Math. Scand. 1, 55—72(1953).

[2] Some trends and problems in linear partial differential equations. Internat. Congress of Math. 1958, held at Edinburgh, pp. 87—102.

Gelfand, I. M.

[1] (with I. M. Šilov) Generalized Functions, Vol. I—III, Moscow 1958.

[2] Normierte Ringe. Rec. Math. 9, 3—24(1941).

[3] (with N. Y. Vilenkin) Some Applications of Harmonic Analysis (Vol. IV of Generalized Functions), Moscow 1961.

[4] (with D. Raikov) On the theory of characters of commutative topological groups. Doklady Akad. Nauk SSSR 28, 195—198(1940).

[5] (with D. A. Raikov and G. E. Šilov) Commutative Normed Rings, Moscow 1960.
Gelfand, I. M. and his collaborators on Generalized Functions:
[6] (With G. E. Shilov) Volume 1. Properties and Operators, Academic Press 1966.
[7] (With G. E. Shilov) Volume 2. Spaces of Fundamental and Generalized Functions, Academic Press 1968.
[8] (With G. E. Shilov) Volume 3. Theory of Differential Equations, Academic Press 1967.
[9] (With N. Ya. Vilenkin) Volume 4. Applications of Harmonic Analysis, Academic Press 1964.
[10] (With M. I. Graev and N. Ya. Vilenkin) Volume 5. Integral Geometry and Representation Theory. Academic Press 1966.

Glazman, I. M.
[1] See Achieser-Glazman [1].

Grothendieck, A.
[1] Espaces Vectoriels Topologiques, seconde éd., Sociedade de Mat. de São Paulo 1958.
[2] Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires. Memoirs of Amer. Math. Soc. No. 16(1955).

Hahn, H.
[1] Über Folgen linearer Operatoren. Monatsh. für Math. und Phys. 32, 3—88(1922).
[2] Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. J. reine und angew. Math. 157, 214—229(1927).
[3] Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. Monatsh. für Math. und Phys. 23, 161—224(1912).

Halmos, P. R.
[1] Measure Theory, van Nostrand 1950.
[2] Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea 1951.

Hausdorff, F.
[1] Mengenlehre, W. de Gruyter 1935.

Hellinger, E.
[1] Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen. J. reine und angew. Math. 136, 210—271(1909).

Helly, E.
[1] Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Monatsh. für Math. und Phys. 31, 60—91(1921).

Hilbert, D.
[1] Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen unabhängigen Variablen. Rend. Circ. Mat. Palermo 27, 59—74(1909).

Hille, E.
[1] (with R. S. Phillips) Functional Analysis and Semi-groups. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1957. It is the second edition of the book below.
[2] Functional Analysis and Semi-groups. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1948.

[3] On the differentiability of semi-groups of operators. Acta Sci. Math. Szeged **12B**, 19—24(1950).

[4] On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions. Proc. R. Physiogr. Soc. Lund **21**, 1—13(1951).

[5] Une généralization du problème de Cauchy. Ann. Inst. Fourier **4**, 31—48(1952).

[6] The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations, J. d'Analyse Math. **3**, 81—196(1954).

[7] Perturbation methods in the study of Kolmogoroff's equations. Proc. Internat. Congress of Math. 1954, held at Amsterdam. Vol. **III**, pp. 365—376.

[8] Linear differential equations in Banach algebras. Proc. Internat. Symposium on Linear Analysis, held at Jerusalem, 1960, pp. 263—273.

[9] Les probabilités continues en chaine. C.R. Acad. Sci. **230**, 34—35(1950).

Hirsch, F.

[1] Opérateurs codissipatifs. C.R. Acad. Sci. de Paris **270**, 1487—1490(1970).

[2] Familles résolventes générateurs, cogénérateurs, potentiels. Annales L'Institut Fournier de L'Univ. de Grenoble **22**, 89—210(1972).

Hoffman, K.

[1] Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall 1962.

Hopf, E.

[1] Ergodentheorie, Springer 1937.

[2] The general temporally discrete Markoff processes. J. Rat Mech. and Anal. **3**, 13—45 (1954).

[3] On the ergodic theorem for positive linear operators. J. reine und angew. Math. **205**, 101—106(1961).

Hopf, H.

[1] See Alexandrov-Hopf [1].

Hörmander, L.

[1] On the theory of general partial differential operators. Acta Math. **94**, 161—248(1955).

[2] Lectures on Linear Partial Differential Equations, Stanford Univ. 1960.

[3] Linear partial differential equations without solutions. Math. Ann. **140**, 169—173(1960).

[4] Local and global properties of fundamental solutions. Math. Scand. **5**, 27—39(1957).

[5] On the interior regularity of the solutions of partial differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. **9**, 197—218(1958).

[6] Linear Partial Differential Operators, Springer 1963.

Hunt, G.A.

[1] Markoff processes and potentials, I—II. Ill. J. of Math. **1** and **2**(1957 and 1958).

Itô, K.

[1] (with H.P. McKean) Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer, to appear.

Itô, S.

[1] The fundamental solutions of the parabolic differential equations in differentiable manifold. Osaka Math. J. **5**, 75—92(1953).

[2] (with H. Yamabe) A unique continuation theorem for solutions of a parabolic differential equation. J. Math. Soc. Japan 10, 311—321(1958).

Jacobs, K.

[1] Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Springer 1960.

John. F.

[1] Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations, Interscience 1955.

Kakutani, S.

[1] Iteration of linear operations in complex Banach spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo 14, 295—300(1938).

[2] See Yosida-Mimura-Kakutani [10].

[3] Weak topology and regularity of Banach spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo 15, 169—173 (1939).

[4] Concrete representation of abstract (M)-spaces. Ann. of Math. 42, 994—1024(1941).

[5] Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem. Ann. of Math. 42, 523—537(1941).

[6] Ergodic theorems and the Markoff processes with a stable distribution. Proc. Imp. Acad. Tokyo 16, 49—54(1940).

[7] See Yosida-Kakutani [7].

[8] Ergodic Theory. Proc. Internat. Congress of Math. 1950, held at Cambridge, Vol. 2, pp. 128—142.

Kantorovitch, L.

[1] (with G. Akilov) Functional Analysis in Normed Spaces. Moscow 1955.

Kato, T.

[1] Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semi-groups. Proc. Japan Acad. 35, 467—468(1959).

[2] Note on fractional powers of linear operators. Proc. Japan Acad. 36, 94—96(1960).

[3] Integration of the equation of evolution in a Banach space. J. Math. Soc. of Japan, 5, 208—234(1953).

[4] On linear differential equations in Banach spaces. Comm. Pure and Appl. Math. 9, 479—486(1956).

[5] Fractional powers of dissipative operators. J. Math. Soc. of Japan, 13, 246—274(1961); II, ibid. 14, 242—248(1962).

[6] Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces. Nagoya Math. J. 19, 93—125(1961).

[7] Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type. Trans. Amer. Math. Soc. 70, 195—211(1950).

[8] (with H. Tanabe) On the abstract evolution equation. Osaka Math. J. 14, 107—133 (1962).

[9] Perturbation Theory for Linear Operators, Springer (1966).

[10] Semi groups and temporally inhomogeneous evolution equations, in Equazioni Differen-

ziali Astratte, Centro Internazionale Matematico Estivo, C. I. M. E. 1 Ciclo. Varenna, 30 Maggio-8 Giugno (1963).

[11] Nonlinear semi-groups and evolution equations. J. Math. Soc. Japan **19**, 508—520 (1967).

[12] Note on the differentiability of nonlinear semi-groups. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. **16** (1970).

Kelley, J. L.

[1] General Topology, van Nostrand 1955.

[2] Note on a theorem of Krein and Milman. J. Osaka Inst. Sci. Tech., Part I. **3**, 1—2 (1951).

Kellogg, O. D.

[1] Foundations of Potential Theory, Springer 1929.

Khintchine, A.

[1] Zu Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems. Math. Ann. **107**, 485—488 (1933).

Kisyński, J.

[1] Sur les opérateurs de Green des problèmes de Cauchy abstraits. Stud. Math. **23**, 285—328 (1964).

Kodaira, K.

[1] The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices. Amer. J. of Math. **71**, 921—945 (1949).

Kolmogorov, A.

[1] Über analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. **104**, 415—458 (1931).

Komatsu, H.

[1] Abstract analyticity in time and unique continuation property of solutions of a parabolic equation. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1, 9, Part 1, 1—11 (1961).

[2] A characterization of real analytic functions. Proc. Japan Acad. **36**, 90—93 (1960).

[3] A proof of Kotaké-Narasimhan's theorem. Proc. Japan Acad. **38**, 615—618 (1962).

[4] Semi-groups of operators in locally convex spaces. J. Math. Soc. of Japan **16**, 230—262 (1964).

[5] Fractional powers of operators, Pacific J. of Math. **19**, No. 2, 285—346 (1966).

Kōmura, Y.

[1] Nonlinear semi-groups in Hilbert space. J. Math. Soc. Japan **19**, 493—507 (1967).

[2] Differentiability of nonlinear semi-groups. J. Math. Soc. Japan **21**, 375—402 (1969).

Konishi, Y.

[1] On the nonlinear semi groups associated with $u_t = \Delta\beta(u)$ and $\varphi(u_t) = \Delta u$. J. Math. Soc. Japan **25**, 622—628 (1973).

[2] On $u_t = u_{xx} - F(u_x)$ and the differentiability of the nonlinear semi-group associated with it. Proc. Japan Acad. **48**, No. 5, 281—286 (1972).

Kotaké, T.

[1] Sur l'analyticité de la solution du problème de Cauchy pour certaines classes d'opérateurs paraboliques. C. R. Acad. Sci. Paris **252**, 3716—3718 (1961).

[2] (with M.S. Narasimhan) Sur la régularité de certains noyaux associés à un opérateur elliptique. C. R. Acad. Sci. Paris **252**, 1549—1550(1961).

Köthe, G.

[1] Topologische lineare Räume. Vol. I, Springer 1960.

Krein, M.

[1] (with D. Milman) On extreme points of regularly convex sets. Stud. Math. **9**, 133—138(1940).

[2] (with S. Krein) On an inner characteristic of the set of all continuous functions defined on a bicompact Hausdorff space. Doklady Akad. Nauk SSSR **27**, 429—430(1940).

Krein, S.

[1] See Krein-Krein [2].

[2] Linear Differential Equations in Banach Spaces, Amer, math. Soc. 1971.

Krylov, N.

[1] (with N. Bogolioubov) La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes de la mécanique non linéaires. Ann. of Math. **38**, 65—113(1937).

Ladyzhenskaya, O. A.

[1] (With I. M. Visik) Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles et certaines classes d'équations opérationnelles. Ousp. Mat. Nauk **11**, 41—97(1956).

Lax, P. D.

[1] (with A. N. Milgram) Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Princeton 1954.

[2] On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations. Comm. Pure and Appl. Math. **8**, 615—633(1955).

[3] (with R.S. Phillips) Local boundary conditions for dissipative system of linear partial differential operators. Comm. Pure and Appl. Math. **13**, 427—455(1960).

[4] (With R. S. Phillips) Scattering Theory, Academic Press 1967.

Leray, J.

[1] Hyperbolic Differential Equations, Princeton 1952.

Lewy, H.

[1] An example of a smooth linear partial differential equation without solutions. Ann. of Math. **66**, 155—158(1957).

Liggett, T.

[1] See Crandall-Liggett [2].

Lions, J. L.

[1] Une remarque sur les applications du théorème de Hille-Yosida. J. Math. Soc. Japan **9**, 62—70(1957).

[2] Equations Différentielles Opérationnelles, Springer 1961.

[3] Espaces d'interpolation et domaines de puissance fractionaires d'opérateurs. J. Math. Soc. Japan **14**, 233—241(1962).

[4] Les semi-groups distributions. Portugaliae Math. **19**, 141—164(1960).

[5] Sur quelques questions dánalyse, de mécanique et de contrôle optimal, Press de Université

de Montreal 1976.

Lumer, G.

[1] Semi-inner product spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **100**. 29—43(1961).

[2] (with R. S. Phillips) Dissipative operators in a Banach space. Pacific J. Math. **11**, 679—698(1961).

Maak, W.

[1] Fastperiodische Funktionen. Springer 1950.

Malgrange, B.

[1] Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. Ann. Inst. Fourier **6**, 271—355(1955—56).

[2] Sur une classe d'opérateurs différentielles hypoelliptiques. Bull, Soc. Math. France **58**, 283—306(1957).

Maruyama, G.

[1] On strong Markoff property. Mem. Kyushu Univ. **13**(1959).

Masuda, K.

[1] Hatten Hoteishiki (Evolution Equations), in Japanese, Kinokuniya Book Company 1975.

Mazur, S.

[1] Sur les anneaux linéaires. C. R. Acad. Sci. Paris **207**, 1025—1027(1936).

[2] Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. Stud. Math. **5**, 70—84(1933).

McKean, H.

[1] See Itô-McKean [1].

Meyer, P. A.

[1] Probability and Potentials, Blaisdell Publishing Company (1966).

[2] See Choquet-Meyer [2].

MikusiŃski, J.

[1] Operational Calculus, Pergamon 1959.

Milgram, A. N.

[1] See Lax-Milgram [1].

Milman, D.

[1] On some criteria for the regularity of spaces of the type (*B*). Doklady Akad. Nauk SSSR **20**, 20(1938).

[2] See Krein-Milman [1].

Mimura, Y.

[1] See Yosida-Mimura-Kakutani [10].

[2] Über Funktionen von Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum. Jap. J. Math. **13**, 119—128(1936).

Minlos, R. A.

[1] Generalized stochastic processes and the extension of measures. Trudy Moscow Math. **8**, 497—518(1959).

Minty, G.

[1] Monotone (nonlinear) operators in a Hilbert space. Duke Math. J. **29**, 341—346(1962).

Miyadera, I.

[1] Generation of a strongly continuous semi-group of operators. Tohoku Math. J. **4**, 109—121(1952).

[2] (with S. Oharu) Approximation of semi-groups of nonlinear operators. Tohoku Math. J. 22, 24—47(1970).

[3] Some remarks on semi-groups of nonlinear operators. Tohoku Math. J. **23**, 245—258 (1971).

Mizohata, S.

[1] Hypoellipticité des équations paraboliques. Bull. Soc. Math. France **85**, 15—50(1957).

[2] Analyticité des solutions élémentaires des systèmes hyperboliques et paraboliques. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto **32**, 181—212(1959).

[3] Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. Mém. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Sér. A **31**, 219—239(1958).

[4] Le problème de Cauchy pour les équations paraboliques. J. Math. Soc. Japan **8**, 269—299(1956).

[5] Systèmes hyperboliques. J. Math. Soc. Japan **11**, 205—233(1959).

[6] The Theory of Partial Differential Equations, Cambridge University Press 1973.

Morrey, C. B.

[1] (with L. Nirenberg) On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. **10**, 271—290(1957).

Nagumo, M.

[1] Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen. Jap. J. Math. **13**, 61—80(1936).

[2] Re-topologization of functional spaces in order that a set of operators will be continuous. Proc. Japan Acad. **37**, 550—552(1961).

Nagy, B. von Sz.

[1] Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Springer 1942.

[2] See Riesz-Nagy [3].

[3] Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace. Akad. Kiado, Budapest 1955.

[4] (With C. Foias) Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces, North-Holland Publishing Company 1970.

Naimark, M. A.

[1] Normed Rings. P. Noordhoff 1959.

[2] Lineare differentiale Operatoren, Akad. Verlag 1960.

[3] Über Spektralfunktionen eines symmetrischen Operators. Izvestia Akad. Nauk SSSR **17**, 285—296(1943).

Nakano, H.

[1] Unitärinvariante hypermaximale normale Operatoren, Ann. of Math. **42**, 657—664(1941).

Narasimhan, M. S.

[1] See Kotaké-Narasimhan [2].

Nelson, E.

[1] Analytic vectors. Ann. of Math. **670**, 572—615(1959).

[2] Feynman integrals and the Schrödinger equations. J. of Math. Physics **5**, 332—343 (1964).

Neumann, J. von

[1] Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Ann. **102**, 49—131(1929).

[2] On rings of operators, III. Ann. of Math. **41**, 94—161(1940).

[3] Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik. Ann. of Math. **33**, 587—643(1932).

[4] Almost periodic functions in a group. I. Trans Amer. Math. Soc. **36**, 445—492(1934).

[5] Über adjungierte Funktionaloperatoren. Ann. of Math. **33**, 249—310(1932).

[6] Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen. Math. Z. **30**, 3—42(1929).

[7] Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren. Math. Ann. **102**, 370—427 (1929—30).

[8] Über einen Satz von Herrn M.H. Stone. Ann. of Math. **33**, 567—573(1932).

Nirenberg, L.

[1] Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. **8**, 643—674(1955).

[2] On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **13**, 115—162 (1959).

[3] See Morrey-Nirenberg [1].

[4] See Agmon-Nirenberg [1].

Oharu, S.

[1] See Miyadera-Oharu [2].

Ornstein, D.S.

[1] See Chacon-Ornstein [1].

Paley, R.E.A.C.

[1] (with N. Wiener) Fourier Transforms in the Complex Domain, Colloq. Publ Amer. Math. Soc., 1934.

Pazy, A.

[1] See Brezis-Pazy [2].

[2] See Crandall-Pazy [1].

Peetre, J.

[1] A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators. Comm. Pure and Appl. Math. **16**, 737—747(1961).

Peter, F.

[1] (with H. Weyl) Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. Math. Ann. **97**, 737—755(1927).

Petrowsky, I.G.

[1] Sur l'analyticité des solutions d'équations différentielles Rec. Math. **47**(1939).

Pettis, B. J.

[1] On integration in vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 277—304(1938).

Phelpôs, R. R.

[1] Lectures on Choquet's Theorem, van Nostrand 1966.

Phillips, R. S.

[1] See Hille-Phillips [1].

[2] The adjoint semi-group. Pacific J. Math. **5**, 269—283(1955).

[3] An inversion formula for Laplace transform and semi-groups of linear operators. Ann. of Math. **59**, 325—356(1954).

[4] See Lumer-Phillips [2].

[5] On the generation of semi-groups of linear operators. Pacific J. Math. **2**, 343—369 (1952).

[6] On the integration of the diffusion equation with boundaries. Trans. Amer. Math. Soc. **98**, 62—84(1961).

[7] Dissipative operators and parabolic partial differential operators. Comm. Pure and Appl. Math. **12**, 249—276(1959).

[8] Dissipative hyperbolic systems. Trans. Amer. Math. Soc. **86**, 109—173(1957).

[9] Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 193—254(1959).

[10] See Lax-Phillips [3].

[11] See P. D. Lax-R. S. phillips [4].

Pitt, H. R.

[1] Tauberian Theorems. Tata Inst. of Fund. Research, 1958.

Pontrjagin, L.

[1] Topological Groups, Princeton 1939.

Poulsen, E. T.

[1] Evolutionsgleichungen in Banach-Räumen, Math. Zeitschr. **90**, 286—309(1965).

Quinn, B. K.

[1] Solution with shocks: An example of an. L_1-contractive semi-group. Comm. Pure and Appl. Math. **24**, 125—132(1971).

Rado, T.

[1] Subharmonic Functions, Springer 1937.

Raikov, D. A.

[1] See Gelfand-Raikov [4].

[2] See Gelfand-Raikov-Silov [5].

Rasmussen, S.

[1] Non-linear semi-groups, evolution equations and product integral representations. Various Publication Series, No. **2**, Aarhus Universitet (1971/72).

Ray D.

[1] Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes. Ann. of Math. **70**, 43—72 (1959).

Rickart, C. E.

[1] General Theory of Banach Alge bras, van Nostrand 1960.

Riesz, F.

[1] Zur Theorie des Hilbertschen Raumes. Acta Sci. Math. Szeged **7**, 34—38(1934).

[2] Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. **41**, 71—98(1918).

[3] (with B. von Sz. Nagy) Lecons d'Analyse Fonctionelle, Akad. Kiado, Budapest 1952.

[4] Some mean ergodic theorems. J. London Math. Soc. **13**, 274—278(1938).

[5] Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert. Acta Sci. Math. Szeged **7**, 147—159(1935).

[6] Sur la Décomposition des Opérations Linéaires. Proc. Internat. Congress of Math. 1928, held at Bologna, Vol. **III**, 143—148.

Rockafeller, R. T.

[1] Convex Analysis, Princeton University Press 1972.

Ryll-Nardzewski, C.

[1] See J. MikusiŃski [1].

Saks, S.

[1] Theory of the Integral, Warszawa 1937.

[2] Addition to the note on some functionals. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 967—974 (1933).

Sato, K.

[1] Positive pseudo-resolvents in Banach lattices. J. Fac. Science, The Univ. of Tokyo, Sect. IA. Vol. **17**, Nos. 1—2, 305—313(1970).

[2] Potential operators for Markov processes, to appear.

Sato, M.

[1] Theory of hyperfunctions I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1, **8**, 139—193(1959); II, ibid. **8**, 387—437(1960).

[2] (With T. Kawai and M. Kashiwara) Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics 287, Springer 1973.

[3] (With many authors) Recent Development in Hyperfunction Theory and its Application to Physics (Microlocal Analysis of S-Matrices and Related Quantities), Lecture Notes in Physics 39, Springer 1975.

Schapira, P.

[1] Théorie des Hyperfunctions, Lecture Notes in Mathematics 126, Springer 1970.

Schatten, R.

[1] A Theory of Cross-spaces, Princeton 1950.

Schauder, J.

[1] Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen. Stud. Math. **2**, 1—6(1930).

Schwartz, J.

[1] See Dunford-Schwartz [1].

[2] See Dunford-Schwartz [4].

[3] See Dunford-Schwartz [5].

[4] See Dunford-Schwartz [6].

Schwartz, L.

[1] Théorie des Distributions, vol I et II. Hermann 1950, 1951.

[2] Transformation de Laplace des distributions. Comm. Sém. Math. de l'Univ. de Lund, tome suppl. dédié à M. Riesz, 196—206(1952).

[3] Lectures on Mixed Problems in Partial Differential Equations and the Representation of Semi groups. Tata Inst. Fund. Research, 1958.

[4] Les équations d'évolution liées au produit de compositions. Ann. Inst. Fourier **2**, 165—169(1950—1951).

[5] Exposé sur les travaux de Gårding, Séminaire Bourbaki, May 1952.

[6] Théorie des Distributions. Hermann 1966.

[7] Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures, Tata Institute of Fundamental Research and Oxford University Press 1973.

Segal, I. E.

[1] The span of the translations of a function in a Lebesgue space. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **30**, 165—169(1944).

Shmulyan, V. L.

[1] Über lineare topologische Räume. Math. Sbornik. N. S. **7**(49), 425—448(1940).

Silov, G.

[1] See Gelfand-Šilov [1].

[2] See Genfad-Ralkov-Šilov [5].

Smith, P. A.

[1] See Birkhoff-Smith [2].

Sobolev, S. L.

[1] Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. Math. Sbornik **45**, 471—496(1938).

[2] Certaines Applications de l'Analyse Fonctionnelle à la Physique Mathématique, Leningrad 1945.

Sobolevski, P. E.

[1] Parabolic type equations in Banach spaces. Trudy Moscow Math. **10**, 297—350(1961).

Stein, E. M.

[1] (With G. Weiss) Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press 1970.

[2] Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press 1970.

Stone, M. H.

[1] Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1932.

[2] On one-parameter unitary groups in Hilbert space. Ann. of Math. **33**, 643—648(1932).

Szegö, G.

[1] Orthogonal Polynomials. Colloq. Pub. Amer. Math. Soc., 1948.

Tanabe, H.

[1] Evolution equations of parabolic type. Proc. Japan Acad. **37**, 610—613(1961).

[2] On the equations of evolution in a Banach space. Osaka Math. J. **12**, 365—613 (1960).

[3] A class of the equations of evolution in a Banach space. Osaka Math. J. **11**, 121—143 (1959).

[4] Remarks on the equations of evolution in a Banach space. Osaka Math. J. **12**, 145—166 (1960).

[5] See Kato-Tanabe [8].

[6] Hatten Hoteishiki (Evolution Equations), in Japanese, Iwanami Shoten 1975.

Tannaxa, T.

[1] Dualität der nicht-kommutativen bikompakten Gruppen. Tohoku Math. J. **53**, 1—12 (1938).

Taylor, A.

[1] Introduction to Functional Analysis, Wiley 1958.

Temam, R.

[1] See I. Ekeland-R. Temam [1]

Titchmarsh, E. C.

[1] Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford 1937.

[2] Eigenfunction Expansion Associated with Second-order Differential Equations, Vol. I—II, Oxford 1946—1958.

Trèves, F.

[1] Lectures on Partial Differential Equations with Constant Coefficients. Notas de Matematica, No. 7, Rio de Janeiro 1961.

Trotter, H. F.

[1] Approximation of semi-groups of operators. Pacific J. Math. **8**, 887—919(1958).

Vilenkin, N. Y.

[1] See Gelfand-Vilenkin [3].

Visik, I. M.

[1] See Ladyzhenskaya-Visik [1].

Vitali, G.

[1] Sull'integrazioni per serie. Rend. Circ. Mat. di Palermo **23**, 137—155(1907).

Watanabe, J.

[1] On some properties of fractional powers of linear operators. Proc. Japan Acad. **37**, 273—275(1961).

Webb, G.

[1] Representation of semi-groups of nonlinear nonexpansivetransformations in Banach spaces. J. Math. Mech. **19**, 157—170(1969).

Wecken, F. J.

[1] Unitärinvariante selbstadjungierte Operatoren. Math. Ann, **116**. 422—455(1939).

Weil, A.

[1] Sur les fonctions presque périodiques de von Neumann. C. R. Acad. Sci. Paris **200**, 38—40(1935).

Weiss, G.

[1] See E. M. Stein-G. Weiss[1].

Weyl, H.

[1] The method of orthogonal projection in potential theory. Duke Math. J. **7**, 414—444 (1940).

[2] Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. **68**, 220—269(1910).

[3] See Peter-Weyl [1].

Wiener, N.

[1] See Paley-Wiener [1].

[2] Tauberian theorems. Ann. of Math. **33**, 1—100(1932).

[3] The Fourier Integral and Certain of Its Applications, Cambridge 1933.

Yamabe, H.

[1] See Itô-Yamabe [2].

Yamada, A.

[1] On the correspondence between potential operators and semi-groups associated with Markov processes. Zeitschr. für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb. **15**, 230—238 (1970).

Yosida, K.

[1] Lectures on Differential and Integral Equations, Interscience 1960.

[2] Vector lattices and additive set functions. Proc. Imp. Acad. Tokyo **17**, 228—232(1940).

[3] Mean ergodic theorem in Banach spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo **14**, 292—294(1938).

[4] Ergodic theorems for pseudo-resolvents. Proc. Japan Acad. **37**, 422—425(1961).

[5] On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators. J. Math. Soc. Japan **1**, 15—21(1948).

[6] Holomorphic semi-groups in a locally convex linear topological space. Osaka Math. J., **15**, 51—57(1963).

[7] (with S. Kakutani) Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorems. Ann. of Math. **42**, 188—228(1941).

[8] Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them. Proc. Japan Acad. **36**, 86—89(1960).

[9] Quasi-completely continuous linear functional operators. Jap. J. Math. **15**, 297—301 (1939).

[10] (with Y. Mimura and S. Kakutani) Integral operators with bounded measurable kernel. Proc. Imp. Acad. Tokyo **14**, 359—362(1938).

[11] On the group embedded in the metrical complete ring. Jap. J. Math. **13**, 7—26 (1936).

[12] Normed rings and spectral theorems. Proc. Imp. Acad. Tokyo **19**, 356—359(1943).

[13] On the unitary equivalence in general Euclid spaces. Proc. Jap. Acad. **22**, 242—245 (1946).

[14] On the duality theorem of non-commutative compact groups. Proc. Imp. Acad. Tokyo **19**, 181—183(1943).

[15] An abstract treatment of the individual ergodic theorems. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 280—284(1940).

[16] (with M. Fukamiya) On vector lattice with a unit, II. Proc. Imp. Acad. Tokyo **18**, 479—482(1941).

[17] Markoff process with a stable distribution. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 43—48(1940).

[18] Ergodic theorems of Birkhoff-Khintchine's type. Jap. J. Math. **17**, 31—36(1940).

[19] Simple Markoff process with a locally compact phase space. Math. Japonicae **1**, 99—103 (1948).

[20] Brownian motion in a homogeneous Riemannian space. Pacific J. Math. **2**, 263—270 (1952).

[21] An abstract analyticity in time for solutions of a diffusion equation. Proc. Japan Acad. **35**, 109—113(1959).

[22] An operator-theoretical integration of the wave equation. J. Math. Soc. Japan **8**, 79—92(1956).

[23] Semi-group theory and the integration problem of diffusion equations. Internat. Congress of Math. 1954, held at Amsterdam, Vol. 3, pp. 864—873.

[24] On the integration of diffusion equations in Riemannian spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 864—873(1952).

[25] On the fundamental solution of the parabolic equations in a Riemannian space. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 864—873(1952).

[26] An extension of Fokker-Planck's equation. Proc. Japan Acad. **25**, 1—3(1949).

[27] Brownian motion on the surface of 3-sphere. Ann. of Math. Statist. **20**, 292—296(1949).

[28] On the integration of the equation of evolution. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. **1**, **9**, Part **5**, 397—402(1963).

[29] An operator-theoretical treatment of temporally homogeneous Markoff processes. J. Math. Soc. Japan **1**, 244—253(1949).

[30] On holomorphic Markov processes, Proc. Japan Acad. **42**, No. **4**, 313—317(1966).

[31] A perturbation theorem for semi-groups of linear operators, Proc Japan Acad. **41**, No. **8**, 645—647(1965).

[32] Positive resolvents and potentials (An operator-theoretical treatment of Hunt's theory of potentials), Zeitschr. für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb. **8**, 210—218 (1967).

[33] Time dependent evolution equations in a locally convex space, Math. Zeitschr. **162**, 83—86(1965).

[34] The existence of the potential operator associated with an equi-continuous semi-group of class (C_0). Studia Math. **31**, 531—533(1968).

[35] On the existence and a characterization of abstract potential operators. Proc. Colloq. Functional Analysis, Liège (1970), 129—136.

[36] (with T. Watanabe and H. Tanaka) On the pre-closedness of the potential operators. J. Math. Soc. Japan **20**, 419—421(1968).

[37] The pre-closedness of Hunt's potential operators and its applications. Proc. Intern.

Conf. Functional Analysis and Related Topics, Toyko, 324—331(1969).

[38] On the potential operators associated with Brownian motions. J. d'Analyse Mathématique 23, 461—465(1970).

[39] Abstract potential operators on Hilbert space. Publ. of the Research Inst. for Math. Sci., Kyoto Univ. 8, No. 1, 201—205(1972).

Yushkevitch, A. A.

[1] On strong Markoff processes. Teorya Veroyatn. 2(1957).

术 语 索 引

一 画

二 画

三 画

四 画

五　画

六　画

七 画

八　画

九 画

十 画

十一画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 八 画

人名索引

空间记号